



TRAVAIL ENCADRÉ DE RECHERCHE

QUELQUES RÉSULTATS SUR LES BILLARDS
MATHÉMATIQUES

Auteurs :

Samuel RAË et Sacha CARDONNA

Référent :

Daniel MASSART

Introduction

Alors Zénon demanda :

- Soit une flèche en vol. À un instant, est-ce qu'elle est au repos ou en mouvement ?

- Elle est toujours en mouvement.

- Mais être en mouvement, c'est changer de position. À un instant, la flèche a une position, elle n'en change pas. Elle n'est donc pas en mouvement.

- Alors elle est au repos ?

- Si elle est au repos à cet instant, elle est aussi au repos à tous les autres instants, elle est donc toujours au repos. Elle n'est jamais en mouvement. Mais comment alors peut-elle passer d'une position à une autre ?

Le paradoxe de la flèche, proposé par Zénon d'Élée

En mathématiques, comme en sciences, on définit un *système dynamique* comme la donnée d'un système, et d'une loi le décrivant. Ainsi, un système dynamique est souvent donné en fonction du temps : on étudie les conséquences d'une réaction chimique, la trajectoire de Saturne autour du Soleil, l'évolution d'une pandémie à l'échelle mondiale... Leur étude sert finalement à une cause universelle : comprendre le comportement de tout ce qui peut bouger.

Aujourd'hui de nombreux mathématiciens travaillent sur ce domaine florissant : par exemple, un des professeurs français les plus reconnus dans ce domaine, M. Jean-Christophe Yoccoz, médaillé Fields et ancien membre de Bourbaki, a travaillé pendant toute sa vie sur la théorie des systèmes dynamiques.¹

Ces travaux l'ont amené à modéliser plusieurs problèmes, et notamment celui qui fait l'objet de ce travail de recherche : les *billards mathématiques*.

L'objectif de ce travail est de discuter de ce système dynamique, sans tomber dans la complication, et en introduisant progressivement des outils puissants permettant de formaliser cette étude.

Nous nous intéresserons ainsi notamment au *billard circulaire* et au *billard elliptique*. Nous commencerons évidemment par quelques définitions dans une partie introductive, où nous rappellerons également quelques résultats intéressants.

Nous tenions à remercier expressément M. Daniel MASSART pour son encadrement pendant ce travail. Son accompagnement, sa patience et sa gentillesse nous ont permis d'avancer au mieux tout au long de cet humble mémoire. Nous espérons qu'il sera satisfait de ce document.

1. À travers cet humble mémoire, nous avons une pensée pour le professeur, qui est décédé en 2016 des suites d'une longue maladie.

TABLE DES MATIÈRES

1	INTRODUCTION AU BILLARD MATHÉMATIQUE	1
1.1	PREMIÈRES DÉFINITIONS ET MOTIVATIONS	1
1.1.1	QU'EST-CE QU'UN BILLARD MATHÉMATIQUE?	1
1.1.2	DES EXEMPLES DE SYSTÈME MÉCANIQUE	2
1.2	PRINCIPE DE FERMAT ET LOI DE SNELL-DASCARTES	4
1.2.1	INTÉRÊT POUR L'ÉTUDE DU BILLARD	4
1.2.2	CHEMIN OPTIQUE D'UN RAYON LUMINEUX	4
1.2.3	LOI DE SNELL-DASCARTES	5
1.3	RÉDUCTION À UN SYSTÈME À TEMPS DISCRET	7
2	BILLARD CIRCULAIRE À RÉFLEXION ÉLASTIQUE	8
2.1	MISE EN PLACE DU PROBLÈME	8
2.2	RELATION ENTRE I ET \bar{U} , TRAJECTOIRES PÉRIODIQUES	9
2.3	EXISTENCE DE CERCLES CAUSTIQUES	13
3	ÉTUDE DU BILLARD ELLIPTIQUE	16
3.1	MODÉLISATION DU BILLARD	16
3.2	RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES	17
3.3	ÉTUDE DES TRAJECTOIRES PÉRIODIQUES	25
3.4	ÉTUDE D'UNE TRAJECTOIRE REMARQUABLE	28

Chapitre 1

INTRODUCTION AU BILLARD MATHÉMATIQUE

Dans cette partie introductive, on définit ce qu'est un *billard mathématique*, et on démontre quelques résultats utiles pour la suite de notre mémoire, notamment quelques principes fondamentaux en mécanique.

1.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS ET MOTIVATIONS

1.1.1 Qu'est-ce qu'un billard mathématique ?

Un billard mathématique est un système dynamique assez simple et intuitif : on peut évidemment en faire l'analogie avec le jeu de billard. On considère une surface et ses parois (la table de billard), et on étudie les mouvements d'une particule (la bille de billard) en son sein, lancée à une certaine vitesse. Dans ce modèle on omet les frottements : cela signifie que la particule se déplace le long d'une ligne droite avec une vitesse constante jusqu'à ce qu'elle atteigne la limite. On considère que l'angle de rebond de la bille est le même que l'angle d'incidence au moment du choc : on appelle ce résultat la *Loi de Snell-Descartes*, sur laquelle nous reviendrons un peu plus tard en détail.

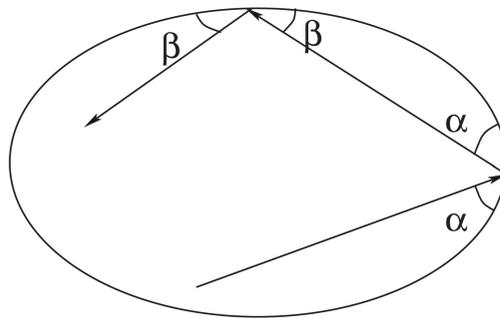


FIGURE 1.1 – Billard elliptique et réflexion selon Snell-Descartes

D'un point de vue vectoriel, au point d'impact, on décompose la vitesse de la particule en une composante normale et une composante tangentielle : après réflexion, la composante normale

change de signe et la tangentielle reste inchangée. Par ailleurs, par souci de simplicité on supposera toujours que la particule se déplace à une vitesse unitaire. Également, on supposera que le bord est régulier. De plus dans le cas de l'ellipse et du cercle, les coins étant inexistant, il n'y aura donc pas de cas pathologiques à traiter concernant les rebonds dans des coins. On peut étudier de nombreuses caractéristiques de ce système dynamique, nous essaierons dans ces notes de discuter des plus simples et sur des billards aux frontières simples.

1.1.2 Des exemples de système mécanique

Le problème du billard mathématique rappelle évidemment les situations qu'on rencontre en mécanique du point et en optique géométrique. On peut considérer un exemple assez simple en démontrant ce résultat :

PROPOSITION 1.1.1 *Le système mécanique composé de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 sur \mathbb{R}_+ est isomorphe au billard dans le coin d'angle $\arctan \sqrt{m_1/m_2}$.*

Preuve. Considérons donc ce système mécanique : deux particules de masse m_1 et m_2 se déplaçant sur la demi-droite \mathbb{R}_+ . La collision entre points est élastique : il y a donc conservation du moment et de l'énergie. Également, si il y a réflexion sur le mur $x = 0$, la vitesse change de signe. La particule de masse m_1 (resp. m_2) a une position x_1 (resp. x_2). L'état du système est alors décrit par le couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ satisfaisant l'inégalité $0 \leq x_1 \leq x_2$: l'espace de configuration¹ du système est donc un coin d'angle $\frac{\pi}{4}$. Soient v_1 et v_2 les vitesses des particules. Le point (x_1, x_2) se déplace donc à vitesse constante (v_1, v_2) tant que les particules ne rentrent pas en collision.

Considérons alors l'instant de collision, et les vitesses post-collisions (u_1, u_2) . On écrit alors les équations de conservation de l'énergie et du moment

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \end{aligned}$$

On introduit maintenant, pour $i = 1, 2$, $\bar{x}_i = \sqrt{m_i} x_i$: l'espace de configuration est le coin dont la frontière inférieure est la droite d'équation $\bar{x}_1/\sqrt{m_1} = \bar{x}_2/\sqrt{m_2}$ et dont l'angle est $\arctan \sqrt{m_1/m_2}$. On réécrit ainsi les vitesses sous la forme $\bar{v}_i = \sqrt{m_i} v_i$ et $\bar{u}_i = \sqrt{m_i} u_i$. Considérons alors les deux

1. En mécanique classique, l'espace de configuration d'un système physique est l'ensemble des positions possibles que ce système peut atteindre. Il a généralement une structure naturelle de variété.

équations de conservation avec les nouvelles coordonnées

$$\begin{aligned}\sqrt{m_1}\bar{v}_1 + \sqrt{m_2}\bar{v}_2 &= \sqrt{m_1}\bar{u}_1 + \sqrt{m_2}\bar{u}_2, \\ \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 &= \bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2\end{aligned}$$

La première équation montre que le produit scalaire du vecteur vitesse (\bar{v}_1, \bar{v}_2) avec le vecteur masse $(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$ est conservé, tandis que la seconde prouve que la norme du vecteur vitesse ne change pas lors de la collision. Par ailleurs, le vecteur masse est tangent à la frontière de l'espace de configuration $\bar{x}_1/\sqrt{m_1} = \bar{x}_2/\sqrt{m_2}$: ainsi la composante tangentielle du vecteur vitesse ne change pas, et la trajectoire est reflétée sur cette droite selon les lois du billard.

De même, si on considère la situation où la particule de masse m_1 frappe le mur $x = 0$, cette collision correspond à la réflexion du billard dans la frontière supérieure de l'espace de configuration. On a donc bien isomorphisme entre ce système mécanique et le billard dans l'angle $\arctan \sqrt{m_1/m_2}$. \square

On peut également essayer de considérer un système plus complexe et de voir s'il est isomorphe à un billard.

PROPOSITION 1.1.2 *Le système mécanique composé de trois masses ponctuelles m_1, m_2 et m_3 sur le cercle unité \mathbb{S}^1 est isomorphe au billard dans un triangle d'angles*

$$\arctan \left(m_i \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3}} \right), \quad i = 1, 2, 3$$

Preuve. On reprend le principe de la preuve précédente : on considère les positions angulaires x_1, x_2 et x_3 sur le cercle. On peut voir \mathbb{S}^1 comme $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et les positions \bar{x}_i sont alors des réels (ces coordonnées sont uniques modulo 1). On effectue le même changement de coordonnées que dans la preuve ci-dessus. On considère alors les trois collisions possibles entre deux points en écrivant les équations de plans suivant

$$\begin{aligned}\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{m_1}} &= \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{m_2}} + 2k\pi, \\ \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{m_2}} &= \frac{\bar{x}_3}{\sqrt{m_3}} + 2m\pi, \\ \frac{\bar{x}_3}{\sqrt{m_3}} &= \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{m_1}} + 2n\pi\end{aligned}$$

où $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Tous ces plans sont orthogonaux au plan

$$\sqrt{m_1}\bar{x}_1 + \sqrt{m_2}\bar{x}_2 + \sqrt{m_3}\bar{x}_3 = c$$

où $c \in \mathbb{R}$, et le partitionnent en triangles congruents². Le système de trois masses ponctuelles sur le cercle est alors isomorphe au billard à l'intérieur d'un tel triangle. On calcule ensuite les angles dièdres du triangle et on obtient

$$\arctan \left(m_i \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3}} \right), \quad i = 1, 2, 3$$

On calcule ensuite la vitesse angulaire ω du centre de masse du système

$$\omega = \sum_i \frac{m_i v_i}{m_i} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

et on prend un nouveau repère en ce centre de masse. Les nouvelles coordonnées donnent alors

$$\sqrt{m_1} \bar{v}_1 + \sqrt{m_2} \bar{v}_2 + \sqrt{m_3} \bar{v}_3 = 0$$

et par intégration on ré-obtient l'équation du plan ci-dessus. En d'autres termes, on revient bien au billard à l'intérieur d'un triangle aigu avec les angles calculés ci-dessus. \square

1.2 PRINCIPE DE FERMAT ET LOI DE SNELL-DESCARTES

Dans cette section on rappelle et démontre la loi fondamentale de l'optique géométrique, qui nous sera utile dans la suite de ce travail.

1.2.1 Intérêt pour l'étude du billard

L'intérêt de considérer l'utilisation de cette loi pour étudier le billard vient en fait de considérations géométriques faites au préalable : nous assimilons le système billard à un milieu homogène dont l'indice de réfraction est celui du vide, et négligeons les frottements de la bille sur la paroi. Aussi, on assimile la bille à un point matériel. Ces approximations nous emmènent naturellement à aborder le problème à l'aide de l'optique géométrique et donc de ses lois principales.

1.2.2 Chemin optique d'un rayon lumineux

Commençons par une définition générale.

DÉFINITION 1.2.1 *Soit \mathcal{C} une courbe quelconque dans un milieu inhomogène. Entre deux points infiniment voisins à une distance ds l'un de l'autre, on peut écrire $d\mathcal{L} = n(s)ds$, où $n(s)$ est l'indice de réfraction du milieu en un point s de la courbe, et $d\mathcal{L}$ désigne la longueur du chemin parcouru par le rayon entre les deux points. Alors entre deux points (x_A, y_A) et (x_B, y_B) de la courbe, le **chemin***

2. Il existe donc un déplacement, par translation ou rotation, permettant de les superposer.

optique s'écrit

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_C d\mathcal{L} = \int_{x_A}^{x_B} \int_{y_A}^{y_B} n(s) ds$$

Le fait que nous considérons des trajectoires rectilignes entre les chocs au bord du billard, un milieu homogène d'indice de réfraction $n = 1$ (celui du vide) et une vitesse constante de la particule nous permet de simplifier l'expression

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \int_{y_A}^{y_B} n(s) ds = d((x_A, y_A), (x_B, y_B))$$

où d est la distance euclidienne sur \mathbb{R}^2 . Nous pouvons maintenant énoncer le principe de Fermat dans un milieu homogène.

PRINCIPE DE FERMAT. *Dans un milieu homogène, la lumière se propage suivant la trajectoire qui minimise le temps de parcours.*

Grâce à ce résultat, nous savons que le temps de parcours dans un milieu homogène est proportionnel à la longueur du trajet, et le chemin le plus court dans un espace euclidien pour aller d'un point à un autre est la ligne droite. Il permet de retrouver la plupart des résultats de l'optique géométrique, en particulier les lois de la réflexion sur les miroirs, les lois de la réfraction, et la fameuse loi de Snell-Descartes.

1.2.3 Loi de Snell-Descartes

Comme nous travaillons dans \mathbb{R}^2 , le rayon réfracté, le rayon incident et la normale (au dioptre) sont dans un même plan : le plan d'incidence. On rappelle alors l'une des lois les plus importantes et utiles de l'optique géométrique :

LOI DE SNELL-DESCARTES. *Il existe une relation liant les indices de réfraction n_1 et n_2 de chacun des milieux et les angles incidents θ_1 et réfracté θ_2 , de sorte que*

$$n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$$

Preuve. On utilise le principe de Fermat. La séparation entre les milieux d'indice n_1 et n_2 sera prise comme axe des abscisses. On considère un rayon lumineux partant d'un point $A(x_A, h_A)$ traversant un dioptre en $X(x, 0)$ et aboutissant en $B(x_B, h_B)$. On prend A' (resp. B') le projeté orthogonal de A (resp. B) sur l'axe des abscisses. Au point X , la normale au dioptre forme un angle θ_1 avec le rayon incident et un angle θ_2 avec le rayon réfracté. En utilisant ce choix de coordonnées et en prenant la distance euclidienne sur \mathbb{R}^2 , on a $d(A', X) = x - x_A$ et $d(X, B') = x_B - x$. Calculons maintenant

$$d(A, X) = \sqrt{h_A^2 + (x - x_A)^2}, \quad d(X, B) = \sqrt{h_B^2 + (x_B - x)^2}.$$

Si on note v_A et v_B désignent les vitesses respectives de la lumière dans le milieu d'indice n_1 et le milieu d'indice n_2 , on a les temps de parcours

$$t_A = \frac{\sqrt{h_A^2 + (x - x_A)^2}}{v_A}, \quad t_B = \frac{\sqrt{h_B^2 + (x_B - x)^2}}{v_B}.$$

L'objectif sera donc de minimiser la fonction $t(x)$ telle que

$$t(x) = t_A + t_B = \frac{\sqrt{h_A^2 + (x - x_A)^2}}{v_A} + \frac{\sqrt{h_B^2 + (x_B - x)^2}}{v_B}.$$

On calcule ainsi la dérivée

$$\frac{dt(x)}{dx} = \frac{x - x_A}{v_A \sqrt{h_A^2 + (x - x_A)^2}} - \frac{x_B - x}{v_B \sqrt{h_B^2 + (x_B - x)^2}} = \frac{d(A', X)}{v_A \cdot d(A, X)} - \frac{d(B', X)}{v_B \cdot d(B, X)}$$

Chacun des termes de cette différence concerne un triangle rectangle : $AA'X$ pour le premier et $BB'X$ pour le second. On y reconnaît le rapport d'un côté à l'hypoténuse et donc la définition d'un sinus

$$\frac{A'X}{AX} = \sin \theta_1, \quad \frac{B'X}{BX} = \sin \theta_2$$

On a donc ainsi

$$\frac{dt(x)}{dx} = 0 \iff \frac{\sin \theta_1}{v_A} - \frac{\sin \theta_2}{v_B} = 0 \iff \frac{\sin \theta_1}{v_A} = \frac{\sin \theta_2}{v_B}$$

Or l'indice de réfraction d'un milieu est défini comme le rapport entre la vitesse c de la lumière dans le vide et sa vitesse v dans le milieu considéré. On a donc ici $n_1 = c/v_A$ et $n_2 = c/v_B$, et on trouve

$$n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$$

ce qu'on souhaitait. □

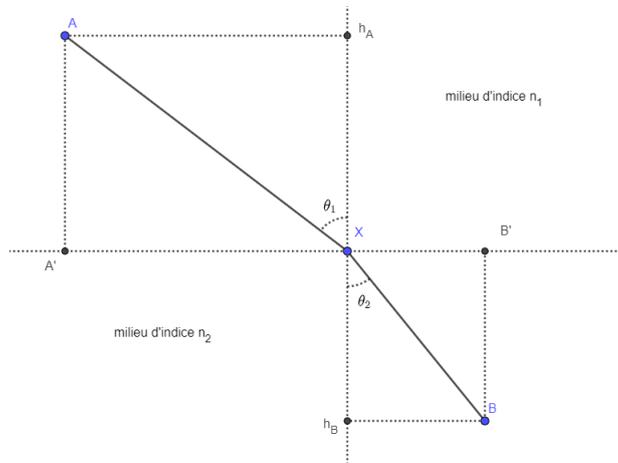


FIGURE 1.2 – Schéma de la réfraction du rayon

Pour l'anecdote, il y avait polémique entre Fermat et Descartes concernant le fait que la célérité de la lumière diminuait ou non selon la densité du milieu : Descartes pensait à tort que la lumière se déplaçait plus vite dans l'eau que dans l'air.

1.3 RÉDUCTION À UN SYSTÈME À TEMPS DISCRET

Les billards sont par définition des systèmes dynamiques à temps continu. Mais on peut en fait les réduire à des systèmes à temps discret. Dans la suite de cette section, on désigne par M une table de billard *plane* et *bornée*, et on étudiera plus en détails l'ensemble des rebonds de la bille sur le bord de la table.

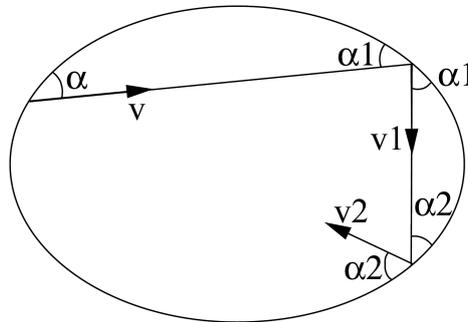


FIGURE 1.3 – Un billard elliptique

On peut ajouter une remarque à propos de ce résultat.

REMARQUE 1.3.1 Supposons que l'on lance la particule en un point x , de sorte qu'après une réflexion en un point x_1 , elle arrive en un point x_2 . On peut se demander quel x_1 choisir. On définit la fonction

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, x_1) + d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

où d est la distance euclidienne sur \mathbb{R}^2 . En calculant le gradient $\nabla\delta$, on remarque alors que x_1 est un point critique de cette fonction. En effet, si on note $x_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, 2$, et $x = (a, b)$ on a

$$\nabla\delta(a, b) = 0 \iff \frac{a - a_1}{\sqrt{(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2}} = 0, \quad \frac{b - b_1}{\sqrt{(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2}} = 0$$

Donc $a = a_1$ et $b = b_1$, et x_1 est un point critique. Ce principe variationnel est important dans l'étude du billard mathématique, et nous servira par la suite.

Chapitre 2

BILLARD CIRCULAIRE À RÉFLEXION ÉLASTIQUE

Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas du billard circulaire, en ne considérant pas les frottements. On assimile le billard de rayon 1 au disque unité du plan complexe :

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

Le bord du billard, qu'on notera \mathbb{U} , correspond ainsi à

$$\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} := \mathbb{U}$$

L'objectif de cette partie est de montrer que les trajectoires de la particule sont tangentes à des cercles concentriques à la table, appelés *cercles caustiques*, contenus dans la table, et d'étudier les trajectoires périodiques.

2.1 MISE EN PLACE DU PROBLÈME

Après avoir introduit le billard mathématique, discutons maintenant d'un des modèles les plus simples qu'on puisse rencontrer. Commençons par donner quelques informations et notations.

La bille, supposée ponctuelle, est lancée à partir du point d'affixe $x_0 = 1$. Elle rebondira ainsi sur \mathbb{U} aux points d'affixe x_1, x_2, \dots suivant la loi de Snell-Descartes. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'angle d'incidence en x_k de la trajectoire de la particule par rapport à la normale à \mathbb{U} en x_k est égal à son angle de réflexion. On obtient ainsi une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de membres de \mathbb{U} . Pour $k \in \mathbb{N}$, on appelle M_k le point d'affixe x_k . On note enfin l'ensemble des points de rebonds de la particule $I = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{U}$.

2.2 RELATION ENTRE I ET \mathbb{U} , TRAJECTOIRES PÉRIODIQUES

Dans cette partie on discute d'un résultat sur la densité de l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité, dont on rappelle la définition.

DÉFINITION 2.2.1 *On appelle ensemble des racines n -ièmes de l'unité l'ensemble $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.*

Muni de la multiplication, $(\mathbb{U}_n, *)$ est le *groupe des racines n -ièmes de l'unité*. On peut montrer quelques résultats sur celui-ci.

PROPOSITION 2.2.2 *$(\mathbb{U}_n, *)$ est un groupe cyclique.*

Preuve. On considère l'application suivante

$$f : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{U}_n, *)$$

$$\bar{k} \longmapsto f(\bar{k}) = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right)$$

L'application f est bien définie car $\exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right)$ ne dépend que de la classe de k modulo n . On peut vérifier rapidement que f est un morphisme de groupe. Soient maintenant $\bar{k}, \bar{k}' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a

$$f(\bar{k}) = f(\bar{k}') \iff \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) = \exp\left(i\frac{2k'\pi}{n}\right) \iff \frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n} [2\pi]$$

$$\iff k \equiv k' [n]$$

$$\iff \bar{k} = \bar{k}'$$

Donc f est injective. Comme $\text{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \text{card}(\mathbb{U}_n)$, on en déduit que f est un isomorphisme. Ainsi comme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique, il en est de même pour $(\mathbb{U}_n, *)$. □

PROPOSITION 2.2.3 *Les générateurs de $(\mathbb{U}_n, *)$ sont les $\xi_k = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right)$, avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, où k et n sont premiers entre eux.*

Preuve. On écrit $\mathbb{U}_n = \left\{1, \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right), \exp\left(i\frac{4\pi}{n}\right), \dots, \exp\left(i\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right\} = \{1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}\}$ avec

$\lambda = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$, donc λ est un générateur de \mathbb{U}_n . Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle \xi_k \rangle = \mathbb{U}_n &\iff \exists k' \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, (\xi_k)^{k'} = \lambda \\ &\iff \exp\left(i\frac{2kk'\pi}{n}\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right) \\ &\iff kk' \equiv 1 [n]. \end{aligned}$$

On utilise alors l'identité de Bézout

$$\begin{aligned} \exists k' \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, kk' \equiv 1 [n] &\iff \exists k' \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \exists u \in \mathbb{Z}, kk' + un = 1 \\ &\iff k \wedge n = 1 \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

On s'intéresse maintenant au lien entre l'ensemble des rebonds et les racines de l'unité. On démontre dans un premier temps un résultat préliminaire sur la densité de $\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ dans \mathbb{R} .

LEMME 2.2.4 *Si $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, la partie $\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} .*

Preuve. On remarque d'abord que $\theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} . En effet, cette partie est un sous groupe additif de \mathbb{R} , donc est soit dense, soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$. Si nous étions dans le deuxième cas, alors

$$\exists q, p \in \mathbb{Z}, \theta = aq, 2\pi = ap$$

mais alors $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{q}{p}$ ce qui contredit que $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Donc $\theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} . Montrons maintenant ceci pour $\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$. Soit $]u, v[\subset \mathbb{R}$ un intervalle non trivial, montrons que $]u, v[\cap (\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}) \neq \emptyset$. On suppose que $0 \notin]u, v[$. Posons $\varepsilon = v - u > 0$, et supposons que $u > 0$. Il suffit donc d'avoir

$$(\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}) \cap]0, \varepsilon[\neq \emptyset,$$

car si x appartient à l'intersection, on peut trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$kx \leq u < (k+1)x.$$

On a d'une part $(k+1)x \in (\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z})$, et d'autre part

$$u < (k+1)x = kx + x < u + \varepsilon = v,$$

1. Sinon, on aurait $0 \in (\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}) \cap]u, v[$ qui n'est pas vide, et donc c'est terminé.

donc

$$(\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}) \cap]u, v[\neq \emptyset.$$

Justifions que $(\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}) \cap]0, \varepsilon[\neq \emptyset$; on sait par le résultat précédent qu'il existe une infinité d'éléments de la forme $\theta m + 2\pi n$ dans $]0, \varepsilon[$, où $n, m \in \mathbb{Z}$. Alors, soit on en trouve un tel que $n \in \mathbb{N}$, l'intersection est non-vide et c'est terminé, soit ils vérifient tous que $n < 0$. Mais alors en choisissant un élément $x = \theta n + 2\pi m$ avec $n < 0$, il existe encore une infinité² d'éléments de la forme $p\theta + 2\pi q$, avec $p < 0$, dans l'intervalle $]0, x[$.

Or pour chaque entier $p \in]0, n[$, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de $(\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z})$ qui sont aussi dans $]0, x[$. Donc il existe nécessairement un élément $x' \in]0, x[$ de la forme

$$x' = p\theta + 2\pi q \in]0, \varepsilon[,$$

avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $p \leq n$. On a alors

$$x - x' = (n - p)\theta + 2\pi(m - q) \in (\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}) \cap]0, \varepsilon[,$$

ce qu'on souhaitait. □

PROPOSITION 2.2.5 *L'ensemble des rebonds $I = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est soit l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, soit dense dans \mathbb{U} .*

Preuve. Soit $\alpha \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{M_0O}, \overrightarrow{M_0M_1})$. Le triangle OM_1M_2 est alors isocèle en O donc compte tenu de l'orientation, la mesure de $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1})$ est $\theta = \pi + 2\alpha$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par loi de Snell-Descartes, on a isométrie entre les triangles OM_kM_{k+1} et $OM_{k+1}M_{k+2}$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'angle orienté $(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}})$ a pour mesure θ donc que $x_{k+1} = e^{i\theta}x_k$. Ainsi on a

$$I = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{e^{ik\theta} \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Introduisons maintenant l'application

$$\begin{aligned} \Gamma : (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (\mathbb{U}_n, *) \\ x &\longmapsto e^{ix} \end{aligned}$$

C'est un morphisme de groupe continu et surjectif, et on a $I = \Gamma(\theta\mathbb{N})$. Considérons maintenant la

2. Car nous venons de dire qu'il n'y en a pas avec $p \in \mathbb{N}$.

partie $\Gamma^{-1}(I)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x \in \Gamma^{-1}(I) &\iff \Gamma(x) \in I \iff \Gamma(x) \in \Gamma(\theta\mathbb{N}) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{N}, e^{ix} = e^{ik\theta} \\ &\iff \exists(k, k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, x = k\theta + k'2\pi \\ &\iff x \in (\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Ainsi $\Gamma^{-1}(I) = \theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$, et la surjectivité de Γ donne $I = \Gamma(\Gamma^{-1}(I))$ donc $I = \Gamma(\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z})$. On remarque facilement que la partie $(\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}) \subset \mathbb{R}$ est stable par somme, et contient un élément strictement positif et un élément strictement négatif. Considérons les cas où $\theta/(2\pi) \in \mathbb{Q}$ et où $\theta/(2\pi) \notin \mathbb{Q}$.

Cas 1. Supposons que $\theta/(2\pi) \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $n \in \mathbb{Z}$, et $m \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{n}{m}$. Alors on a

$$\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z} = 2\pi \left(\frac{\theta}{2\pi}\mathbb{N} + \mathbb{Z} \right) = 2\pi \left(\frac{n}{m}\mathbb{N} + \mathbb{Z} \right) = \frac{2\pi}{m}(n\mathbb{N} + m\mathbb{Z})$$

On montre maintenant que $n\mathbb{N} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. On a l'inclusion évidente $n\mathbb{N} + m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Pour l'inclusion réciproque, on prend $k \in \mathbb{Z}$. Comme $m \wedge n = 1$, $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Il existe donc $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $k = np + mq$. Mais on peut aussi écrire, pour $l \in \mathbb{Z}$,

$$k = n(p + ml) + m(q - nl).$$

Comme $m \neq 0$, on voit qu'on peut choisir $l \in \mathbb{Z}$ tel que $p + ml \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $k \in (n\mathbb{N} + m\mathbb{Z})$. On a donc $\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z} = \frac{2\pi}{m}\mathbb{Z}$, et ainsi

$$I = \Gamma(\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}) = \Gamma \left(\frac{2\pi}{m}\mathbb{Z} \right) = \left\{ \exp \left(i \frac{2k\pi}{m} \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{U}_m$$

donc I est bien l'ensemble des racines de l'unité, et la trajectoire de la particule a l'apparence de celle représentée sur la figure 2.1. Dans ce cas, la trajectoire de la bille est périodique³ de période m .

Cas 2. Supposons maintenant qu'on ait $\theta/(2\pi) \notin \mathbb{Q}$. On sait que $\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} , et ainsi $I = \Gamma(\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z})$ est donc dense dans \mathbb{U} . En effet, si l'on prend $z \in \mathbb{U}$ tel que $z = \Gamma(x)$ où $x \in \mathbb{R}$, ce qui est possible par surjectivité de Γ , et si on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ telle que $x_n \xrightarrow{n} x$, alors on a bien $\Gamma(x_n) \xrightarrow{n} \Gamma(x)$ dans I par continuité de Γ . \square

3. Nous reviendrons plus tard sur ce type de trajectoire.

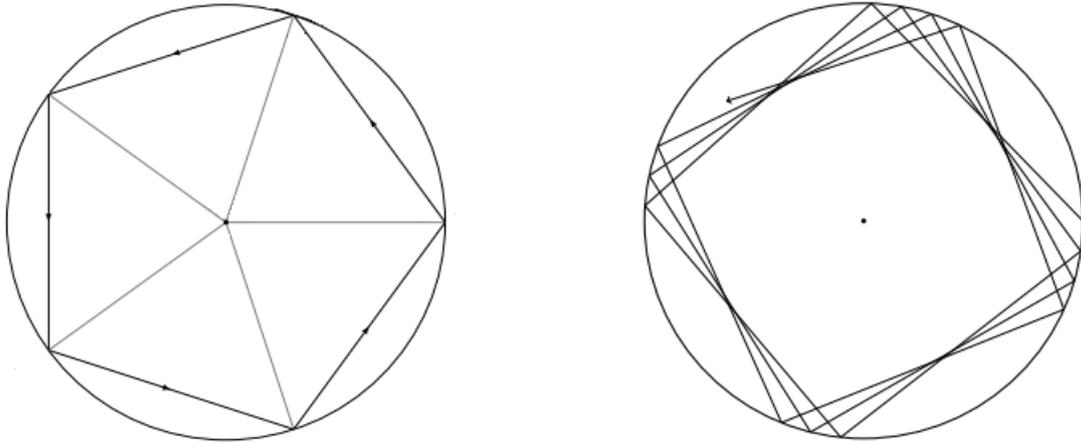


FIGURE 2.1 – Cas périodique, cas dense

REMARQUE 2.2.6 Dans le premier cas, on dit que θ est commensurable à π .

2.3 EXISTENCE DE CERCLES CAUSTIQUES

On rappelle que le point M_k est le point d'affixe x_k sur le cercle, et qu'on identifie le segment $[M_k, M_{k+1}]$ au segment de la trajectoire de la bille entre le rebond x_k et le rebond x_{k+1} .

PROPOSITION 2.3.1 *Soit (x_n) une suite de rebonds sur le bord du billard, telle que le segment $[M_0, M_1]$ ne rencontre pas l'origine. Il existe un unique cercle cercle C de centre 0 et de rayon $\rho < 1$, appelé **cercle caustique**, tel que chaque segment $[M_k, M_{k+1}]$ de la trajectoire de la boule soit tangent à C .*

Preuve. On sait que l'espace des rebonds est soit l'ensemble \mathbb{U}_n , soit dense dans \mathbb{U} . Distinguons les cas.

Cas 1. C'est le cas où il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I = \mathbb{U}_n$. Dans ce cas, on sait que l'on a la relation de récurrence $x_{k+1} = e^{i\theta} x_k$, avec $\theta/(2\pi) \in \mathbb{Q}$. Appelons α l'angle orienté $(\overrightarrow{M_k O}, \overrightarrow{M_k M_{k+1}})$. On sait par ailleurs que chaque segment $[M_k, M_{k+1}]$ a la même longueur, et on peut schématiser, dans le cas où $k = 3$, par la figure ci-dessous.

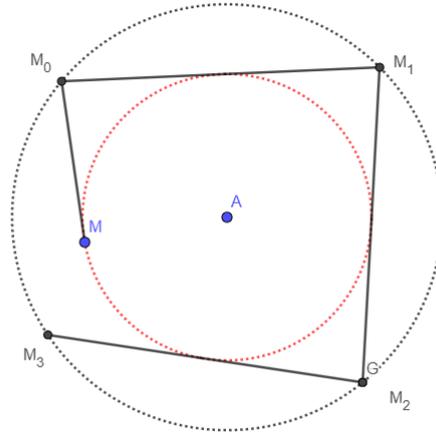


FIGURE 2.2 – Une caustique circulaire

Ainsi, on voit qu'il suffit de considérer le cercle C centré en 0 et de rayon $\rho = \sin(\alpha)$. On a alors bien $\rho < 1$, et par construction de ce cercle, chacun des segments $[M_k, M_{k+1}]$ est tangent à C , en les milieux de ces segments. L'unicité de ce cercle vient du fait que ce dernier est entièrement déterminé par la condition que chacun des segments $[M_k, M_{k+1}]$ doit être tangent au cercle, et du fait que pour une droite donnée ne passant pas par l'origine, et un point de cette droite, il existe un unique cercle tangent à la droite en ce point.

Cas 2. On est dans le cas où I est dense dans \mathbb{U} , donc $\theta/(2\pi) \notin \mathbb{Q}$. Ainsi, I est infini. Soit $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ une suite de rebonds sur les bords. La relation de récurrence $x_{k+1} = e^{i\theta}x_k$ est toujours vérifiée par les rebonds. Quelque soit $k \in \mathbb{N}$, les segments $[M_k, M_{k+1}]$ s'intersectent en des points intérieurs au disque unité, puisque la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des rebonds est formée d'une infinité de termes, car sinon on serait dans le cas d'une trajectoire périodique et donc dans le cas 1. Notons

$$C := \{x \in D(0, 1) \mid \exists k, l \in \mathbb{N}, x \in [M_k, M_{k+1}] \cap [M_l, M_{l+1}], \text{ tel que } \|x\| \text{ soit minimale}\}$$

l'ensemble des points intérieurs du disque unité qui sont des points d'intersection entre segments de la forme $[M_k, M_{k+1}]$, où M_k est le point d'affixe x_k . Alors :

- L'ensemble C est non vide, car par densité de I , il existe forcément deux segments issus de rebonds qui s'intersectent, sinon, on aurait une trajectoire périodique de la bille, et donc on serait dans le premier cas, ce qui est exclu.
- L'ensemble C est un cercle : en effet, si l'on prend $x, x' \in C$ et si on suppose que $\|x\| \neq \|x'\|$, on a alors soit $\|x\| < \|x'\|$ soit $\|x'\| < \|x\|$, mais comme ces deux normes sont minimales, ceci est impossible. Donc $\exists r, \forall x \in C, \|x\| = r$.
- L'ensemble C est contenu dans l'intérieur du disque bordé par \mathbb{U} , donc de rayon inférieur à 1. En effet, s'il était égal à \mathbb{U} tout entier, cela signifierait que chaque segment de la forme $[M_k, M_{k+1}]$ intersecte un autre de ces segments en un point qui est dans \mathbb{U} , et donc que la bille aurait un mouvement dans le billard qui consiste à être *collée* au bord. Les rebonds

ont donc lieu en temps continu ce qui contredit notre hypothèse du système réduit à temps discret.

- Par construction de C , il s'agit bien du cercle tel que n'importe quel segment $[M_k, M_{k+1}]$ soit tangent à ce cercle, puisque chaque point du cercle est un point d'intersection entre deux segments de la forme $[M_k, M_{k+1}]$ et est de norme minimale, donc de distance au centre minimale.

Ainsi, on a prouvé dans ce cas aussi l'existence de la caustique, pour une suite de rebonds fixée au préalable. □

Chapitre 3

ÉTUDE DU BILLARD ELLIPTIQUE

Après avoir étudié le modèle du billard circulaire, nous allons nous atteler à comprendre le fonctionnement d'un billard elliptique, sous les mêmes hypothèses que précédemment. Dans cette section, on modélise le billard elliptique d'un point de vue mathématique en introduisant des notations spécifiques.

Nous allons nous focaliser dans cette partie sur les trajectoires possibles de la particule dans ce type de billard, en particulier nous démontrerons le résultat suivant : selon l'angle initial de tir, la trajectoire de la particule peut être tangente à des ellipses confocales à la table, ou alors à des portions d'hyperboles.

3.1 MODÉLISATION DU BILLARD

Considérons la partie $\partial\mathbb{U}$ de \mathbb{R}^2 , où \mathbb{U} est donnée par

$$\mathbb{U} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 < 1 \right\}.$$

Il s'agit de l'ellipse centrée en 0, de grand axe 2 et de petit axe 1, on assimile par la suite le billard à cette ellipse. On notera $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$ les deux foyers de l'ellipse, dont on peut calculer les coordonnées avec la relation suivante :

$$b^2 - a^2 = c^2$$

où a et b sont respectivement les longueurs des demi grand axe et demi petit axe ; dans notre cas on obtient alors $c = \sqrt{3}$.

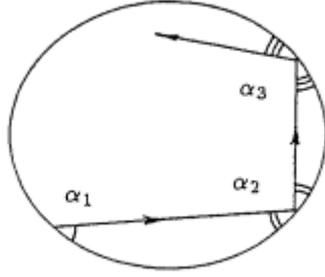


FIGURE 3.1 – Un billard elliptique

3.2 RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Nous conservons le formalisme introduit dans la partie sur le billard circulaire concernant les points du bord du billard, ainsi que les segments entre ces points faisant office de trajectoire entre les rebonds sur le bord. Nous allons voir quelques résultats importants afin de bien comprendre l'étude des caustiques qui va suivre.

LEMME 3.2.1 *Supposons que la particule soit lancée en un point M d'affixe x et rebondisse au bord en x_0 , on a alors deux cas possibles :*

- *Si $(-\sqrt{3}, 0) \in [M, M_0]$, ou $(\sqrt{3}, 0) \in [M, M_0]$ (la particule passe par l'un des foyers) alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\sqrt{3}, 0) \in [M_k, M_{k+1}]$ ou $(-\sqrt{3}, 0) \in [M_k, M_{k+1}]$ (la particule passe par un des foyers après chaque rebond).*
- *Sinon, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\sqrt{3}, 0) \notin [M_k, M_{k+1}]$ et $(-\sqrt{3}, 0) \notin [M_k, M_{k+1}]$ (si la particule ne passe pas par un des foyers après le premier rebond, elle ne passera jamais en aucun des foyers).*

Preuve.

1. On va faire une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en considérant la propriété

$$P(n) : \forall k \leq n - 1, (-\sqrt{3}, 0) \in [M_k, M_{k+1}], \text{ ou } (\sqrt{3}, 0) \in [M_k, M_{k+1}]$$

Mais avant de commencer, considérons la fonction f , qui va être utilisée par la suite.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, (-\sqrt{3}, 0)) + d(x, (\sqrt{3}, 0)) \end{aligned}$$

où d est toujours la distance euclidienne. Comme une ellipse peut être vue comme l'ensemble des points dont la somme des distances aux foyers est constante, alors le bord du billard est

la courbe de niveau de f correspondant à 1. Pour $x \in \mathbb{U}$, $x = (a, b)$:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right) = \left(\frac{2a}{f(x)}, \frac{2b}{f(x)} \right) = \left(0, \frac{2b}{f(x)} \right) + \left(\frac{2a}{f(x)}, 0 \right)$$

Démarrons la récurrence.

- Si $n = 1$, on veut montrer que $(-\sqrt{3}, 0) \in [M_0M_1]$ ou $(\sqrt{3}, 0) \in [M_0M_1]$. D'après les calculs ci-dessus, on voit donc que le gradient de f en $x_0 \in \partial\mathbb{U}$ est une somme de vecteurs dont les directions sont celles des droites respectives (F_1M_0) et (F_2M_0) où F_1 est le foyer d'affixe $(-\sqrt{3}, 0)$, x_0 est l'affixe de M_0 (point du premier rebond sur le bord). De plus, ces droites sont concourantes en M_0 , et on sait que le gradient de f en x_0 est orthogonal au bord de l'ellipse $\partial\mathbb{U}$. Ainsi on a donc que les segments $[F_1M_0]$ et $[F_2M_0]$ ont un même angle avec le bord de l'ellipse, et donc alors $(-\sqrt{3}, 0) \in [M_0M_1]$ ou $(\sqrt{3}, 0) \in [M_0M_1]$.
- Soit $n > 1$, tel que $P(n)$ soit vraie. On veut montrer que $(-\sqrt{3}, 0) \in [M_nM_{n+1}]$ ou $(\sqrt{3}, 0) \in [M_nM_{n+1}]$. On va procéder de la même manière que lors de l'initialisation. On voit que $\nabla f(x_n)$ est un vecteur issu de la somme de deux vecteurs dont les directions respectives sont données par les droites (F_1M_n) et (F_2M_n) (voir calcul du gradient ci-dessus), et est orthogonal au bord de l'ellipse. Le fait que les droites soient concourantes en M_n permet alors de conclure que les droites (F_1M_n) et (F_2M_n) ont un même angle avec le bord de l'ellipse, et donc que $(-\sqrt{3}, 0) \in [M_nM_{n+1}]$ ou $(\sqrt{3}, 0) \in [M_nM_{n+1}]$. Donc comme $P(n)$ est vraie, $P(n+1)$ aussi. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie, et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, (-\sqrt{3}, 0) \in [M_k, M_{k+1}], \text{ ou } (0, \sqrt{3}) \in [M_k, M_{k+1}]$$

2. On suppose cette fois que $\forall k \in \mathbb{N}, (\sqrt{3}, 0) \notin [M_k, M_{k+1}]$ et $(-\sqrt{3}, 0) \notin [M_k, M_{k+1}]$. On sait que le billard, en tant que système physique, est réversible. Ainsi, si la particule n'a pas traversé un foyer sur un certain segment de trajectoire $[M_k, M_{k+1}]$, alors c'est qu'elle n'a pas traversé de foyer sur le segment précédent, car sinon d'après le point 1, elle devrait traverser un foyer en le segment $[M_k, M_{k+1}]$ ce qui n'est pas supposé être le cas. Donc si la particule ne rencontre pas un foyer lors du premier jet, elle n'en rencontrera jamais.

Ce qui achève la preuve. □

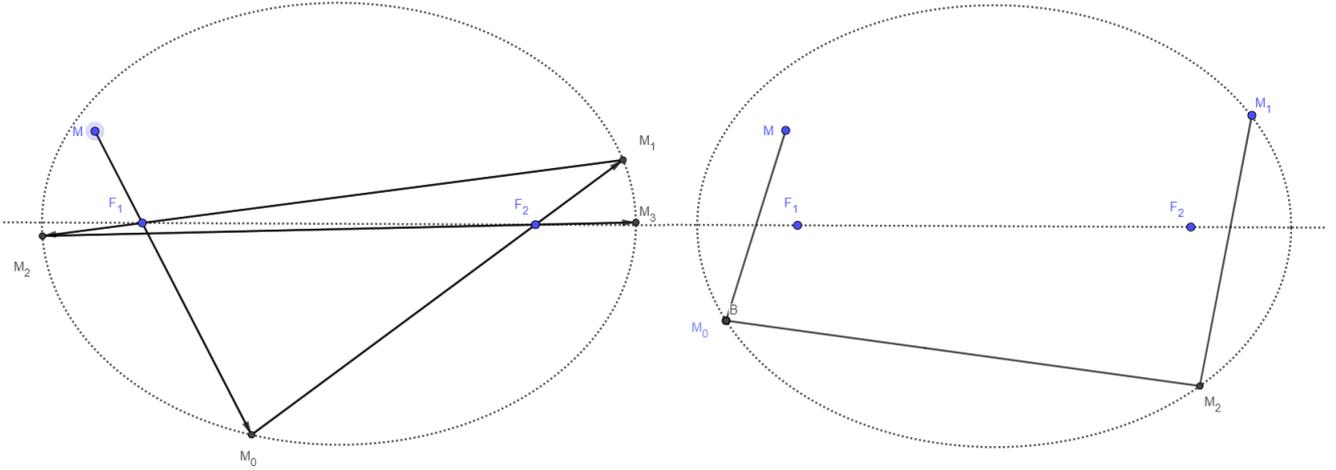


FIGURE 3.2 – Les deux cas du lemme

REMARQUE 3.2.2 En fait, on peut être plus précis, selon la parité des indices des rebonds :

- Si $(-\sqrt{3}, 0) \in [M, M_0]$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\sqrt{3}, 0) \in [M_{2k}, M_{2k+1}]$ et $(-\sqrt{3}, 0) \in [M_{2k+1}, M_{2(k+1)}]$.
- Si $(\sqrt{3}, 0) \in [M, M_0]$ alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $(-\sqrt{3}, 0) \in [M_{2k}, M_{2k+1}]$ et $(\sqrt{3}, 0) \in [M_{2k+1}, M_{2(k+1)}]$.

Nous allons maintenant voir un résultat remarquable qui nous sera, lui aussi, utile par la suite.

LEMME 3.2.3 *Supposons que la particule est lancée depuis un point d'affixe x à l'intérieur de la table, rebondit en x_0 sur le bord. On a alors deux possibilités concernant la trajectoire après le rebond suivant :*

1. *Si $[MM_0] \cap]F_1F_2[\neq \emptyset$; alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $[M_kM_{k+1}] \cap]F_1F_2[\neq \emptyset$ (si la trajectoire du premier tir intersecte le grand axe entre les deux foyers, alors après chaque rebonds la particule continue d'adopter une trajectoire qui intersecte le grand axe entre les deux foyers).*
2. *Si $[MM_0] \cap]F_1F_2[= \emptyset$; alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $[M_kM_{k+1}] \cap]F_1F_2[= \emptyset$ (si la trajectoire du premier tir intersecte le grand axe à l'extérieur du segment $]F_1F_2[$, alors après chaque rebonds la particule continue d'adopter un trajectoire qui intersecte le grand axe à l'extérieur du segment $]F_1F_2[$).*

Preuve.

1. Soit β l'angle limite de la trajectoire avec le bord de l'ellipse au delà duquel la trajectoire de la particule coupe le segment des foyers. On a alors que si α est l'angle de la trajectoire avec le bord (le rebond a lieu au point géométrique M') :

$$\alpha \geq \beta \iff [MM'] \cap]F_1F_2[\neq \emptyset$$

Et l'équivalence vient du fait que l'angle d'incidence sur le bord du billard est égal à l'angle de réflexion (résultat que nous avons démontré pour prouver le lemme précédent). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Procédons par récurrence avec la propriété

$$P(n) : \forall k \leq n - 1, [M_k M_{k+1}] \cap]F_1 F_2[\neq \emptyset$$

- Si $n = 1$, montrons que $[M_0 M_1] \cap]F_1 F_2[\neq \emptyset$. Comme $[M M_0] \cap]F_1 F_2[\neq \emptyset$ l'angle α entre $[M M_0]$ est le bord du billard vérifie $\alpha \geq \beta$. Donc l'angle entre les segments $[M_0 M_1]$ et $]F_1 F_2[$ vérifie la même inégalité puisqu'il est égal à α . Donc par l'équivalence ci-dessus, $[M_0 M_1] \cap]F_1 F_2[\neq \emptyset$.
- Soit $n > 1$ tel que $P(n)$ soit vraie. Montrons que $[M_n M_{n+1}] \cap]F_1 F_2[\neq \emptyset$. Comme on a $[M_{n-1} M_n] \cap]F_1 F_2[\neq \emptyset$ par hypothèse, l'angle α entre le bord du billard et $[M_{n-1} M_n]$ vérifie $\alpha \geq \beta$. Comme l'angle avec $\partial\mathbb{U}$ et $[M_n M_{n+1}]$ est aussi l'angle α , l'inégalité est toujours vérifiée, et donc toujours par l'équivalence ci-dessus, $[M_n M_{n+1}] \cap]F_1 F_2[\neq \emptyset$.
Donc par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie, ce qui revient à dire que

$$\forall k \in \mathbb{N}, [M_k M_{k+1}] \cap]F_1 F_2[\neq \emptyset$$

2. On va utiliser la même équivalence concernant l'angle limite, et une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, avec

$$P(n) : \forall k \leq n - 1, [M_k M_{k+1}] \cap]F_1 F_2[= \emptyset$$

- Si $n = 1$, on montre que $[M_0 M_1] \cap]F_1 F_2[= \emptyset$, c'est effectivement le cas puisque l'angle α entre le segment $[M_0 M_1]$ et le bord est égal à l'angle entre $[M M_0]$ et le bord, et celui ci vérifie $\alpha < \beta$, car on est dans le cas où $[M M_0] \cap]F_1 F_2[= \emptyset$.
- Si on prend $n > 1$ tel que $P(n)$ est vraie, alors on a que $[M_n M_{n+1}] \cap]F_1 F_2[= \emptyset$, car l'angle de ce segment avec $\partial\mathbb{U}$ est égal à l'angle α entre $\partial\mathbb{U}$ et le segment $[M_{n-1} M_n]$, qui vérifie $\alpha < \beta$ par l'équivalence déjà mentionnée, et puisque par hypothèse de récurrence, $[M_{n-1} M_n] \cap]F_1 F_2[= \emptyset$. Donc

$$[M_n M_{n+1}] \cap]F_1 F_2[= \emptyset$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ qui est vraie, et donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, [M_k M_{k+1}] \cap]F_1 F_2[= \emptyset$$

Ce qui achève la preuve. □

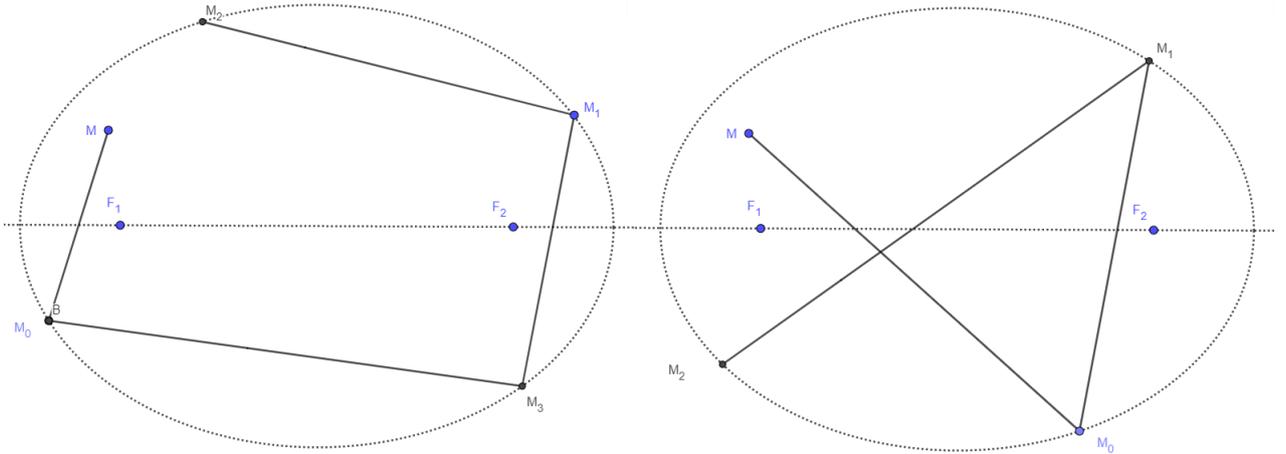


FIGURE 3.3 – Les deux cas sont représentés ici

On peut maintenant énoncer un résultat qui caractérise les caustiques dans le billard elliptique.

THÉORÈME 3.2.4 *On suppose que la particule est lancée depuis un point M d'affixe x de la table. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\partial\mathbb{U})^{\mathbb{N}}$ une suite de rebonds sur le bord de la table, telle que $\forall k \in \mathbb{N}, F_1, F_2 \notin [M_k M_{k+1}]$. Alors il existe une caustique qui est une conique confocale à l'ellipse $\partial\mathbb{U}$ telle que chaque segment de trajectoire $[M_k M_{k+1}]$ est tangent à cette conique. Plus précisément :*

- Si $[MM_0] \cap]F_1, F_2[\neq \emptyset$, la conique est une ellipse.
- Si $[MM_0] \cap]F_1, F_2[= \emptyset$, la conique est une hyperbole.

Preuve.

1. Dans le cas où $[MM_0] \cap]F_1, F_2[= \emptyset$, on sait que la particule ne rencontrera jamais le grand axe en le segment $[F_1 F_2]$ d'après la proposition précédente. Ainsi on peut arbitrairement considérer une portion de trajectoire de la particule constituée de deux segments issus des points M_{k-1}, M_k, M_{k+1} , et montrer qu'on a une caustique elliptique tangente à ces deux segments, on aura alors ceci pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc le résultat voulu.

On introduit alors les points F'_1, F'_2 qui sont respectivement les symétriques de F_1, F_2 par rapport aux segments $[M_{k-1} M_k]$ et $[M_k M_{k+1}]$. On note A, B les points d'intersection (respectivement) des segments $[M_{k-1} M_k]$ avec $[F'_1 F_2]$ et $[M_k M_{k+1}]$ avec $[F_1 F'_2]$. (voir figure ci-dessous).

Considérons l'ellipse \mathcal{E}_1 de foyers F_1, F_2 , et tangente au segment $[M_{k-1} M_k]$, et \mathcal{E}_2 , tangente à $[M_k M_{k+1}]$, possédant les mêmes foyers. Comme dans \mathcal{E}_1 , l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence sur le bord (voir preuve du lemme) on a alors

$$\widehat{F_2 A M_k} = \widehat{F_1 A M_{k-1}}$$

et par le même, argument dans \mathcal{E}_2 ,

$$\widehat{F_2 B M_{k+1}} = \widehat{F_1 B M_k}.$$

Ainsi, en considérant des vecteurs tangents (respectivement) à \mathcal{E}_1 en A et à \mathcal{E}_2 en B , les égalité ci-dessus entraînent que la direction de ces vecteurs est exactement celle des segments $[M_{k-1}M_k]$, et $[M_kM_{k+1}]$. Donc \mathcal{E}_1 est tangente à $[M_{k-1}M_k]$ en A , et \mathcal{E}_2 est tangente à $[M_kM_{k+1}]$ en B . On veut montrer que $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. Ceci revient à dire la chose suivante, en utilisant le fait que les points de l'ellipse sont ceux dont la somme des distances aux foyers est constante :

$$d(f_1, a) + d(f_2, a) = d(f_1, b) + d(f_2, b).$$

Les lettres minuscules désignent les affixes des points dans le plan euclidien, on peut simplifier un peu plus, c'est équivalent à

$$\begin{aligned} d(f_1, a) + d(f'_1, f_2) - d(f'_1, a) &= d(f_1, f'_2) - d(f'_2, b) + d(f_2, b) \\ &\iff d(f'_1, f_2) = d(f_1, f'_2) \end{aligned}$$

En effet, les points F'_1, A, F_2 sont alignés, F_1, B, F'_2 aussi, donc on peut écrire

$$\begin{aligned} d(f'_1, f_2) &= d(f'_1, a) + d(f_2, a), \\ d(f_1, f'_2) &= d(f_1, b) + d(f'_2, b), \end{aligned}$$

et par propriété de symétrie des points :

$$\begin{aligned} d(f_1, a) &= d(f'_1, a), \\ d(f_2, b) &= d(f'_2, b). \end{aligned}$$

On remplace alors dans l'expression précédente, et on obtient le résultat plus haut.

On constate de plus que les triangles $F'_1 M_k F_2$ et $F_1 M_k F'_2$ sont congruents, le deuxième étant obtenu à partir du premier par une rotation autour du sommet M_k , d'angle $\widehat{F'_1 M_k F_1}$, on peut aussi le voir avec les égalités

$$\begin{aligned} d(f'_1, x_k) &= d(f_1, x_k) \\ d(f'_2, x_k) &= d(f_2, x_k) \end{aligned}$$

qui viennent de la symétrie des points F'_1, F_1 et F'_2, F_2 . Donc les angles $\widehat{F'_1 M_k F_2}$ et $\widehat{F_1 M_k F'_2}$ sont égaux, et donc comme on a déjà que la longueur des côtés $[F'_1 M_k]$, $[F_1 M_k]$ et $[F'_2 M_k]$, $[F_2 M_k]$ est la même, alors on a bien $d(f'_1, f_2) = d(f_1, f'_2)$. Donc on a $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, et donc il y a une unique ellipse \mathcal{E} de foyers F_1, F_2 qui est tangente à tous les segments de trajectoires.

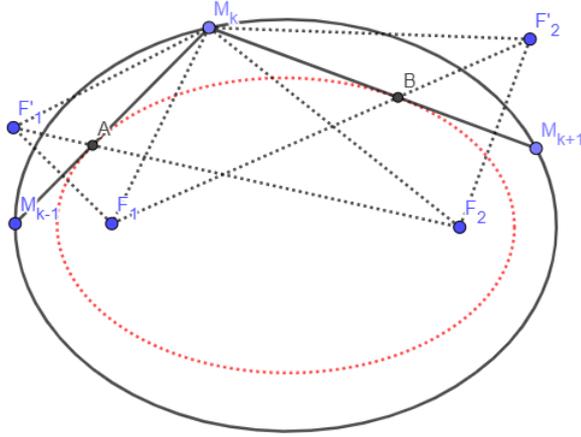


FIGURE 3.4 – Construction de la caustique elliptique

2. Dans le cas où $[MM_0] \cap]F_1, F_2[\neq \emptyset$, on est dans le deuxième cas de la proposition précédente ; la particule traversera toujours le grand axe en le segment entre les deux foyers. Comme dans le premier cas, on considère une portion de trajectoire constituée de 2 segments issus des trois points M_{k-1}, M_k, M_{k+1} , et on va montrer qu'une même hyperbole est tangente à ces deux segments de trajectoire, et ces segments ayant été pris arbitrairement, on aura alors une hyperbole tangente à tout les segments de trajectoire.

On effectue la même construction que le cas 1 ; F'_1, F'_2 sont respectivement les symétriques de F_1, F_2 par rapport aux segments $[M_{k-1}M_k]$ et $[M_kM_{k+1}]$. Par contre cette fois A, B sont obtenus comme les points d'intersections (respectivement) de la droite (F'_1F_2) avec le segment $[M_{k-1}M_k]$, et de la droite $(F_1F'_2)$ avec le segment $[M_kM_{k+1}]$, de sorte que les points A, F'_1, F_2 sont alignés, et F_1, F'_2, B aussi.

Considérons l'hyperbole \mathcal{H}_1 de foyers F_1, F_2 , et tangente au segment $[M_{k-1}M_k]$, et \mathcal{H}_2 , tangente à $[M_kM_{k+1}]$, possédant les mêmes foyers. pour montrer que \mathcal{H}_1 est tangente à $[M_{k-1}M_k]$ en A , on raisonne sur les angles comme précédemment. On remarque que

$$\widehat{F_2AM_k} = \widehat{F_1AM_k}.$$

En effet, ce résultat découle de celui du lemme déjà utilisé. Si on considère une trajectoire partant de F_1 et rebondissant en A à l'extérieur de la branche de l'hyperbole (qui est une portion d'ellipse) alors l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence sur le bord. En notant ce dernier α , on a alors, puisque les points A, F'_1, F_2 sont alignés (voir la figure en fin de preuve) :

$$\alpha = \widehat{F_2AM_k} = \widehat{F_1AM_k},$$

donc si l'on considère un vecteur tangent à l'hyperbole en A , ce dernier a exactement la même direction que le segment $[M_{k-1}M_k]$, ceci prouve donc que \mathcal{H}_1 est tangente à $[M_{k-1}M_k]$ en A . On peut utiliser les mêmes arguments afin de démontrer que $\widehat{F'_2BM_k} = \widehat{F_2BM_k}$, ce

qui conduit par le même raisonnement que pour le point A , au fait que \mathcal{H}_2 est tangente à $[M_k M_{k+1}]$ en B . On veut montrer que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, ce qui revient à dire la chose suivante :

$$d(f_2, a) - d(f_1, a) = d(f_1, b) - d(f_2, b)$$

puisque l'hyperbole est le lieu dont les points ont une différence des longueurs aux foyers constante. On peut comme avant simplifier :

$$\begin{aligned} d(f_2, a) - d(f_1, a) &= d(f_1, b) - d(f_2, b) \\ \iff d(f'_1, a) + d(f'_1, f_2) - d(f_1, a) &= d(f_1, f'_2) + d(f'_2, b) - d(f_2, b) \\ \iff d(f'_1, f_2) &= d(f_1, f'_2), \end{aligned}$$

où on utilise exactement les mêmes propriétés de symétrie et d'alignement des points qu'avant. On remarque de même que les triangles $F'_1 M_k F_1$ et $F_1 M_k F'_2$ sont congruents, pour les mêmes raisons que le premier cas, et alors les mêmes égalités que le premier cas concernant les angles et la longueurs des segments de ces triangles permettent d'aboutir au résultat

$$d(f'_1, f_2) = d(f_1, f'_2)$$

Donc on a $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, et donc il y a une unique hyperbole \mathcal{H} de foyers F_1, F_2 qui est tangente à tout les segments de trajectoires de la forme $[M_k, M_{k+1}]$, on a donc le résultat attendu.

La preuve est terminée. □

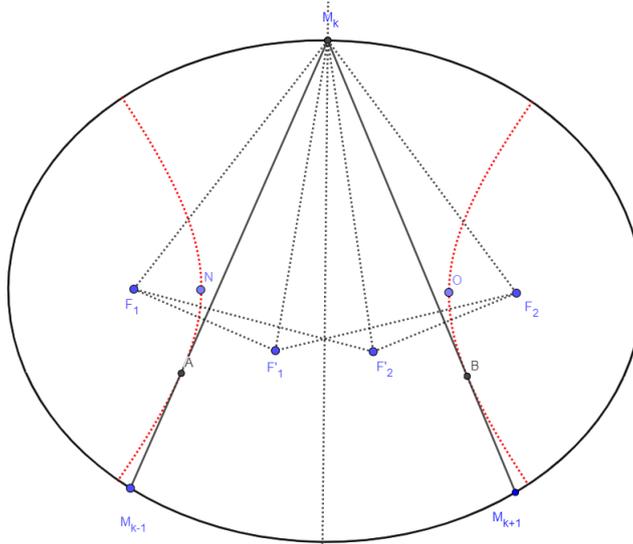


FIGURE 3.5 – Construction de la caustique hyperbolique

3.3 ÉTUDE DES TRAJECTOIRES PÉRIODIQUES

On étudie dans cette section une caractérisation des trajectoires périodiques due à Birkhoff dans le billard elliptique, mais devons au préalable développer des notions importantes par la suite.

DÉFINITION 3.3.1 On appelle *trajectoire n -périodique* la donnée d'un n -uplet (x_1, \dots, x_n) de points consécutifs de $\partial\mathbb{U}$, telle que la figure orientée obtenue en traçant les segments $[M_k, M_{k+1}]$ constitue une trajectoire périodique de la particule de point de départ x_1 et de point d'arrivée $x_{n+1} = x_1$ dans le billard.

On confondra par la suite la trajectoire (x_1, \dots, x_n) et toutes les autres issues de l'action itérée par évaluation du n -cycle $(x_1 x_2 \dots x_n)$ sur cette trajectoire.

On désire maintenant considérer l'espace des polygones à n sommets inscrits dans le billard pour $n \in \mathbb{N}$.

DÉFINITION 3.3.2 On définit l'espace des configurations cycliques $G(\partial\mathbb{U}, n)$, comme suit :

$$G(\partial\mathbb{U}, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\partial\mathbb{U})^n \mid x_{i+1} \neq x_i, \forall i = 0, \dots, n-1\}$$

DÉFINITION 3.3.3 On définit le *nombre de rotation de la trajectoire* (x_1, \dots, x_n) comme le nombre $r = \frac{m}{n}$, où m est le nombre de tours que la bille a fait autour de la table de billard en parcourant la trajectoire (x_1, \dots, x_n) .

- REMARQUE 3.3.4** — Changer l'orientation de la configuration d'une trajectoire revient à remplacer m par $n - m$, ainsi en confondant les configurations orientées et leurs opposées, on admet que $0 \leq m \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, et donc $0 \leq r \leq 1$
- On admet qu'en tant qu'espace topologique, $G(\partial\mathbb{U}, n)$ n'est pas connexe, et ses composantes connexes sont les sous-ensemble des trajectoires de rotation fixée r , et sont homéomorphes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ (où \mathbb{S}^{n-1} est la boule unité de dimension $n - 1$).
 - Pour construire le polygone associé à une trajectoire n -périodique de rotation r , on connecte dans le sens anti-trigonométrique les points consécutifs x_1 et x_{m+1} , x_{m+1} et x_{2m+1} , etc.
 - Le théorème de Birkhoff propose en fait l'existence de deux trajectoires n -périodiques distinctes dans chaque composante connexe de $G(\partial\mathbb{U}, n)$.

On prouve maintenant le résultat suivant, qui sera fort utile dans la preuve du théorème.

PROPOSITION 3.3.5 Soit $(x_1, \dots, x_n) \in G(\partial\mathbb{U}, n)$. Considérons la fonction

$$L : G(\partial\mathbb{U}, n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_1)$$

où d mesure la distance entre les points du cercle. Alors cette fonction est différentiable, et ses points critiques fournissent des trajectoires n -périodiques.

Preuve. On admet que $G(\partial\mathbb{U}, n)$ a une structure de variété ce qui légitime le fait de faire du calcul différentiel sur cet ensemble. La fonction distance euclidienne est différentiable, ainsi par somme de ces fonctions, la fonction L est bien différentiable. On sait que les trajectoires périodiques (x_1, \dots, x_n) sont caractérisées par

$$\forall i \in [[1, n]], \sin(\alpha_i) = \sin(\theta_i)$$

Où α_i et θ_i sont les angles d'incidence et de réflexion en x_i . Soit $(x_1, \dots, x_n) \in G(\partial\mathbb{U}, n)$, tel que (x_1, \dots, x_n) soit un point critique de L . On a donc

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ point critique} \implies \nabla L(x_1, \dots, x_n) = 0 \implies \forall i \in [[1, n]], \frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Soit $i \in [[1, n]]$. Calculons la quantité $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$. On note $x_i := (x_{i,1}, x_{i,2})$. En considérant L comme fonction de $2n$ variables (les coordonnées de chaque x_i), on peut alors seulement calculer la dérivée partielle de L par rapport à $x_{i,1}$, car ce dernier calcul suffit à conclure. On a donc :

$$\frac{\partial L}{\partial x_{i,1}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial d(x_{i-1}, x_{i,1})}{\partial x_{i,1}} + \frac{\partial d(x_i, x_{i+1})}{\partial x_{i,1}}$$

et ainsi

$$\frac{\partial L}{\partial x_{i,1}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_{i,1} - x_{i-1,1}}{d(x_{i-1}, x_i)} - \frac{x_{i+1,1} - x_{i,1}}{d(x_i, x_{i+1})} = \sin(\alpha_i) - \sin(\theta_i)$$

La dernière égalité étant obtenue en considérant des triangles rectangles dans l'ellipse, et en utilisant la définition du sinus comme rapport de deux longueurs.

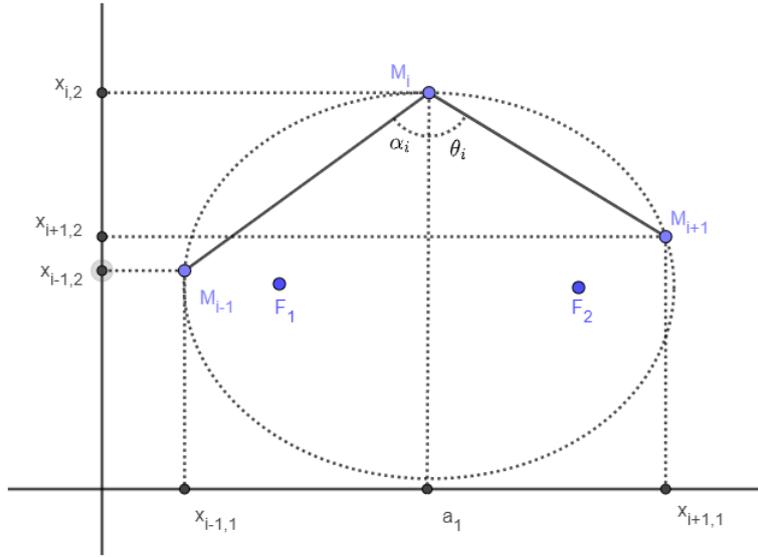


FIGURE 3.6 – Cas de la preuve

Ainsi, comme (x_1, \dots, x_n) est un point critique, alors par les implications ci-dessus et le calcul, on a bien que pour tout $i \in [[1, n]]$, $\sin(\theta_i) = \sin(\alpha_i)$, ce qui permet de conclure que (x_1, \dots, x_n) est une trajectoire n -périodique. \square

THÉORÈME 3.3.6 (BIRKHOFF) *Soit $n \geq 2$, et $r \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, premier avec n . Alors il existe deux trajectoires géométriques distinctes n -périodiques de nombre de rotation r .*

Preuve. On ne démontre ici que l'existence d'une seule des deux trajectoires n -périodiques de nombre de rotation r .

Fixons n comme voulu, $r \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, et M_r la composante connexe de $G(\partial\mathbb{U}, n)$, correspondant à r . Considérons $\overline{M_r}$ l'adhérence de M_r dans $\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$. La fonction L est différentiable, donc continue, et ainsi $L|_{\overline{M_r}}$ est aussi continue. Comme $\overline{M_r}$ est fermé dans $\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ qui est compact, $\overline{M_r}$ est aussi compact, et donc $L|_{\overline{M_r}}$ atteint son maximum dans $\overline{M_r}$:

$$\exists (y_1, \dots, y_n) \in \overline{M_r}, L(y_1, \dots, y_n) = \max_{(x_1, \dots, x_n) \in \overline{M_r}} L(x_1, \dots, x_n).$$

Ainsi, $L|_{\overline{M_r}}$ atteint son maximum sur $\overline{M_r}$ en (y_1, \dots, y_n) , qui est donc en particulier un maximum de L sur $G(\partial\mathbb{U}, n)$, donc un point critique de L . Considérons la fonction

$$\begin{aligned} \Psi : G(\partial\mathbb{U}, n) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto r_{(x_1, \dots, x_n)} \end{aligned}$$

Cette fonction associe à une configuration son nombre de rotation. Ainsi on peut écrire

$$M_r = \{(x_1, \dots, x_n) \in G(\partial\mathbb{U}, n) \mid \Psi(x_1, \dots, x_n) = r\}$$

On remarque que Ψ n'est pas continue. En effet, on peut penser à un exemple concret : dans le cas $n = 3$, une suite de trajectoires 3-périodiques formant des triangles dans l'ellipse, qui aurait tendance à l'infini à *s'aplatir* sur un segment. Dans le premier cas, le nombre de rotation vaut $\frac{1}{3}$, et vaut $\frac{1}{2}$ à la limite. Ainsi à la limite, le nombre de rotation d'une configuration peut changer, et on admet par la suite que ce changement entraîne une diminution du nombre de rebonds distincts dans la trajectoire pour les configurations dans $\partial\overline{M_r}$, soit

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \partial\overline{M_r}, \exists i \in [[1, n]], x_{i+1} = x_i$$

Ainsi, le bord de $\overline{M_r}$ contient des trajectoires n -périodiques (x_1, \dots, x_n) telles qu'il existe $i \in [[1, n]]$, et $x_{i+1} = x_i$. De plus, si $x_{i+1} = x_i$:

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_i, x_i, \dots, x_n) &= d(x_1, x_2) + \dots + d(x_i, x_i) + d(x_{i+1}, x_{i+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &= d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{i-1}, x_i) + d(x_{i+1}, x_{i+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &< \sum_{i=1}^n d(x_i, x_{i+1}) = L(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

On constate ainsi la longueur du périmètre diminue lorsqu'on diminue le nombre de sommets. Comme $L(y_1, \dots, y_n)$ est maximale, si $(y_1, \dots, y_n) \in \partial\overline{M_r}$, alors il existe $i \in [[1, n]]$ tel que $y_i = y_{i+1}$, ce qui contredit que $L(y_1, \dots, y_n)$ est maximale par les calculs précédents. On sait que les points critiques de la fonction L sont des trajectoires n -périodiques par la proposition précédente, et nous avons trouvé un de ces points critiques dans M_r . Ainsi, il existe une trajectoire n -périodique de nombre de rotation r . Donc $(y_1, \dots, y_n) \in M_r$ ce qu'on voulait. \square

REMARQUE 3.3.7 L'hypothèse de primalité sur r est cruciale, sinon on pourrait tout à fait obtenir une trajectoire n -périodique qui est un multiple d'une autre avec une plus petite période.

3.4 ÉTUDE D'UNE TRAJECTOIRE REMARQUABLE

On va s'intéresser à une trajectoire particulière dans le billard elliptique : celle qui rencontre les foyers après chaque rebonds. On a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.4.1 *Supposons que l'on lance la particule contre le bord du billard depuis un point M , M_0 le point du premier rebond sur le bord, tel que $F_1 \in [MM_0]$ ou $F_2 \in [MM_0]$. Alors si n est le nombre de rebonds sur le bord, la suite des segments de trajectoire $[M_n, M_{n+1}]$ de la particule tend vers le grand axe quand n vers $+\infty$*

Preuve. On sait déjà, par le travail qui précède, que la particule va passer par les foyers après chaque réflexion sur les bords. On va noter $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de points du bord du billard $\partial\mathbb{U}$ qui sont issus d'un segment de trajectoire passant par le foyer F_1 , et $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ celle des points du bord issus de segments de trajectoire passant par F_2 . Ainsi les segments de la trajectoire de la particule sont les segments $[A_k B_k]$, $[B_k A_{k+1}]$, $[A_{k+1} B_{k+1}]$ et ainsi de suite. On remarque que si le point M est pris en dessous du grand axe, alors la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans la portion d'ellipse en dessus du grand axe, et $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans une portion en dessous du grand axe. Si on prend M en dessus du grand axe, alors on a la configuration inverse. Pour prouver le résultat, on va montrer que les suites $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers des points sur l'ellipse.

On va d'abord montrer que les suites réelles $(d(A, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $(d(B, B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont toutes deux strictement décroissantes. Comme elles sont minorées par 0, donc elles convergeront.

Faisons le pour la suite $(d(A, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$: ceci revient à prouver que pour tout k le point A_{k+1} est plus proche du grand axe que A_k . Supposons que ça ne soit pas le cas. Supposons aussi sans perte de généralité que $F_2 \in [A_k B_k]$ (l'autre cas se traite comme ci-dessous, avec l'autre composante connexe). Comme ce domaine est convexe, alors $[A_k B_k]$ partage le domaine délimité par l'ellipse en 2 composantes connexes, C_1 contenant F_1 , C_2 contenant F_2 . Alors si on avait $d(A, A_{k+1}) > d(A, A_k)$, comme $A_{k+1} \in \partial\mathbb{U}$, alors $A_{k+1} \in C_2$ et donc $[B_k A_{k+1}] \subset C_2$ (puisque une sous partie d'un ensemble convexe l'est aussi). Comme $F_2 \in [A_k B_k]$, alors on devrait avoir $F_1 \in [B_k A_{k+1}]$, mais ceci est impossible car $F_1 \notin C_2$. Donc on a bien $d(A, A_{k+1}) \leq d(A, A_k)$.

Pour la suite $(d(B, B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ on utilise le même raisonnement ; quitte à supposer que $F_1 \in [B_k, A_k]$, sans perte de généralité encore une fois, on aurait donc en considérant les mêmes composantes connexes :

$$d(B, B_k) > d(B, B_{k+1}), B_{k+1} \in \partial\mathbb{U} \implies [A_k B_{k+1}] \subset C_1$$

mais comme $F_1 \in [B_k, A_k]$, on devrait avoir $F_2 \in [A_k, B_{k+1}]$, ce qui est impossible puisque $F_2 \notin C_1$. Donc $(d(A, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d(B, B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien décroissantes.

Considérons que le point M est au-dessus du grand axe, l'autre cas se traite exactement de la même manière. Notons l, l' les limites, de sorte que les suites $(d(A, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $(d(B, B_n))_{n \in \mathbb{N}}$

convergent respectivement vers l et l' . On sait que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad d(A, A_k) \geq 0 \text{ et } d(B, B_k) \geq 0$$

donc en passant à la limite, on a $l, l' \geq 0$.

On veut montrer que $l = l' = 0$. Supposons que ça ne soit pas le cas : $l > 0$ par exemple. Notons $A' \in \partial\mathcal{U}$ le point de l'ellipse à distance l du grand axe, situé en dessous de celui-ci. Considérons les trajectoires dites limites : celles issues des droites $(A'F_1)$ et $(A'F_2)$, (voir schéma ci-dessous) Soit $[A_k B_k]$, un segment de trajectoire se rapprochant à l'infini d'une de ces deux droites. On sait que $F_2 \in [A_k B_k]$, donc $F_1 \in [B_k A_{k+1}]$ et ceci implique alors que A_{k+1} est plus proche du grand axe que A' . Or, on a que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers A' par construction, ce qui contredit la décroissance de $(d(A, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Donc ceci est impossible.

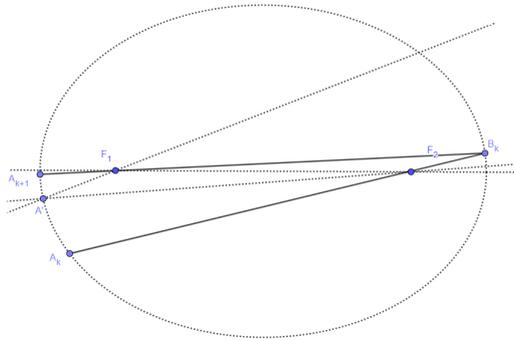


FIGURE 3.7

Ainsi, on a bien $l = 0$. On peut par un raisonnement similaire sur la suite $(d(B, B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ montrer que $l' = 0$. Ainsi, on a prouvé que dans le plan euclidien que

$$A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A, \quad B_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} B$$

Ce qui prouve bien que quand n tend vers $+\infty$, les segments $[A_n, B_n]$ tendent vers le grand axe. \square

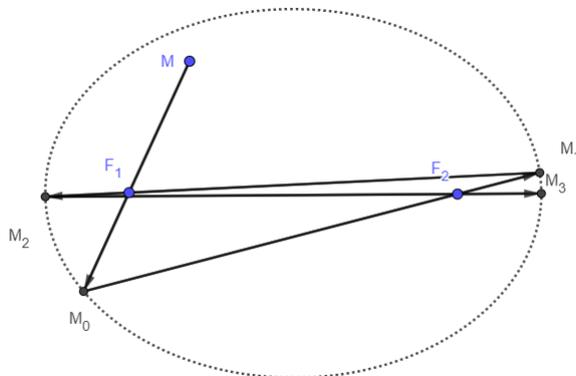


FIGURE 3.8 – Une trajectoire périodique remarquable

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Jean-Christophe Yoccoz. *Conférence : systèmes dynamiques et billards*. Institut Henri Poincaré, 2011.
- [2] Marcin Pulkowski & Pierre Montagnon. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation interne*. Ellipses, 2018.
- [3] Serge Tabachnikov. *Billiards*. Société mathématique de France, 1995.
- [4] Serge Tabachnikov. *Geometry and billiards*. Student Mathematical Library, 2005.