



TRAVAIL ENCADRÉ DE MATHÉMATIQUES

UNE INTRODUCTION À L'HOMOGÉNÉISATION DES
MATÉRIAUX COMPOSITES.

Auteur :

Sacha CARDONNA

Référent :

Michel BELLIEUD

Introduction

« Ce que j'aime dans les mathématiques appliquées, c'est qu'elles ont pour ambition de donner du monde des systèmes une représentation qui permette de comprendre et d'agir. Et, de toutes les représentations, la représentation mathématique, lorsqu'elle est possible, est celle qui est la plus souple et la meilleure. Du coup, ce qui m'intéresse, c'est de savoir jusqu'où on peut aller dans ce domaine de la modélisation des systèmes, c'est d'atteindre les limites. »

Jacques-Louis Lions, interview dans Le Monde, 1991.

Plus que jamais, les mathématiques sont un instrument irremplaçable de formation à la rigueur et au raisonnement : elles développent l'intuition, l'imagination, l'esprit critique, et elles sont aussi un langage universel. De par leurs interactions avec les autres sciences, elles jouent un rôle majeur dans la conception et l'élaboration des objets de notre vie quotidienne. Or, cet état de fait est généralement ignoré par la majorité des gens pour qui les mathématiques ont souvent perdu leur sens.

Ce mémoire, vu comme une initiation à la recherche mathématique, est concentré sur l'étude des *équations aux dérivées partielles*. Ces équations sont omniprésentes dans les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme, ou des mathématiques financières. Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des équations aux dérivées partielles.

Notre travail porte ici principalement sur l'étude de l'équation de la chaleur au sein de matériaux composites : pour en discuter rigoureusement, le lecteur pourra regarder les sections (3) à (6), là où se trouvent l'ensemble des résultats théoriques qu'on utilise en homogénéisation dans les premiers chapitres.

Les première et seconde parties traitent ainsi de problèmes d'homogénéisation concrets. La troisième partie rappelle tous les éléments indispensables d'analyse fonctionnelle nécessaire à l'étude rigoureuse de nos équations. La quatrième partie est une courte introduction à l'étude d'un problème d'évolution, tandis que la cinquième fait office de parenthèse « mécanique », pour expliquer d'où vient l'équation de la chaleur vectorielle étudiée en (1) et (2). Le dernier chapitre est dédié à l'introduction d'un nouveau type de convergence, indispensable pour les problèmes d'homogénéisation.

Je tenais à remercier expressément M. Michel BELLIEUD pour son encadrement pendant ce mémoire. Du premier rendez-vous dans son bureau jusqu'à la rédaction de la dernière ligne de ce manuscrit, son accompagnement, sa science et sa gentillesse ont été des moteurs pour moi. Il a grandement influencé mes objectifs et mes ambitions, m'a conforté dans mes choix professionnels, et à ce titre j'aimerais poursuivre dans la voie qu'il a ouverte pour moi. En espérant qu'il sera satisfait de cet humble travail.

Table des matières

1	Introduction à l'homogénéisation.	1
1.1	Mise en place du problème.	1
1.2	Algorithme de résolution.	2
1.2.1	Résultats.	2
1.2.2	Méthode.	3
1.3	Résolution détaillée.	3
1.3.1	Estimations à priori.	4
1.3.2	Résultats de convergence.	5
1.3.3	Relations d'identification.	5
1.3.4	Détermination des équations limites. Méthode de l'énergie.	7
1.3.5	Simplification des équations obtenues.	8
2	Problème du brouillard de glace.	10
2.1	Modélisation du problème.	10
2.2	Résolution détaillée.	11
2.2.1	Caractère borné de la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.	11
2.2.2	Résultats de convergence.	12
2.2.3	Inégalité sur les boules $B(0, R)$.	12
2.2.4	Convergence de \tilde{u}_ε vers u_ε .	16
2.2.5	Construction de la suite de fonctions tests $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.	16
2.2.6	Obtention des équations limites.	17
2.2.7	Réflexions sur le <i>terme étrange</i> .	18
2.2.7.1	Étude de (f_1) .	18
2.2.7.2	Étude de (f_2) .	19
2.2.8	Simplification des équations.	20
3	Éléments d'analyse fonctionnelle.	21
3.1	Topologies faible et faible-*	21
3.1.1	Quelques définitions.	21
3.1.2	Convergence faible dans un espace de Hilbert.	24
3.2	Espaces fonctionnels.	26
3.2.1	Espace de Lebesgue $L^2(\Omega)$.	26
3.2.1.1	Définitions et densité des fonctions tests.	26
3.2.1.2	Dérivation faible.	28
3.2.2	Espaces de Sobolev.	29

3.2.2.1	Espaces $W^{1,p}(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$.	30
3.2.2.2	Espace $H_0^1(\Omega)$.	31
3.2.2.3	Théorème de trace et formules de Green.	33
3.2.2.4	Espaces $H^{-1}(\Omega)$, $L^p(0, T; X)$ et $C([0, T]; X)$.	35
3.3	Théorème de Rellich-Kondrachov.	37
4	Exemple de problème d'évolution.	39
4.1	Définition du problème d'évolution.	39
4.2	Solution faible.	40
5	Notions de mécanique mathématique.	43
5.1	Prolégomène mathématique.	43
5.1.1	Quelques notations.	43
5.1.2	Opérateurs différentiels courants.	44
5.1.3	Calcul indiciel.	45
5.2	Cinématique des milieux continus.	46
5.2.1	Définitions du mouvement.	46
5.2.2	Dérivation particulaire.	47
5.3	Lois de conservation.	49
5.3.1	Masse et équation de continuité.	49
5.3.2	Quantité de mouvement.	50
5.3.3	Énergie.	52
5.3.3.1	Équation de l'énergie.	53
5.3.3.2	Obtention de l'équation de la chaleur.	54
6	Convergence double-échelle.	56
6.1	Convergence double-échelle.	56
6.1.1	Rappels et résultats préliminaires.	56
6.1.2	Définition et critères de convergence.	62
6.2	Convergence double-échelle forte.	64
6.2.1	Définition et suite de fonctions admissibles.	64
6.2.2	Théorèmes principaux.	65

Chapitre 1

Introduction à l'homogénéisation.

Cette partie sert d'introduction à l'*homogénéisation*, discipline principale de notre étude. L'homogénéisation est une discipline mathématique récente, développée à partir des années 1970, qui a pour objet l'étude des propriétés des matériaux composites. Un *matériau composite* est un assemblage d'au moins deux composants non miscibles, ayant une forte capacité de pénétration, dont les propriétés se complètent. Le nouveau matériau ainsi constitué, hétérogène, possède des propriétés que les composants seuls ne possèdent pas. Ce phénomène, qui permet d'améliorer la qualité de la matière face à une certaine utilisation, explique l'utilisation croissante des matériaux composites dans différents secteurs industriels. Néanmoins, la description fine des composites reste complexe du point de vue mécanique de par la non-homogénéité du matériau, d'où le développement de la théorie mathématique de l'homogénéisation. Cette théorie s'attache à l'étude du comportement asymptotique d'équations aux dérivées partielles dont un coefficient oscille fortement du fait de la présence d'hétérogénéités à l'échelle microscopique. L'objet de la théorie de l'homogénéisation est de proposer une équation *effective*, ou *homogénéisée*, généralement plus simple, qui décrive le comportement de la solution de l'équation considérée dans la limite où la petite échelle tend vers 0. Initialement conceptualisée pour des équations aux dérivées partielles elliptiques, la méthode d'homogénéisation par l'analyse asymptotique s'étend à divers types d'équations, stationnaires ou non, à commencer par les équations de transport décrites par une *équation de Boltzmann*, dont la diffusion constitue une approximation qui est retrouvée par cette approche. On trouve ainsi des exemples d'application dans des domaines aussi divers que la diffusion de masse ou de chaleur, la mécanique des fluides, des milieux continus ou l'électromagnétisme.

1.1 Mise en place du problème.

Dans la suite, on utilisera plusieurs fois des opérateurs différentiels particuliers, qui sont tous définis au chapitre (5).

Les scalaires et les points de l'espace sont représentés par des symboles commençant par des lettres minuscules et les vecteurs et les fonctions à valeurs vectorielles par des symboles commençant par des lettres minuscules en caractères gras. Les matrices sont représentées par des symboles commençant par des lettres majuscules en caractères gras.

On considère, pour se fixer les idées, l'équation de la chaleur¹ stationnaire dans un matériau composite, occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a_\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon)(x) = f(x) & \text{sur } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ici f est le terme *source* dans le matériau étudié, et $a_\varepsilon(x)$ le coefficient propre au matériau. On suppose que les différents constituants sont répartis périodiquement avec une période ε , c'est à dire que la fonction a_ε est périodique de période ε par rapport à chacune de ses variables. Plus précisément, on suppose que $a_\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, où a est une fonction fixée périodique de période 1 par rapport à chacune de ses variables, et suffisamment régulière, et vérifiant pour tout $y \in \mathbb{R}^3$, $0 < c_1 < a(y) < c_2$. Le problème précédent s'écrit donc

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) = f & \text{sur } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

L'objectif de la procédure est de trouver l'équation satisfaite par la limite u de la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ des solutions du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

1.2 Algorithme de résolution.

Dans la suite, on prendra $Y = [0, 1]^3$. Nous supposons que le matériau composite est plongé dans un milieu extérieur de température nulle. La température à l'équilibre du composite est donc la fonction u_ε vérifiant le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ ci-dessus, où Ω est donc l'espace occupé par le matériau. Dans notre étude nous démontrons l'existence d'une matrice de diffusivité thermique \mathbf{A}^{hom} (que nous déterminons explicitement en fonction de a) telle que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la solution u_ε de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ soit proche de la solution u du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{A}^{hom}\nabla u) = f & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_u)$$

1.2.1 Résultats.

Les coefficients de \mathbf{A}^{hom} vont s'exprimer uniquement en fonction de $a(y)$. Pour exprimer ceux-ci, il est intéressant de définir (à une constante près) trois fonctions auxiliaires dépendantes de a , qu'on note w_1, w_2 et w_3 . Ainsi la fonction w_i est solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(y)\nabla w_i(y)) = \frac{\partial a}{\partial y_i}(y) & \text{sur } Y, \\ w_i(y) \text{ est } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{w_i})$$

1. Le lecteur curieux pourra regarder l'équation de la chaleur en tant que problème d'évolution dans la section (4), ou bien comment elle est obtenue grâce à l'équation de l'énergie en (5).

où la Y -périodicité est définie en (6.1.1). En prenant $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , on a alors

$$\mathbf{A}^{hom} = \begin{pmatrix} \left(\int_Y a(y)(1 + \nabla w_1(y)) dy \right) \cdot e_1 & \left(\int_Y a(y) \nabla w_1(y) dy \right) \cdot e_2 & \left(\int_Y a(y) \nabla w_1(y) dy \right) \cdot e_3 \\ \left(\int_Y a(y) \nabla w_2(y) dy \right) \cdot e_1 & \left(\int_Y a(y)(1 + \nabla w_2(y)) dy \right) \cdot e_2 & \left(\int_Y a(y) \nabla w_2(y) dy \right) \cdot e_3 \\ \left(\int_Y a(y) \nabla w_3(y) dy \right) \cdot e_1 & \left(\int_Y a(y) \nabla w_3(y) dy \right) \cdot e_2 & \left(\int_Y a(y)(1 + \nabla w_3(y)) dy \right) \cdot e_3 \end{pmatrix}.$$

Ceci est vrai sous l'hypothèse faite précédemment qu'il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $y \in \mathbb{R}^3$, on a $c_1 < a(y) < c_2$. On va ainsi démontrer l'existence d'une fonction u vérifiant le problème (\mathcal{P}_u) et telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u(x) - u_{\varepsilon}(x)| dx = 0.$$

1.2.2 Méthode.

Pour obtenir de tels résultats, on doit effectuer un long travail qu'on peut diviser en cinq étapes. On considère u la fonction vérifiant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{A}^{hom} \nabla u) = f & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_u)$$

Étape 1 (Estimations à priori) On établit des intégrales permettant de montrer que les suites de réels

$$\left(\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}(x)|^2 dx \right)_{\varepsilon > 0} \quad \text{et} \quad \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^2 dx \right)_{\varepsilon > 0}$$

sont des suites bornées.

Étape 2 (Résultats de convergences) On déduit des estimations établies à l'étape précédente certaines convergences pour les sous-suites de la suite $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ et de la suite de ses gradients $(\nabla u_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$.

Étape 3 (Relations d'identifications) On détermine les relations existantes entre les diverses limites obtenues à l'étape précédente.

Étape 4 (Méthode de l'énergie) On applique la méthode dite *méthode de l'énergie* ou *des fonctions tests oscillantes* afin de déterminer l'équation homogénéisée satisfaite par u et les différentes fonctions apparaissant à l'étape 2.

Étape 5 (Simplification des équations) On simplifie les équations obtenues dans l'étape précédente et on obtient l'équation $-\operatorname{div}(\mathbf{A}^{hom} \nabla u) = f$, sur Ω .

1.3 Résolution détaillée.

Dans cette section, nous détaillons chaque étape présentée précédemment pour résoudre notre problème.

1.3.1 Estimations à priori.

On souhaite montrer que $(\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}(x)|^2 dx)_{\varepsilon>0}$ et $(\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^2 dx)_{\varepsilon>0}$ sont bornées. On part de l'équation

$$-\operatorname{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_{\varepsilon}\right)(x) = f(x) \quad \text{sur } \Omega$$

On fixe une fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, c'est à dire une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$. On multiplie l'équation ci-dessus par φ et on intègre par rapport à x sur Ω : on obtient ainsi

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_{\varepsilon}\right)(x)\varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx,$$

et en utilisant l'intégration par partie comme définie en (3.2.2.3), on a

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_{\varepsilon}\right)(x)\varphi(x) dx = -\int_{\partial\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_{\varepsilon}(x) \cdot n(x)\varphi(x) d\mathcal{H}^2 + \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_{\varepsilon}(x)\nabla\varphi(x) dx.$$

Or comme $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$, on a

$$\int_{\partial\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_{\varepsilon}(x) \cdot n(x)\varphi(x) d\mathcal{H}^2 = 0$$

donc

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_{\varepsilon}\right)(x)\varphi(x) dx = \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_{\varepsilon}(x)\nabla\varphi(x) dx.$$

Des équations précédentes, on a

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_{\varepsilon}(x)\nabla\varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx$$

En choisissant $\varphi = u_{\varepsilon}$, on obtient

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|\nabla u_{\varepsilon}(x)|^2 dx = \int_{\Omega} f(x)u_{\varepsilon}(x) dx,$$

or on a supposé $c_1 < a(y) < c_2$ donc

$$c_1 \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} f(x)u_{\varepsilon}(x) dx.$$

On utilise ensuite l'inégalité de Poincaré (3.2.17), et comme $u_{\varepsilon}|_{\partial\Omega} = 0$, on a donc

$$\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^2 dx.$$

Finalement, on obtient

$$\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}(x)|^2 dx \leq \frac{C}{c_1} \int_{\Omega} f(x)u_{\varepsilon}(x) dx,$$

et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\int_{\Omega} f(x)u_{\varepsilon}(x) dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit

$$\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}(x)|^2 dx \leq \frac{C}{c_1} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où, par division

$$\left(\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{c_1} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

ainsi la suite $(\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}(x)|^2 dx)_{\varepsilon>0}$ est bornée et comme

$$c_1 \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} f(x)u_{\varepsilon}(x) dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

on peut dire de même pour la suite $(\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^2 dx)_{\varepsilon>0}$.

1.3.2 Résultats de convergence.

Il s'agit ici de déduire de l'étape précédente certaines convergence pour les suites $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(\nabla u_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$.² Durant la procédure, on utilisera le *théorème de Rellich-Kondrachov*, développé en (3.3); celui-ci affirme que lorsqu'une suite de fonctions $(f_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ vérifie que les suites $(\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}(x)|^2 dx)_{\varepsilon>0}$ et $(\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^2 dx)_{\varepsilon>0}$ sont bornées, alors il existe une suite extraite de $(f_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$, qu'on note encore $(f_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$, et il existe une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, on ait

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |f(x) - f_{\varepsilon}(x)| dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla f_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \nabla f(x) \varphi(x) dx.$$

On déduit de ce résultat l'existence d'une fonction u telle que, à une suite extraite près,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u(x) - u_{\varepsilon}(x)| dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \varphi(x) dx.$$

pour tout $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Il ne reste donc qu'à déterminer les équations vérifiées par u . Malheureusement, les convergences de $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et en particulier $(\nabla u_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ ne fournissent pas d'informations suffisantes dans ce but. En effet, ∇u_{ε} est un champ fortement oscillant : il prend de grandes valeurs là où $a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ est petit et de petites valeurs là où $a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ est grand. Mais le milieu est périodique, donc on s'attend à ce que $\nabla u_{\varepsilon} \simeq \chi_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$, où χ_0 est une fonction 1-périodique : $\chi_0(x, y)$ sera alors la limite *double-échelle* de ∇u_{ε} . Nous invitons le lecteur à prendre connaissance du chapitre (6), qui traite de la *convergence double-échelle* et des résultats principaux associés à celle-ci. On y montre ainsi que si on a $(f_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ telle que la suite $(\int_{\Omega} |f_{\varepsilon}(x)|^2 dx)_{\varepsilon>0}$ soit bornée, alors elle admet une sous-suite convergente pour la convergence double-échelle. Or les suites $(\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}(x)|^2 dx)_{\varepsilon>0}$ et $(\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^2 dx)_{\varepsilon>0}$ sont bornées par la première étape. On en déduit par les résultats de la partie (6) que $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u_0(x, y)$ et $\nabla u_{\varepsilon} \rightharpoonup \chi_0(x, y)$, et on sait déjà que $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ et que $\nabla u_{\varepsilon} \rightarrow \nabla u$.

1.3.3 Relations d'identification.

On établit ici les relations existant entre u_0 et u , et entre χ_0 et ∇u . On montre ainsi que $u_0(x, y) = u(x)$, et qu'il existe une fonction $u_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y))$ telle que $\chi_0(x, y) = \nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)$.

2. En réalité ces convergences sont valables pour des suites extraites de $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(\nabla u_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$.

Identification de u_0 . Dans ce but, on fixe $\boldsymbol{\psi}$ périodique en Y et telle $\boldsymbol{\psi}(x, y) = 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$. On va intégrer par parties l'équation

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon}(x) \boldsymbol{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = - \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \mathbf{div} \boldsymbol{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx.$$

Or on a

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = (\mathbf{div}_x \boldsymbol{\psi}) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{div}_y \boldsymbol{\psi}) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right),$$

d'où l'équation

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon}(x) \boldsymbol{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = - \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) (\mathbf{div}_x \boldsymbol{\psi}) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) (\mathbf{div}_y \boldsymbol{\psi}) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \quad (i)$$

or $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} = \infty$, donc on utilise l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* pour obtenir

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon}(x) \boldsymbol{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| \boldsymbol{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \left(\int_{\Omega} \left| \sup_{\Omega \times Y} \boldsymbol{\psi} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C.$$

En répétant l'opération sur $\int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) (\mathbf{div}_x \boldsymbol{\psi}) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx$, on obtient que cette intégrale est également bornée. Ainsi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) (\mathbf{div}_y \boldsymbol{\psi}) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = 0$$

car cette intégrale est bornée. Or on a par la convergence double-échelle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) (\mathbf{div}_y \boldsymbol{\psi}) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \iint_{\Omega \times Y} u_0(x, y) (\mathbf{div}_y \boldsymbol{\psi}) (x, y) dx dy.$$

On choisit ainsi $\boldsymbol{\psi}$ telle que $\boldsymbol{\psi}|_{\partial(\Omega \times Y)} = 0$ et on obtient par intégration par parties que

$$\iint_{\Omega \times Y} \nabla_y u_0(x, y) \boldsymbol{\psi}(x, y) dx dy = 0.$$

Donc forcément $\nabla_y u_0 = 0$ et donc $u_0(x, y) = u_0(x)$. D'après la convergence double échelle de $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ vers u_0 on a pour tout $\varphi \in C^{\infty}(\bar{\Omega}; C_{\#}^{\infty}(Y))$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx dx = \iint_{\Omega \times Y} u_0(x) \varphi(x, y) dx dy.$$

Choisissant φ indépendant de y , on déduit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx dx = \iint_{\Omega \times Y} u_0(x) \varphi(x) dx dy = \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x) dx.$$

Or $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ converge vers u dans $L^2(\Omega)$. Donc on a aussi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx dx = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx.$$

Il résulte des inégalités ci-dessus et du choix arbitraire de φ que $u_0(x) = u(x)$ presque partout dans Ω .

Identification de χ_0 . On choisit ψ dans (i) telle que $\mathbf{div}_y \psi = 0$, ainsi

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon}(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = - \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) (\mathbf{div}_x \psi) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx.$$

En passant à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \times Y} \chi_0(x, y) \psi(x, y) &= - \iint_{\Omega \times Y} u_0(x, y) (\mathbf{div}_x \psi)(x, y) dx dy \\ &= - \iint_{\Omega \times Y} u(x) (\mathbf{div}_x \psi)(x, y) dx dy \\ &= \iint_{\Omega \times Y} \nabla u(x) \psi(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

d'où

$$\iint_{\Omega \times Y} (\chi_0(x, y) - \nabla u(x)) \psi(x, y) = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y)) \text{ tel que } \mathbf{div}_y \psi = 0.$$

Appliquant un théorème de Poincaré³, on déduit l'existence de $u_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y))$ tel que $\chi_0(x, y) - \nabla u(x) = \nabla_y u_1(x, y)$. On a ainsi établi la relation d'identification $\chi_0(x, y) = \nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)$.

1.3.4 Détermination des équations limites. Méthode de l'énergie.

L'étape précédente suggère que le problème limite ne dépend pas seulement de u , mais aussi de $u_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y))$ définie ci-dessus. Nous devons donc déterminer le système d'équations vérifié par le couple (u, u_1) dans $\Omega \times Y$. Pour cela, nous allons appliquer la méthode dite *de l'énergie* ou *des fonctions tests oscillantes* introduite par Luc Tartar⁴. Elle consiste à multiplier l'équation $(\mathcal{P}_{\varepsilon})$ par une fonction test ϕ_{ε} bien choisie, et à passer à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ en utilisant les convergences et les relations d'identification établies précédemment. Tout repose donc sur le choix de ϕ_{ε} . Cette suite de fonction doit avoir un comportement oscillatoire analogue à celui de u_{ε} . Or, d'après l'étape précédente,

$$\nabla u_{\varepsilon} \simeq \chi_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \nabla u(x) + \nabla_y u_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \nabla \left(u(x) + \varepsilon u_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) &= \nabla u(x) + \nabla_y u_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \nabla_x u_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \\ &\simeq \nabla u(x) + \nabla_y u_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

On s'attend donc à ce que, à une constante additive près, $u_{\varepsilon} \simeq u(x) + \varepsilon u_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right)$. Cela suggère de choisir une suite de fonctions oscillantes de la forme

$$\phi_{\varepsilon} = \varphi(x) + \varepsilon \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right),$$

3. Pour plus de détails, voir les deux derniers théorèmes de la partie (6.2.2).

4. Luc Tartar est un mathématicien français, spécialisé dans les équations aux dérivées partielles et la mécanique des milieux continus. Il est l'un des fondateurs de la théorie de l'homogénéisation.

pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\sharp}^{\infty}(Y))$. En multipliant $(\mathcal{P}_{\varepsilon})$ par ϕ_{ε} et en intégrant sur Ω , on obtient

$$- \int_{\Omega} \mathbf{div} \left(a \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_{\varepsilon} \right) \left(\varphi(x) + \varepsilon \boldsymbol{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) dx = \int_{\Omega} f(x) \left(\varphi(x) + \varepsilon \boldsymbol{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) dx.$$

On a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x) \left(\varphi(x) + \varepsilon \boldsymbol{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

Par ailleurs, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \mathbf{div} \left(a \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_{\varepsilon} \right) \left(\varphi(x) + \varepsilon \boldsymbol{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} a \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_{\varepsilon} \left(\nabla \varphi(x) + \varepsilon \nabla_x \boldsymbol{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \nabla_y \boldsymbol{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) dx. \end{aligned}$$

En utilisant la fonction $a \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) (\nabla \varphi(x) + \nabla_y \boldsymbol{\psi}(x, y))$ comme fonction test pour la convergence double-échelle de ∇u_{ε} vers $\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} a \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_{\varepsilon} \left(\nabla \varphi(x) + \varepsilon \nabla_x \boldsymbol{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \nabla_y \boldsymbol{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) dx \\ &= \iint_{\Omega \times Y} a(y) (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) (\nabla \varphi(x) + \nabla_y \boldsymbol{\psi}(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

On déduit ainsi la formulation variationnelle

$$\iint_{\Omega \times Y} a(y) (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) (\nabla \varphi(x) + \nabla_y \boldsymbol{\psi}(x, y)) dx dy = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad (ii)$$

avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\sharp}^{\infty}(Y))$, $u \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega, H_{\sharp}^1(Y))$.

1.3.5 Simplification des équations obtenues.

Choisissant $\varphi = 0$ et intégrant par parties, pour tout $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\sharp}^{\infty}(Y))$, il vient

$$- \int_{\Omega \times Y} \mathbf{div}_y \left(a(y) (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \right) \boldsymbol{\psi}(x, y) dx dy = 0.$$

En prenant $\boldsymbol{\psi}(x, y) = \boldsymbol{\psi}_1(x) \boldsymbol{\psi}_2(y)$ avec $\boldsymbol{\psi}_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\boldsymbol{\psi}_2 \in C_{\sharp}^{\infty}(Y)$,

$$\int_{\Omega} \left(\int_Y -\mathbf{div}_y \left(a(y) (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \right) \boldsymbol{\psi}_2(y) dy \right) \boldsymbol{\psi}_1(x) dx = 0,$$

De l'arbitraire sur $\boldsymbol{\psi}_1$, on déduit que, pour presque tout $x \in \Omega$, et pour tout $\boldsymbol{\psi}_2 \in C_{\sharp}^{\infty}(Y)$

$$\int_Y -\mathbf{div}_y \left(a(y) (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \right) \boldsymbol{\psi}_2(y) dy = 0,$$

puis de l'arbitraire sur $\boldsymbol{\psi}_2$ que

$$-\mathbf{div}_y \left(a(y) (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \right) = 0, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad u_1 \in H_{\sharp}^1(Y),$$

soit

$$-\mathbf{div}_y \left(a(y) \nabla_y u_1(x, y) \right) = \nabla_y a(y) \nabla u(x), \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad u_1 \in H_{\#}^1(Y),$$

soit encore

$$-\mathbf{div}_y \left(a(y) \nabla_y u_1(x, y) \right) = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial a}{\partial y_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial a}{\partial y_3}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad u_1 \in H_{\#}^1(Y).$$

Il en résulte, par linéarité, que

$$u_1(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y_1} w_1(y) + \frac{\partial u}{\partial y_2} w_2(y) + \frac{\partial u}{\partial y_3} w_3(y), \quad \text{p.p. } x, y \in \Omega \times Y,$$

où $w_i \in H_{\#}^1(Y)$ est la solution de

$$-\mathbf{div}_y \left(a(y) \nabla_y w_i(y) \right) = \frac{\partial a}{\partial y_i}.$$

Choisissons maintenant $\psi = 0$ dans (ii). Il vient

$$\iint_{\Omega \times Y} a(y) (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \nabla \varphi(x) \, dx \, dy = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx,$$

avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ et $u_1 \in L^2(\Omega, H_{\#}^1(Y))$. En substituant la valeur obtenue pour u_1 ci-dessus, on obtient

$$\iint_{\Omega \times Y} a(y) \left(\nabla u(x) + \nabla_y \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} w_1(y) + \frac{\partial u}{\partial x_2} w_2(y) + \frac{\partial u}{\partial x_3} w_3(y) \right) \right) \nabla \varphi(x) \, dx \, dy = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx,$$

soit, en appliquant le *théorème de Fubini*,

$$\int_{\Omega} \left(\nabla u(x) \left(\int_Y a(y) \, dy \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\int_Y \nabla_y w_i(y) \, dy \right) \nabla \varphi(x) \right) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx,$$

qui s'écrit encore

$$\int_{\Omega} \mathbf{A}^{hom} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx,$$

où \mathbf{A}^{hom} est définie en début de chapitre. Donc u est solution de (\mathcal{P}_u) .

Chapitre 2

Problème du brouillard de glace.

Dans ce chapitre on considère un problème de Dirichlet sur ouvert variable, en s'inspirant principalement de l'article *Un terme étrange venu d'ailleurs*, de Francois Murat et Doina Cioranescu. Le brouillard de glace se forme lorsque de la vapeur d'eau, résultant principalement des activités humaines, s'introduit dans l'atmosphère. Cette vapeur se condense en gouttelettes qui se congèlent rapidement en donnant naissance à des particules de glace sans forme cristalline bien définie. Le brouillard glacé s'observe aux latitudes élevées, habituellement par temps clair et calme, lorsque la température est très basse. L'objectif de cette section est de modéliser celui-ci sous forme de problème d'homogénéisation.

2.1 Modélisation du problème.

On donne ici les notations essentielles pour la suite du chapitre. Soit $i \in \mathbb{Z}^3$.

$$x_\varepsilon^i := \varepsilon i, \quad Y_\varepsilon^i := \varepsilon \left(\{i\} + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^3 \right), \quad I_\varepsilon := \{i \in \mathbb{Z}^3 \mid Y_\varepsilon^i \subset \Omega\},$$

$$B := B(0, 1), \quad B_{r_\varepsilon}^i := x_\varepsilon^i + r_\varepsilon B, \quad B_{r_\varepsilon} := \bigcup_{i \in I_\varepsilon} B_{r_\varepsilon}^i.$$

On étudie donc ici un environnement Ω dans lequel on a placé périodiquement des boules de glace $B_{r_\varepsilon}^i$ de température $u = 0$.

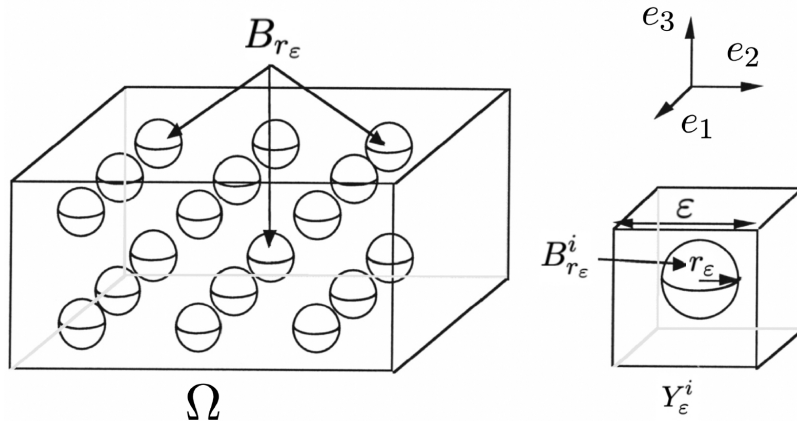


FIGURE 2.1 – Brouillard glacé schématisé.

L'objectif de cette section est d'étudier le problème

$$\begin{cases} -\mathbf{div}(a\nabla u_\varepsilon)(x) = f(x) & \text{sur } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } B_{r_\varepsilon}, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{B_{r_\varepsilon}})$$

Plus précisément, on cherchera à démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.1.1 *La suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ des solutions de $(\mathcal{P}_{B_{r_\varepsilon}})$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers l'unique solution u de*

$$\begin{cases} -\mathbf{div}(a\nabla u)(x) + 4\pi\gamma u(x) = f(x) & \text{sur } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (\mathcal{P}^{\text{hom}})$$

où $\gamma := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3}$ et $f \in L^2(\Omega)$ fixée.

2.2 Résolution détaillée.

On procède similairement à précédemment, en s'inspirant l'algorithme de résolution introduit en (1.2).

2.2.1 Caractère borné de la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.

Dans cette section on démontre que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On considère l'équation

$$-\mathbf{div}(a\nabla u_\varepsilon)(x) = f(x),$$

qui, après multiplication par u_ε des deux côtés, et par intégration par parties sur Ω , donne

$$\int_{\Omega} a|\nabla u_\varepsilon(x)|^2 dx = \int_{\Omega} f(x)u_\varepsilon(x) dx.$$

Or, en appliquant les inégalités de *Poincaré* et de *Cauchy-Schwarz*, on obtient

$$\int_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2 dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 dx = \frac{c}{a} \int_{\Omega} f(x)u_\varepsilon(x) dx \leq C_1 \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui implique donc que

$$\int_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2 dx \leq C_2 \left(\int_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

donc $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2$. De plus, on a

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 dx \leq C_2 \left(\int_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2^2$$

ce qui montre bien que les suites $(\int_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2 dx)_{\varepsilon>0}$ et $(\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 dx)_{\varepsilon>0}$ sont bornées.

2.2.2 Résultats de convergence.

Ici on souhaite montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u$ dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$. La première convergence faible provient de l'étape 1 et de (3.1.15). La seconde est une conséquence de la première et du théorème de *Rellich-Kondrachov* rappelé en (3.3), plus particulièrement de l'injection compacte $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Pour la troisième convergence, on sait par l'étape précédente que ∇u_ε est bornée dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$: ainsi par (3.1.15), on en déduit que $\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{g}$ dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Prenons alors $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^3)$. On a

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon(x) \varphi(x) \, dx = - \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \operatorname{div} \varphi(x) \, dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \varphi(x) \, dx,$$

et de plus

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon(x) \varphi(x) \, dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \mathbf{g}(x) \varphi(x) \, dx,$$

donc on a

$$\int_{\Omega} \mathbf{g}(x) \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \varphi(x) \, dx$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^3)$, donc $\mathbf{g} = \nabla u$.

2.2.3 Inégalité sur les boules $B(0, R)$.

Cette section est consacrée à la preuve d'une inégalité importante. Avant cela, on donne une inégalité nécessaire à sa démonstration.

Proposition 2.2.1 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger) *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H^1(B_1)$, on ait*

$$\int_{B_1} \left| u(x) - \int_{B_1} u \, d\mathcal{H}^2 \right|^2 \, dx \leq C \int_{B_1} |\nabla u(x)|^2 \, dx$$

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$\int_{B_1} \left| u_n(x) - \int_{B_1} u_n \, d\mathcal{H}^2 \right|^2 \, dx \geq n \int_{B_1} |\nabla u_n(x)|^2 \, dx.$$

Posons

$$v_n := u_n - \int_{B_1} u_n \, d\mathcal{H}^2,$$

alors $\nabla v_n = \nabla u_n$,

$$\int_{B_1} v_n \, d\mathcal{H}^2 = 0.$$

et

$$\int_{B_1} |v_n(x)|^2 \, dx \geq n \int_{B_1} |\nabla v_n(x)|^2 \, dx.$$

On pose maintenant

$$w_n := \frac{v_n}{\|v_n\|_{L^2(B_1)}}$$

alors $\nabla w_n = \frac{\nabla v_n}{\|v_n\|_{L^2(B_1)}}$,

$$\int_{B_1} w_n \, d\mathcal{H}^2 = 0.$$

et

$$\int_{B_1} |w_n(x)|^2 \, dx \geq n \int_{B_1} |\nabla w_n(x)|^2 \, dx.$$

Or $\|w_n\|_{L^2(B_1)} = 1$ et $\|\nabla w_n\|_{L^2(B_1)} \leq \frac{\|w_n\|_{L^2(B_1)}}{\sqrt{n}}$. Ainsi,

$$\|w_n\|_{H^1(B_1)} \leq C (\|w_n\|_{L^2(B_1)} + \|\nabla w_n\|_{L^2(B_1)}) \leq C,$$

donc $w_n \rightharpoonup w$ faiblement dans $H^1(B_1)$. Donc d'après (3.3.4), $w_n \rightarrow w$ fortement dans $L^2(B_1)$. Or

$$\int_{B_1} |\nabla w_n(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{n} \int_{B_1} |w_n(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{n} \|w_n\|_{L^2(B_1)}^2$$

donc $\nabla w_n \rightarrow 0$ fortement dans $L^2(B_1)$. Ainsi $w_n \rightarrow w$ fortement dans $H^1(B_1)$ et $\nabla w = \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla w_n = 0$.

Or comme $\nabla w = 0$ et B_1 est connexe, on en déduit que $w = C$. De plus, $\int_{B_1} w_n = 0$, donc $\int_{B_1} w = 0$, donc, puisque w est constante, $w = 0$. Or $w_n \rightarrow w$ fortement dans $L^2(B_1)$ implique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_1} w_n \, d\mathcal{H}^2 = \int_{B_1} w \, d\mathcal{H}^2$$

car

$$\left| \int_{B_1} w_n \, d\mathcal{H}^2 - \int_{B_1} w \, d\mathcal{H}^2 \right| \leq \int_{B_1} (w_n - w) \, d\mathcal{H}^2 \leq C \int_{B_1} |w_n - w|^2 \, d\mathcal{H}^2 \int_{B_1} d\mathcal{H}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi $w_n \rightarrow w$ fortement dans $L^2(B_1)$ et $\|w_n\|_{L^2(B_1)} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\|w\|_{L^2(B_1)} = 1$ ce qui est impossible puisque $w = 0$. ■

Théorème 2.2.2 Soit $R > 0$, et $B_R := B(0, R)$. Pour tout $\alpha \in (0, R)$ et tout $u \in H^1(B_R)$, on a

$$\int_{B_R} \left| u(x) - \int_{\partial B_\alpha} u \, d\mathcal{H}^2 \right|^2 \, dx \leq \frac{CR^3}{\alpha} \int_{B_R} |\nabla u(x)|^2 \, dx.$$

Preuve. On donne ici la preuve pour les boules $B_{R=1}$, notées B en préambule. On considère α très petit devant r . En coordonnées sphériques on peut écrire

$$\int_{B_r \setminus B_\alpha} |\nabla u(x)|^2 \, dx \geq \int_{r=\alpha}^r \int_{\theta=0}^\pi \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi, \theta) \right|^2 r^2 \sin \theta \, dr d\varphi d\theta.$$

On admet ici que $\int_\alpha^r \left| \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi, \theta) \right|^2 r^2 \, dr = \frac{r\alpha}{r-\alpha} |u(r, \varphi, \theta) - u(\alpha, \varphi, \theta)|^2$, et on renvoie le lecteur à la section

(2.2.5) pour voir le calcul. On écrit ainsi

$$\begin{aligned}
 \int_{B_r \setminus B_\alpha} |\nabla u(x)|^2 dx &\geq \int_{r=\alpha}^r \int_{\theta=0}^\pi \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi, \theta) \right|^2 r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \\
 &\geq \frac{r\alpha}{r-\alpha} \int_{\theta=0}^\pi \int_{\varphi=0}^{2\pi} |u(r, \varphi, \theta) - u(\alpha, \varphi, \theta)|^2 \sin \theta d\varphi d\theta \\
 &\geq \frac{4\pi r\alpha}{r-\alpha} \left| \int_{\theta=0}^\pi \int_{\varphi=0}^{2\pi} (u(r, \varphi, \theta) - u(\alpha, \varphi, \theta)) \frac{\sin \theta}{4\pi} d\varphi d\theta \right|^2 \\
 &= \frac{4\pi r\alpha}{r-\alpha} \left| \int_{\partial B_r} u d\mathcal{H}^2 - \int_{\partial B_\alpha} u d\mathcal{H}^2 \right|^2.
 \end{aligned}$$

Or on a, par le *théorème de Fubini*,

$$\begin{aligned}
 \int_{B_1} u(x) dx &= \frac{3}{4\pi} \int_{B_1} u(x) dx = \frac{3}{4\pi} \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^\pi \int_{\varphi=0}^{2\pi} u(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \\
 &= \frac{3}{4\pi} \int_{r=0}^1 \left(\int_{\partial B_r} u d\mathcal{H}^2 \right) dr \\
 &= \frac{3}{4\pi} \int_{r=0}^1 \left(\int_{\partial B_r} u d\mathcal{H}^2 \right) 4\pi r^2 dr \\
 &= \int_{r=0}^1 \left(\int_{\partial B_r} u d\mathcal{H}^2 \right) 3r^2 dr,
 \end{aligned}$$

et puisque $\int_0^1 3r^2 dr = 1$, on a

$$\int_{\partial B_\alpha} u d\mathcal{H}^2 = \int_0^1 \left(\int_{\partial B_r} u d\mathcal{H}^2 \right) 3r^2 dr.$$

Ainsi on obtient

$$\left| \int_{B_1} u(x) dx - \int_{\partial B_\alpha} u d\mathcal{H}^2 \right|^2 \leq \left| \int_0^1 \left(\int_{\partial B_r} u d\mathcal{H}^2 - \int_{\partial B_\alpha} u d\mathcal{H}^2 \right) 3r^2 dr \right|^2.$$

Or comme $\int_0^1 3r^2 dr = 1$, $\mathbb{P}(r) = 3r^2 dr$ est une mesure de probabilité sur $[0, 1]$. On peut donc appliquer l'*inégalité de Jensen* (6.1.3) et obtenir

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^1 \left(\int_{\partial B_r} u d\mathcal{H}^2 - \int_{\partial B_\alpha} u d\mathcal{H}^2 \right) 3r^2 dr \right|^2 &\leq \int_0^1 \left| \int_{\partial B_r} u d\mathcal{H}^2 - \int_{\partial B_\alpha} u d\mathcal{H}^2 \right|^2 3r^2 dr \\
 &\leq \int_0^1 \frac{r-\alpha}{4\pi r\alpha} \left(\int_{B_r \setminus B_\alpha} |\nabla u(x)|^2 dx \right) 3r^2 dr \\
 &\leq \int_0^1 \frac{r-\alpha}{4\pi r\alpha} \left(\int_{B_1} |\nabla u(x)|^2 dx \right) 3r^2 dr \\
 &= \frac{1}{4\pi\alpha} \int_0^1 \frac{r-\alpha}{r} \left(\int_{B_1} |\nabla u(x)|^2 dx \right) 3r^2 dr,
 \end{aligned}$$

or $\frac{r-\alpha}{r} \leq 1$ lorsque $r > \alpha$, donc

$$\frac{1}{4\pi\alpha} \int_0^1 \frac{r-\alpha}{r} \left(\int_{B_1} |\nabla u(x)|^2 dx \right) 3r^2 dr \leq \frac{1}{4\pi\alpha} \int_0^1 \left(\int_{B_1} |\nabla u(x)|^2 dx \right) 3r^2 dr = \frac{C}{\alpha} \int_{B_1} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Ainsi on obtient

$$\left| \int_{B_1} u(x) dx - \int_{\partial B_\alpha} u d\mathcal{H}^2 \right|^2 \leq \frac{C}{\alpha} \int_{B_1} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

En utilisant (2.2.1), on a

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \left| u(x) - \int_{\partial B_\alpha} u d\mathcal{H}^2 \right|^2 dx &\leq C \int_{B_1} \left| u(x) - \int_{B_1} u d\mathcal{H}^2 \right|^2 dx + \int_{B_1} \left| \int_{B_1} u d\mathcal{H}^2 - \int_{\partial B_\alpha} u d\mathcal{H}^2 \right|^2 dx \\ &\leq \left(C + \frac{C}{\alpha} \right) \int_{B_1} |\nabla u(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{C}{\alpha} \int_{B_1} |\nabla u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $v : B_R \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $v(r, \varphi, \theta) = u\left(\frac{r}{R}, \varphi, \theta\right)$. On pose $p = \frac{r}{R}$. On peut ainsi écrire

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \left| v(r, \varphi, \theta) - \int_{\partial B_{R\alpha}} v(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \right|^2 r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \\ = \int_{B_R} \left| v(Rp, \varphi, \theta) - \int_{\partial B_{R\alpha}} v d\mathcal{H}^2 \right|^2 (Rp)^2 \sin \theta R dp d\varphi d\theta \\ = R^3 \int_{B_R} \left| u(r, \varphi, \theta) - \int_{\partial B_{R\alpha}} v d\mathcal{H}^2 \right|^2 p^2 \sin \theta dp d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_{R\alpha}} v d\mathcal{H}^2 &= \frac{1}{4\pi(R\alpha)^2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} v(R\alpha, \varphi, \theta) (R\alpha)^2 \sin \theta d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha^2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} u(\alpha, \varphi, \theta) \alpha^2 \sin \theta d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha^2} \int_{\partial B_\alpha} u d\mathcal{H}^2 \\ &= \int_{\partial B_{R\alpha}} u d\mathcal{H}^2. \end{aligned}$$

Finalement, on écrit

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \left| v(x) - \int_{\partial B_{R\alpha}} v d\mathcal{H}^2 \right|^2 dx &\leq CR^3 \int_{B_R} \left| u(x) - \int_{\partial B_{R\alpha}} u d\mathcal{H}^2 \right|^2 dx \\ &\leq \frac{CR^3}{\alpha} \int_{B_R} \left| u(x) - \int_{\partial B_{R\alpha}} u d\mathcal{H}^2 \right|^2 dx \\ &\leq \frac{CR^3}{\alpha} \int_{B_1} |\nabla u(x)|^2 dx \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. ■

2.2.4 Convergence de \tilde{u}_ε vers u_ε .

L'objectif de cette section est de démontrer le résultat suivant.

Proposition 2.2.3 *Soit $(R_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que $r_\varepsilon \ll R_\varepsilon \ll \varepsilon$, et soit*

$$\tilde{u}(x) := \sum_{i \in I_\varepsilon} \left(\int_{\partial B_{R_\varepsilon}^i} u(x) \, d\mathcal{H}^2 \right) \mathbf{1}_{Y_\varepsilon^i}(x).$$

Alors on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)|^2 \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| u_\varepsilon(x) - \sum_{i \in I_\varepsilon} \left(\int_{\partial B_{R_\varepsilon}^i} u(x) \, d\mathcal{H}^2 \right) \mathbf{1}_{Y_\varepsilon^i}(x) \right|^2 \, dx = 0.$$

Preuve. On écrit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)|^2 \, dx &= \int_{\Omega} \left| u_\varepsilon(x) - \sum_{i \in I_\varepsilon} \left(\int_{\partial B_{R_\varepsilon}^i} u(x) \, d\mathcal{H}^2 \right) \mathbf{1}_{Y_\varepsilon^i}(x) \right|^2 \, dx \\ &= \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{Y_\varepsilon^i} \left| u_\varepsilon(x) - \left(\int_{\partial B_{R_\varepsilon}^i} u(x) \, d\mathcal{H}^2 \right) \right|^2 \, dx \\ &\leq \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon i, \sqrt{3}\varepsilon)} \left| u_\varepsilon(x) - \left(\int_{\partial B_{R_\varepsilon}^i} u(x) \, d\mathcal{H}^2 \right) \right|^2 \, dx \\ &\leq \sum_{i \in I_\varepsilon} \frac{C\varepsilon^3}{R_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon i, \sqrt{3}\varepsilon)} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \, dx \\ &\leq \sum_{i \in I_\varepsilon} \frac{C\varepsilon^3}{R_\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \, dx, \end{aligned}$$

notamment car chaque boule $B(\varepsilon i, \sqrt{3}\varepsilon)$ touche seulement six cellules voisines de Y_ε^i . Or $\gamma \in (0, \infty)$ donc il existe $m, M > 0$ tels que $\frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon} \in (m, M)$. Or $r_\varepsilon \ll R_\varepsilon$ et $\frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon} \leq M$ donc $\frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Ainsi comme $\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \, dx$ est bornée, on a finalement

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x)|^2 \, dx \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \, dx = 0$$

ce qui conclue la preuve. ■

2.2.5 Construction de la suite de fonctions tests $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.

L'objectif est de construire une suite $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui reproduit le comportement de u_ε : elle s'annule sur les boules de glace $B_{r_\varepsilon}^i$, et elle est non-nulle « loin » de celles-ci, sur $\Omega \setminus B_{r_\varepsilon}^i$, avec $r_\varepsilon \ll R_\varepsilon \ll \varepsilon$. Fixons

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et $(R_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que $r_\varepsilon \ll R_\varepsilon \ll \varepsilon$. On considère le problème

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon = 1 \text{ dans } B_{r_\varepsilon}, \\ \theta_\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega \setminus B_{R_\varepsilon}, \\ \Delta\theta_\varepsilon = 0 \text{ dans } B_{R_\varepsilon} \setminus B_{r_\varepsilon}. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{\theta_\varepsilon})$$

Ce problème est équivalent au problème de minimisation

$$\inf_{x \in \Omega} \left\{ \int_{B_{R_\varepsilon} \setminus B_{r_\varepsilon}} |\nabla\theta(x)|^2 dx \right\}.$$

Par le théorème de *Lax-Milgram* (3.1.18), ce problème admet une unique solution, qu'on peut supposer radiale. En coordonnées sphériques on a donc $\Delta\theta_\varepsilon(r) = \frac{1}{r} \partial_r(r^2 \partial_r \theta_\varepsilon(r))$. Ainsi

$$-\Delta\theta_\varepsilon(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial r}(r) \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial r}(r) = \frac{c_1}{r^2} \Leftrightarrow \theta_\varepsilon = c_2 - \frac{c_1}{r^2}.$$

Or $\theta_\varepsilon(r_\varepsilon) = 0$ et $\theta_\varepsilon(R_\varepsilon) = 1$. On en déduit aisément

$$c_1 = -\frac{r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon}, \quad c_2 = -\frac{-r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon},$$

ainsi

$$\theta_\varepsilon(r) = \frac{r_\varepsilon R_\varepsilon - r}{r R_\varepsilon - r_\varepsilon}.$$

On pose alors $\phi_\varepsilon := \varphi(1 - \theta_\varepsilon)$.

2.2.6 Obtention des équations limites.

On multiplie ainsi l'équation initiale par ϕ_ε et on intègre par parties sur Ω pour obtenir

$$\int_{\Omega} a \nabla u_\varepsilon(x) \nabla \phi_\varepsilon(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \phi_\varepsilon(x) dx,$$

or $\phi_\varepsilon = \varphi(1 - \theta_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi$ fortement dans $L^2(\Omega)$ donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x) \phi_\varepsilon(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx.$$

De plus, $\nabla \phi_\varepsilon = \nabla(\varphi(1 - \theta_\varepsilon)) = (\nabla\varphi)(1 - \theta_\varepsilon) - \varphi \nabla\theta_\varepsilon$ donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a \nabla u_\varepsilon(x) \nabla \phi_\varepsilon(x) dx &= \int_{\Omega} a \nabla u_\varepsilon(x) ((\nabla\varphi)(1 - \theta_\varepsilon) - \varphi \nabla\theta_\varepsilon)(x) dx \\ &= \int_{\Omega} a \nabla u_\varepsilon(x) \nabla\varphi(x) (1 - \theta_\varepsilon)(x) dx - \int_{\Omega} a \varphi(x) \nabla u_\varepsilon(x) \nabla\theta_\varepsilon(x) dx. \end{aligned}$$

Or on sait que $\nabla\varphi(1 - \theta_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla\varphi$ fortement dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ et $\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u$ faiblement dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$, ainsi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} a \nabla u_\varepsilon(x) \nabla\varphi(x) (1 - \theta_\varepsilon)(x) dx = \int_{\Omega} a \nabla u(x) \nabla\varphi(x) dx.$$

2.2.7 Réflexions sur le *terme étrange.*

Il nous reste cependant le terme délicat $-\int_{\Omega} a\varphi \nabla u_{\varepsilon} \nabla \theta_{\varepsilon} dx$. Celui-ci mènera au fameux terme baptisé comme étant *étrange* et *venu d'ailleurs* par Francois Murat et Doina Cioranescu. On pose alors

$$\varphi_{\varepsilon} := \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \left(\int_{B_{r_{\varepsilon}}^i} \varphi d\mathcal{H}^2 \right) \mathbf{1}_{Y_{\varepsilon}^i},$$

telle que $\varphi_{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi$ uniformément dans Ω . On a

$$-\int_{\Omega} a\varphi(x) \nabla u_{\varepsilon}(x) \nabla \theta_{\varepsilon}(x) dx = -\int_{\Omega} a\varphi_{\varepsilon}(x) \nabla u_{\varepsilon}(x) \nabla \theta_{\varepsilon}(x) dx + \int_{\Omega} a(\varphi_{\varepsilon} - \varphi)(x) \nabla u_{\varepsilon}(x) \nabla \theta_{\varepsilon}(x) dx.$$

On va donc étudier séparément les intégrales

$$\int_{\Omega} a(\varphi_{\varepsilon} - \varphi)(x) \nabla u_{\varepsilon}(x) \nabla \theta_{\varepsilon}(x) dx, \quad (f_1)$$

$$-\int_{\Omega} a\varphi_{\varepsilon}(x) \nabla u_{\varepsilon}(x) \nabla \theta_{\varepsilon}(x) dx. \quad (f_2)$$

2.2.7.1 Étude de (f_1) .

On sait que $\theta_{\varepsilon} = 0$ dans $\Omega \setminus B_{R_{\varepsilon}}$ donc

$$\int_{\Omega} a(\varphi_{\varepsilon} - \varphi)(x) \nabla u_{\varepsilon}(x) \nabla \theta_{\varepsilon}(x) dx = \int_{B_{R_{\varepsilon}}} a(\varphi_{\varepsilon} - \varphi)(x) \nabla u_{\varepsilon}(x) \nabla \theta_{\varepsilon}(x) dx.$$

De plus, il existe $C > 0$ tel que $|\varphi_{\varepsilon} - \varphi| < R_{\varepsilon}$ dans $B_{R_{\varepsilon}}$ ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(\varphi_{\varepsilon} - \varphi)(x) \nabla u_{\varepsilon}(x) \nabla \theta_{\varepsilon}(x) dx &\leq CR_{\varepsilon} \int_{B_{R_{\varepsilon}}} |\nabla u_{\varepsilon}(x)| |\nabla \theta_{\varepsilon}(x)| dx \\ &\leq CR_{\varepsilon} \left(\int_{B_{R_{\varepsilon}}} |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_{R_{\varepsilon}}} |\nabla \theta_{\varepsilon}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

et comme $(\nabla u_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ bornée dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$, on a

$$\int_{\Omega} a(\varphi_{\varepsilon} - \varphi)(x) \nabla u_{\varepsilon}(x) \nabla \theta_{\varepsilon}(x) dx \leq CR_{\varepsilon} \left(\int_{B_{R_{\varepsilon}}} |\nabla \theta_{\varepsilon}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or $\theta_{\varepsilon}(r) = \frac{r_{\varepsilon}}{r} \frac{R_{\varepsilon} - r}{R_{\varepsilon} - r_{\varepsilon}}$ en coordonnées sphériques locales, donc

$$\frac{\partial \theta_{\varepsilon}}{\partial r}(r) = \frac{-R_{\varepsilon} r_{\varepsilon}}{R_{\varepsilon} - r_{\varepsilon}} \frac{1}{r^2}.$$

On calcule

$$\int_{B_{r_{\varepsilon}}^i} |\nabla \theta_{\varepsilon}(x)|^2 dx = \int_{r=r_{\varepsilon}}^{R_{\varepsilon}} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{R_{\varepsilon} r_{\varepsilon}}{R_{\varepsilon} - r_{\varepsilon}} \right)^2 \frac{\sin \theta}{r^2} r^2 dr d\varphi d\theta = 4\pi \frac{(R_{\varepsilon} r_{\varepsilon})^2}{R_{\varepsilon} - r_{\varepsilon}},$$

donc

$$\int_{B_{r_\varepsilon}} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 dx = \frac{4\pi C (R_\varepsilon r_\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 (R_\varepsilon - r_\varepsilon)}.$$

Finalement

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(\varphi_\varepsilon - \varphi)(x) \nabla u_\varepsilon(x) \nabla \theta_\varepsilon(x) dx &\leq C R_\varepsilon \left(\int_{B_{R_\varepsilon}} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{C R_\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} \frac{R_\varepsilon r_\varepsilon}{\sqrt{R_\varepsilon - r_\varepsilon}} \leq \frac{C r_\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} \frac{R_\varepsilon^2}{\sqrt{R_\varepsilon}} \\ &\leq C r_\varepsilon \left(\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

car on a $\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3}$ positif et fini donc $\gamma \in (c, C)$, pour $c, C > 0$.

2.2.7.2 Étude de (f_2) .

On sait que $\nabla \theta_\varepsilon = 0$ dans $\Omega \setminus (B_{R_\varepsilon} \setminus B_{r_\varepsilon})$. On calcule donc en utilisant les coordonnées radiales locales

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} a \varphi_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon(x) \nabla \theta_\varepsilon(x) dx &= - \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{B_{R_\varepsilon}^i \setminus B_{r_\varepsilon}^i} a \varphi_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon(x) \nabla \theta_\varepsilon(x) dx \\ &= - \sum_{i \in I_\varepsilon} a \left(\int_{B_{r_\varepsilon}^i} \varphi d\mathcal{H}^2 \right) \int_{r=r_\varepsilon}^{R_\varepsilon} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}(r, \varphi, \theta) \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial r}(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \\ &= - \sum_{i \in I_\varepsilon} a \left(\int_{B_{r_\varepsilon}^i} \varphi d\mathcal{H}^2 \right) \int_{r=r_\varepsilon}^{R_\varepsilon} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}(r, \varphi, \theta) \left(\frac{-R_\varepsilon r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon} \right) \sin \theta dr d\varphi d\theta \\ &= - \sum_{i \in I_\varepsilon} a \left(\int_{B_{r_\varepsilon}^i} \varphi d\mathcal{H}^2 \right) \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (u_\varepsilon(R_\varepsilon, \varphi, \theta) - u_\varepsilon(r_\varepsilon, \varphi, \theta)) \sin \theta d\varphi d\theta \right) \left(\frac{-R_\varepsilon r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon} \right) \\ &= - \sum_{i \in I_\varepsilon} a \left(\int_{B_{r_\varepsilon}^i} \varphi d\mathcal{H}^2 \right) \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} u_\varepsilon(R_\varepsilon, \varphi, \theta) \sin \theta d\varphi d\theta \right) \left(\frac{-R_\varepsilon r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Or on sait que

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R_\varepsilon^2 u_\varepsilon(R_\varepsilon, \varphi, \theta) \sin \theta d\varphi d\theta = 4\pi R_\varepsilon^2 \int_{\partial B_{R_\varepsilon}^i} u_\varepsilon(x) dx,$$

donc on peut continuer le calcul et écrire

$$\begin{aligned} & - \sum_{i \in I_\varepsilon} a \left(\int_{B_{r_\varepsilon}^i} \varphi d\mathcal{H}^2 \right) \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} u_\varepsilon(R_\varepsilon, \varphi, \theta) \sin \theta d\varphi d\theta \right) \left(\frac{-R_\varepsilon r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon} \right) \\ &= - \sum_{i \in I_\varepsilon} a \left(\int_{B_{r_\varepsilon}^i} \varphi d\mathcal{H}^2 \right) \left(\frac{-4\pi R_\varepsilon r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon} \right) \left(\int_{\partial B_{R_\varepsilon}^i} u_\varepsilon(x) dx - \int_{B_{r_\varepsilon}^i} u_\varepsilon(x) dx \right). \end{aligned}$$

On simplifie et en remarquant que $\int_{B_{r_\varepsilon}^i} u_\varepsilon(x) \, dx = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i \in I_\varepsilon} a \left(\int_{B_{r_\varepsilon}^i} \varphi \, d\mathcal{H}^2 \right) \left(\frac{-4\pi R_\varepsilon r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon} \right) \left(\int_{\partial B_{R_\varepsilon}^i} u_\varepsilon(x) \, dx - \int_{B_{r_\varepsilon}^i} u_\varepsilon(x) \, dx \right) \\
 & - \sum_{i \in I_\varepsilon} a \left(\int_{B_{r_\varepsilon}^i} \varphi \, d\mathcal{H}^2 \right) \left(\frac{-4\pi R_\varepsilon r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon} \right) \int_{\partial B_{R_\varepsilon}^i} u_\varepsilon(x) \, dx \\
 & = \sum_{i \in I_\varepsilon} a \left(\int_{B_{r_\varepsilon}^i} \varphi \, d\mathcal{H}^2 \right) \left(\frac{R_\varepsilon r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon} \right) 4\pi \tilde{u}_\varepsilon(x) \\
 & = \sum_{i \in I_\varepsilon} \frac{a}{\varepsilon^3} \int_{Y_\varepsilon^i} \left(\int_{B_{r_\varepsilon}^i} \varphi \, d\mathcal{H}^2 \right) \frac{R_\varepsilon r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon} 4\pi \tilde{u}_\varepsilon(x) \, dx \\
 & = 4\pi \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{R_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon} \int_{\Omega} a \varphi_\varepsilon(x) \tilde{u}_\varepsilon(x) \, dx \\
 & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi \gamma \int_{\Omega} a \varphi(x) u(x) \, dx,
 \end{aligned}$$

ainsi on a finalement

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\Omega} a \varphi_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon(x) \nabla \theta_\varepsilon(x) \, dx = 4\pi \gamma \int_{\Omega} a \varphi(x) u(x) \, dx.$$

2.2.8 Simplification des équations.

En récapitulant, on a donc

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} a \nabla u_\varepsilon(x) \nabla \phi_\varepsilon(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \phi_\varepsilon(x) \, dx \\
 & \Leftrightarrow \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) (1 - \theta_\varepsilon)(x) \, dx - \int_{\Omega} a \varphi(x) \nabla u_\varepsilon(x) \nabla \theta_\varepsilon(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) (1 - \theta_\varepsilon)(x) \, dx,
 \end{aligned}$$

En passant à la limite, on obtient finalement

$$\int_{\Omega} a \nabla u(x) \nabla \varphi(x) \, dx + 4\pi \gamma \int_{\Omega} a \varphi(x) u(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Donc on retrouve bien la formulation variationnelle du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a \nabla u_\varepsilon)(x) + 4\pi \gamma u(x) = f(x) & \text{sur } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (\mathcal{P}^{\text{hom}})$$

Le problème est donc résolu.

Chapitre 3

Éléments d'analyse fonctionnelle.

Pour traiter correctement les équations aux dérivées partielles, on doit fournir une base solide sur les espaces dans lesquelles elles sont définies ; ce chapitre est donc dédié à l'analyse fonctionnelle. Nous y rappellerons des résultats de topologie et d'analyse classiques mais indispensables, nous parlerons de topologie faible puis nous introduirons les espaces L^2 et les espaces de Sobolev. Nous donnerons finalement un résultat indispensable à notre étude.

3.1 Topologies faible et faible-*

L'objectif des topologies faibles est de rendre les boules fermées (faiblement) compactes en dimension infinie. Ceci est indispensable en calcul des variations, donc il est ici important d'en faire quelques rappels. Cependant, les topologies faibles ne sont pas toujours métrisables ; faisons quelques distinctions entre espaces topologiques et espaces métriques.

3.1.1 Quelques définitions.

Soit X un ensemble, et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X . Rappelons ce qu'est une topologie sur X :

Définition 3.1.1 Une **topologie** sur X est un sous-ensemble $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ tel qu'il vérifie :

1. \emptyset et X appartiennent à τ ,
2. si $U_i \in \tau$ pour tout $i \in I$, alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$,
3. si $U_i \in \tau$ pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, alors $\bigcap_{i=1}^N U_i \in \tau$.

De plus, la topologie est dite **séparée** si pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists U_x, U_y \in \tau$ tels que $x \in U_x$ et $y \in U_y$, et $U_x \cap U_y = \emptyset$.

On rappelle également la définition de la compacité.

Définition 3.1.2 Un ensemble $K \subset X$ est dit **compact** si pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ de τ telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe J partie finie de I telle que $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.

On dit qu'une topologie est d'autant plus *fine* qu'elle contient *plus d'ouverts*. Ainsi moins une topologie est fine, moins il y a d'ouverts, plus il y a de compacts. Dans les espaces métriques, les compacts sont caractérisés par deux propriétés :

1. La *pré-compacité* : un ensemble $A \subset X$ est dit pré-compact si pour tout $\varepsilon > 0$, A admet un recouvrement fini par des boules de rayon ε .
2. La *complétude* : toutes les suites de Cauchy sont convergentes.

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie (*qui est toujours fermé*), un ensemble est *complet* si et seulement s'il est *fermé*, et un ensemble est *totalelement borné* si et seulement s'il est *borné*.¹ Par suite, les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les ensembles *fermés bornés*. En revanche, dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, la boule unité fermée n'est *jamais compacte*; il s'agit du *théorème de Riesz*.

Théorème 3.1.3 (Riesz) *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Alors il y a équivalence entre :*

1. E est de dimension finie.
2. La boule unité fermée de E est compacte pour la topologie définie par sa norme (de toute suite bornée de E on peut extraire une sous-suite convergente par théorème de Bolzano-Weierstrass).

Preuve. Supposons $\mathcal{B} := \overline{B}_E(0, 1)$ compacte. Du recouvrement ouvert $\mathcal{B} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{B}} B_E(x, \frac{1}{2})$ on peut extraire le recouvrement fini $\mathcal{B} \subset \bigcup_{j=1}^N B_E(x_j, \frac{1}{2})$. Montrons que $F := \text{Vect}\{x_1, \dots, x_N\}$ coïncide avec E . Par l'absurde on suppose alors qu'il existe $x \in E \setminus F$. Comme F est fermé, il existe $y \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y\| > 0$ (fonction continue sur un compact). Alors $\frac{x-y}{d(x,F)} \in \mathcal{B}$ donc il existe $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $\|\frac{x-y}{d(x,F)} - x_j\| < \frac{1}{2}$. Ainsi $y + x_j d(x, F) \in F$ et $\|x - (y + x_j d(x, F))\| < \frac{d(x, F)}{2}$, on obtient une contradiction. ■

Donnons maintenant la définition de topologie engendrée, qui nous permettra de définir les topologies faible et faible-*

Définition 3.1.4 1. Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$. La **topologie engendrée par \mathcal{A}** est par définition la plus petite topologie sur X contenant \mathcal{A} , et on la note $\sigma(X, \mathcal{A})$.

2. Si $(Y_i, \sigma_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces topologiques, et si pour tout $i \in I$, $\varphi_i : X \rightarrow Y_i$, on appelle **topologie engendrée par $(\varphi_i)_{i \in I}$** la plus petite topologie sur X contenant $\bigcup_{i \in I} \varphi_i^{-1}(\sigma_i)$. On la note

$$\sigma(X, (\varphi_i)_{i \in I}) := \sigma(X, \mathcal{A}), \text{ où } \mathcal{A} := \bigcup_{i \in I} \varphi_i^{-1}(\sigma_i).$$

Considérons maintenant $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de *Banach*, c'est-à-dire un espace vectoriel normé et complet. Il est muni de la topologie engendrée par les boules ouvertes, que l'on appellera *topologie forte*. On va maintenant définir la *topologie faible*.

Définition 3.1.5 L'espace vectoriel $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires continues sur E est appelé **dual** de E . Pour $f \in E^*$, on note $\|f\|_{E^*} := \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E}$, et $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ est alors un espace de Banach.

La *topologie faible* $\sigma(E, E^*)$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $f \in E^*$. On caractérise la convergence d'une suite de E pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ de la manière suivante.

1. Il suffit de le vérifier pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, dont les boules sont des pavés.

Théorème 3.1.6 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de E . On dit que x_n **converge faiblement** vers $x \in E$ et on note $x_n \rightharpoonup x$ si pour tout $f \in E^*$, $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Sur E on a donc déjà deux topologies : la topologie forte et la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. Maintenant, définissons la *topologie faible-** sur E^* .

Définition 3.1.7 L'espace vectoriel $E^{**} := \mathcal{L}(E, E^*) = \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \mathbb{R}))$ est appelé **bidual** de E .

La *topologie faible-** notée $\sigma(E^*, E)$ est ainsi la topologie la moins fine sur E^* rendant continues pour tout $x \in E$ la famille d'applications linéaires $\varphi_x : f \in E^* \mapsto \varphi_x(f) = f(x)$. On peut alors associer à cette topologie l'injection canonique $j_E : E \rightarrow E^{**}$ telle que $j_E(x) := \varphi_x(f)$.²

Théorème 3.1.8 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de E^* . On dit que f_n **converge faiblement-*** vers $f \in E^*$ et on note $f_n \xrightarrow{*} f$ si pour tout $x \in E$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

L'importance de la topologie faible-* provient du fait que la boule fermée unité n'est *jamais compacte* pour la topologie forte dans un espace de dimension infinie, or pour $\sigma(E^*, E)$ on a ce théorème fondamental :

Théorème 3.1.9 (Banach-Alaoglu) Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. La boule unité fermée $\mathcal{B}_{E^*} := \{f \in E^* \mid \|f\|_{E^*} \leq 1\}$ est compacte pour la topologie faible-*.

Le cas particulier où $(E, \|\cdot\|_E)$ est séparable est intéressant car il nous permet d'obtenir un critère de convergence sur les suites bornées de E^* .

Proposition 3.1.10 (Compacité faible séquentielle dans E^*) Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé séparable. Toute suite bornée de E^* admet une sous-suite faiblement-* convergente.

Preuve. On considère $\{\alpha_p \mid p \in \mathbb{N}\}$ une partie dense de E . Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E^* . On remarque d'abord que pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite de réels $(f_n(\alpha_p))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On va utiliser le *procédé diagonal de Cantor*, qui consiste à appliquer le théorème de *Bolzano-Weierstrass* par récurrence :

- il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\varphi_0(n)}(\alpha_0))_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente,
- il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\varphi_0 \circ \varphi_1(n)}(\alpha_1))_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente,
- ...
- il existe $\varphi_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(\alpha_k))_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente,
- ...

On considère ainsi l'application strictement croissante

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \psi(n) := \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(n). \end{aligned}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on voit que la suite $(f_{\psi(n)}(\alpha_p))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Comme $\{\alpha_p \mid p \in \mathbb{N}\}$ est une partie dense de E et que $(f_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de E^* , il est facile de montrer que pour tout $x \in E$ la suite $(f_{\psi(n)}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. En posant $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\psi(n)}(x)$, on obtient que $f_{\psi(n)} \xrightarrow{*} f$. ■

On donne un dernier théorème qu'on utilisera plus tard.

2. On peut facilement montrer que cette application linéaire est isométrique.

Théorème 3.1.11 (Hahn-Banach analytique) Soit E un espace vectoriel réel, et $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et f une forme linéaire sur F telle que pour tout $x \in F$, on ait la majoration $f(x) \leq p(x)$. Alors il existe un prolongement linéaire \bar{f} de f sur E vérifiant encore $\bar{f}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

3.1.2 Convergence faible dans un espace de Hilbert.

On introduit maintenant la notion de *réflexivité*.

Définition 3.1.12 Un espace vectoriel normé est dit **réflexif** si $j_E : E \rightarrow E^{**}$ est un isomorphisme, donc $j_E(E) = E^{**}$. Si tel est le cas, E est alors un espace de Banach.

En considérant maintenant $(E, \|\cdot\|_E)$ comme un espace de Banach *réflexif*, on va obtenir l'équivalent de la proposition précédente pour les suites bornées de E . Avant, on propose deux résultats auxiliaires qui aideront pour la preuve.

Lemme 3.1.13 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach *réflexif*, et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors F muni de la norme induite par E est *réflexif*.

Preuve. Notons $i : F \rightarrow E$ le morphisme d'inclusion du sous-espace vectoriel fermé F . Soit $F^\perp \subset E^*$ l'orthogonal de F pour la dualité. Comme F est fermé on a $(F^\perp)^\perp = F$. On note $j_E : E \rightarrow E^{**}$ et $j_F : F \rightarrow F^{**}$ les applications canoniques. Considérons maintenant les applications linéaires duales :

- L'application $i^* : E^* \rightarrow F^*$ est surjective, et $\ker i^* = F^\perp$,
- l'application $i^{**} : F^{**} \rightarrow E^{**}$ est injective, et $i^{**}(F^{**}) = \{T \in E^{**} \mid T(f) = 0, \forall f \in F^\perp\}$,
- on a la relation $i^{**} \circ j_F = j_E \circ i$.

Soit $T \in F^{**}$ et $i^{**}(T) \in E^{**}$. Comme j_E est bijectif, il existe $x \in E$ tel que $i^{**}(T) = j_E(x)$. On a ainsi

$$T(i^*(f)) = f(x), \forall f \in E^*.$$

Cela implique que pour tout $f \in F^\perp$, $f(x) = 0$ et donc $x \in (F^\perp)^\perp = F$. Ainsi $T = j_F(x)$. On a ainsi montré que $j_F : F \rightarrow F^{**}$ est bijective, ce qu'on voulait. ■

Lemme 3.1.14 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach *réflexif*. Alors E est séparable si et seulement si E^* est séparable.

Preuve. Il suffit ici de montrer l'implication

$$E^* \text{ séparable} \implies E \text{ séparable}$$

car elle induit l'implication $E = (E^*)^*$ séparable $\implies E^*$ séparable.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans E^* . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $f_n(x_n) = \|f_n\|$.³ Montrons que $F := \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(x_n, n \in \mathbb{N})$ est dense dans E ; cela suffira à achever la preuve car F est dénombrable.

3. Il s'agit d'une conséquence directe de la réflexivité.

Supposons donc le contraire : $\overline{F} \neq E$. Par théorème de *Hahn-Banach*, il existe $f \in E^*$ non-nulle tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \overline{F}$. Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans E^* , il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers f . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(x_k) = 0$, on obtient ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_{\varphi(n)}\| = |f_n(x_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})| \leq \|f_n - f\|.$$

Cela implique ainsi que $\|f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{\varphi(n)}\| = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $f \in E^*$ non-nulle. ■

Proposition 3.1.15 (Compacité faible séquentielle dans E) *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé réflexif. Toute suite bornée de E admet une sous-suite faiblement convergente.*

On rappelle maintenant le *théorème de représentation de Riesz*.

Théorème 3.1.16 (Représentation de Riesz) *Soit f une forme linéaire continue sur H . Alors il existe un unique vecteur $h \in H$ tel que $f(x) = \langle x, h \rangle$, pour tout $x \in H$.*

Preuve. On procède en séparant unicité et existence.

Unicité. Soit $y_1, y_2 \in H$ tels que pour tout $x \in H$, $\langle y_1, x \rangle = \langle y_2, x \rangle = f(x)$. En prenant $x = y_1 - y_2$, on obtient $\langle y_1 - y_2, y_1 - y_2 \rangle = 0$, d'où $y_1 = y_2$.

Existence. Comme f est continue, on sait que $\ker f$ est fermé. Si $(\ker f)^\perp = \{0\}$, alors $((\ker f)^\perp)^\perp = \ker f = H$ donc $f = 0$ et on prend $y = 0$. Sinon, soit $w \in (\ker f)^\perp$ tel que $\|w\| = 1$. On a $f(w) \neq 0$ et pour $x \in H$, on a

$$x - \frac{f(x)}{f(w)}w \in \ker f, \text{ ainsi } \langle w, x - \frac{f(x)}{f(w)}w \rangle = 0.$$

D'où, pour $x \in H$,

$$f(x) = f(x)\langle w, w \rangle = f(w)\langle w, x \rangle = \langle y, x \rangle,$$

en posant $y = \overline{f(w)}w$. ■

Ce théorème possède un corollaire très utile qu'on énonce maintenant.

Corollaire 3.1.17 *Tout espace de Hilbert est réflexif.*

Ainsi, on pourra utiliser la compacité faible séquentielle dans des espaces de Hilbert ; autrement dit, pour établir une convergence faible-* d'une suite de H , nous aurons juste besoin de montrer qu'elle est bornée. Grâce au théorème de *représentation de Riesz*, on peut démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1.18 (Lax-Milgram) *Soient H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire, coercive et continue sur $H \times H$, et ℓ une forme linéaire continue sur H . Alors il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$, $a(u, v) = \ell(v)$. Si de plus a est symétrique, alors u minimise la fonctionnelle $J : v \in H \rightarrow \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$.*

3.2 Espaces fonctionnels.

Dans ce chapitre nous définissons les espaces fonctionnels qui nous sont nécessaires, en particulier les *espaces de Sobolev* qui sont les espaces naturels de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles d'équations aux dérivées partielles.

Dans la suite, Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^d , muni de la *mesure de Lebesgue*.

3.2.1 Espace de Lebesgue $L^2(\Omega)$.

Comme un espace de Sobolev se construit à partir de l'espace L^2 des fonctions de carrés sommables, on commence par donner quelques rappels à ce sujet.

3.2.1.1 Définitions et densité des fonctions tests.

Définition 3.2.1 On définit l'espace $L^2(\Omega)$ comme l'espace des **fonctions mesurables de carré sommable** sur l'ouvert Ω . On définit le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) \, dx$$

pour $f, g \in L^2(\Omega)$; muni de celui-ci, $L^2(\Omega)$ est un **espace de Hilbert**. On note

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante.

Rappelons que les fonctions mesurables dans Ω sont définies *presque partout* dans Ω : si on change les valeurs d'une fonction mesurable f sur un sous-ensemble de Ω de mesure nulle, on ne change pas la fonction.

Remarque 3.2.2 D'ailleurs, $L^2(\Omega)$ est appelé l'espace des fonctions L^2 sur Ω , bien que ses éléments soient des *classes d'équivalence* de fonctions. Ainsi, on a l'habitude de dire qu'un élément de $L^2(\Omega)$ est une fonction, bien que strictement il s'agisse d'une classe de fonctions.

Notons dans la suite $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des *fonctions lisses à support compact* dans Ω . Nous avons d'ailleurs un résultat important sur cet espace :

Théorème 3.2.3 (Densité des fonctions tests dans L^p) Soit $\Omega = \mathbb{R}^d$. L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est un sous-espace dense de $L^p(\Omega)$ pour $1 < p \leq \infty$.

Preuve. La preuve est découpée en quatre lemmes qu'on présente maintenant.

Lemme 1 Soit $f \in L^p(\Omega)$. Alors il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions $L^p(\Omega)$ à support compact qui tend vers $f \in L^p(\Omega)$.

On note $B_n = \overline{B}(0, n) \subset \Omega$ et $f_n = \mathbf{1}_{B_n} f$. Donc f_n est à support compact et $|f_n| \leq |f|$ donc $f_n \in L^p(\Omega)$. De plus, $f_n \rightarrow f$ simplement, donc $|f_n - f|^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ simplement, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n - f|^p \leq 2^p |f|^p$ donc par convergence dominée, $\int_{\Omega} |f_n - f|^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. □

Lemme 2 On définit ρ telle que

$$\rho : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(1-x)(2x-1)}\right) & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On définit alors ρ_ε comme

$$\rho_\varepsilon : x \in \Omega \mapsto \frac{\varepsilon^{-d} \rho\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)}{\int_{\Omega} \rho(|u|) \, du}.$$

On appelle cette fonction *noyau régularisant*, et elle présente des propriétés intéressantes :

- $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$
- $\text{supp}(\rho_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$
- $\int_{\Omega} \rho_\varepsilon = 1$

Lemme 3 Si $f \in L^p_c(\Omega)$ et $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ alors $(f * \phi) \in C_c^\infty(\Omega)$.

Déjà, $(f * \phi)$ est à support compact et $\text{supp}(f * \phi) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(\phi)$. De plus, $(f * \phi)$ est lisse par le théorème de dérivation sous le signe \int . En effet, pour tout $x \in \Omega$, $x \mapsto f(y)\phi(x-y)$ est C^∞ en x et ses dérivées successives sont $f(y) (d^{(k)}\phi)_{x-y}$. On montre qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que $\forall (x, y) \in \Omega \times \Omega$, $\|f(y) (d^{(k)}\phi)_{x-y}\| \leq g(y)$ or $\|f(y) (d^{(k)}\phi)_{x-y}\| \leq |f(y)| \cdot \|\phi\|_{\mathcal{C}^k} := g(y)$, et $g \in L^1(\Omega)$. \square

Lemme 4 Si $p \in [1, +\infty[$, alors $(\rho_\varepsilon * f) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$ dans $L^p(\Omega)$.

On note $f_\varepsilon := f * \rho_\varepsilon$ et on écrit

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\Omega} f(x-y)\rho_\varepsilon(y) \, dy - f(x) = \int_{\Omega} f(x-y)\rho_\varepsilon(y) \, dy - \int_{\Omega} f(x)\rho_\varepsilon(y) \, dy \\ &= \int_{\Omega} (f(x-y) - f(x)) \rho_\varepsilon(y) \, dy. \end{aligned}$$

On prend alors q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Donc, par Hölder

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x) - f(x)| &\leq \left(\int_{\Omega} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_\varepsilon(y) \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} \rho_\varepsilon(y) \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_\varepsilon(y) \, dy \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

et on a alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_\varepsilon(x) - f(x)|^p \, dx &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_\varepsilon(y) \, dy \right) \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(y) \left(\int_{\Omega} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \right) \, dy. \end{aligned}$$

On admet que la translation est une application continue dans $L^p(\Omega)$. On fixe donc $a \in \Omega$ et on regarde l'application

$$\tau_a : f \in L^p(\Omega) \mapsto f(\cdot - a) \in L^p(\Omega).$$

Alors $\lim_{a \rightarrow 0} \tau_a(f) = f$ dans $L^p(\Omega)$.

On montre maintenant que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |f_{\varepsilon} - f|^p dx = 0$. Soit $\delta > 0$. Alors d'après précédemment, il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que pour tout $y \in B(0, \varepsilon_0)$, on a

$$\int_{\Omega} |f(x - y) - f(x)|^p dx \leq \delta, \text{ donc } \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon}(y) \left(\int_{\Omega} |f(x - y) - f(x)|^p dx \right) dy \leq \delta.$$

Finalement on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |f_{\varepsilon} - f|^p dx = 0,$$

ce qu'on voulait. ■

On a démontré ce résultat pour $L^p(\mathbb{R}^d)$, avec $p \in [1, \infty[$, donc il est bien valable pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dans le cas $p = 2$. On a donc mis en évidence le fait que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C_c^{\infty}(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |(f - f_n)(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Ce résultat admet un corollaire intéressant qu'on explicite ci-dessous.

Corollaire 3.2.4 *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si pour toute fonction $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ on a*

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0,$$

alors $f(x) = 0$ presque partout sur Ω .

3.2.1.2 Dérivation faible.

La dérivation faible généralise la dérivation usuelle (qu'on appelle souvent *dérivation forte*), et est un cas particulier de la dérivation *au sens des distributions*.

Définition 3.2.5 *Soit $F \in L^2(\Omega)$. On dit que F est **dérivable au sens faible** dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $f_i \in L^2(\Omega)$, pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, telles que, pour tout $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, on a*

$$\int_{\Omega} F(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} f_i(x) \varphi(x) dx,$$

*où chaque f_i est appelée la i -ème **dérivée partielle faible de F** et est notée $f_i := \frac{\partial F}{\partial x_i}$. On a donc*

$$\int_{\Omega} F(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx.$$

Cette définition fait sens ; par le corollaire (3.2.4), les f_i sont *uniques* (si elles existent). Bien sûr, si F est dérivable au sens usuel et que ses dérivées partielles appartiennent à $L^2(\Omega)$, alors les dérivées fortes et faibles de F coïncident. Donnons maintenant un critère simple et pratique pour déterminer si une fonction est dérivable au sens faible.

Proposition 3.2.6 Soit $F \in L^2(\Omega)$. S'il existe $C > 0$ une constante telle que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, on a

$$\left| \int_{\Omega} F(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \, dx \right| \leq C \left(\int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)},$$

alors F est dérivable au sens faible.

Preuve. On définit la forme linéaire

$$\mathcal{L}(\varphi) = \int_{\Omega} F(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \, dx.$$

À priori cette forme n'est définie que pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, or via l'inégalité ci-dessus, on peut étendre \mathcal{L} par continuité à tous les $\varphi \in L^2(\Omega)$ car $\overline{C_c^\infty(\Omega)} = L^2(\Omega)$ par le théorème (3.2.3). L'inégalité prouve ainsi la continuité de \mathcal{L} sur $L^2(\Omega)$. Par le théorème (3.1.16), il existe une fonction $(-f_i) \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\mathcal{L}(\varphi) = - \int_{\Omega} f_i(x) \varphi(x) \, dx,$$

ce qui démontre que F est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$. ■

On peut généraliser la définition (3.2.5) de la dérivée faible à certains opérateurs différentiels qui ne font intervenir que certaines combinaisons de dérivées partielles. C'est par exemple le cas de la divergence d'une fonction à valeurs vectorielles, qui nous sera utile par la suite.

Définition 3.2.7 Soit $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ dont toutes les composantes appartiennent à $L^2(\Omega)$ (on notera ainsi $\gamma \in L^2(\Omega)^d$). On dit que γ admet une **divergence au sens faible** dans $L^2(\Omega)$ s'il existe $f \in L^2(\Omega)$ telle que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on ait

$$\int_{\Omega} \gamma(x) : \nabla \varphi(x) \, dx = - \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx.$$

La fonction f est appelée la **divergence faible** de γ et est notée $\mathbf{div}(\gamma)$. On a donc

$$\int_{\Omega} \gamma(x) : \nabla \varphi(x) \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{div}(\gamma)(x) \varphi(x) \, dx.$$

On a ainsi la généralisation du critère précédent :

Proposition 3.2.8 Soit $\gamma \in L^2(\Omega)^d$. S'il existe $C > 0$ une constante telle que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on ait

$$\left| \int_{\Omega} \gamma(x) : \nabla \varphi(x) \, dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)},$$

alors γ admet une divergence au sens faible.

3.2.2 Espaces de Sobolev.

En physique ou en mécanique, un espace de Sobolev est souvent appelé *espace d'énergie* dans le sens où il est constitué des *fonctions d'énergie finie* (c'est-à-dire de norme $\|f\|_{H^1(\Omega)}$ finie).

3.2.2.1 Espaces $W^{1,p}(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$.

Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 3.2.9 *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \exists g_1, \dots, g_d \in L^p(\Omega), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \right\}$$

Définition 3.2.10 *On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$ par*

$$H^1(\Omega) = \left\{ F \in L^2(\Omega) \mid \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \frac{\partial F}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

où $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible par rapport à x_i .

On donne maintenant un résultat sur la complétude de $H^1(\Omega)$.

Proposition 3.2.11 *Muni du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} (f(x)g(x) + \nabla f(x) : \nabla g(x)) \, dx,$$

et de la norme associée

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|f(x)|^2 + |\nabla f(x)|^2) \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Preuve. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Par définition de la norme de $H^1(\Omega)$, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\frac{\partial F_n}{\partial x_i})_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ sont des suites de Cauchy de $L^2(\Omega)$. Comme $L^2(\Omega)$ est complet, il existe $F \in L^2(\Omega)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$ et $f_i \in L^2(\Omega)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial F_n}{\partial x_i} = f_i$. Or par définition de la dérivation faible, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} F_n(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \, dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial F_n}{\partial x_i}(x) \varphi(x) \, dx.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\int_{\Omega} F(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = - \int_{\Omega} f_i(x) \varphi(x) \, dx,$$

ce qui prouve que F est dérivable au sens faible et que f_i est la i -ème dérivée partielle faible de F . Donc $F \in H^1(\Omega)$ et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers F dans $H^1(\Omega)$. ■

Il est très important en pratique de savoir si les fonctions régulières sont *denses* dans $H^1(\Omega)$: cela justifie en partie la notion d'espace de Sobolev, qui apparaît ainsi très simplement comme l'ensemble des fonctions régulières complété par les limites de suites de fonctions régulières dans la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$. Cela permet de donner un résultat de densité similaire à celui du théorème (3.2.3).

Théorème 3.2.12 (Densité de $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$) *Si $\Omega = \mathbb{R}^d$, ou $\Omega = \mathbb{R}_+^d$, ou encore si Ω est un ouvert borné régulier de classe \mathcal{C}^1 , alors $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

Remarque 3.2.13 L'espace $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ est constitué des fonctions lisses régulières à support compact dans le fermé $\overline{\Omega}$. En particulier, si Ω est borné, alors toutes les fonctions $C^\infty(\overline{\Omega})$ sont nécessairement à support compact, et donc on a $C^\infty(\overline{\Omega}) = C_c^\infty(\overline{\Omega})$.

3.2.2.2 Espace $H_0^1(\Omega)$.

Définissons maintenant l'espace $H_0^1(\Omega)$, un sous-espace de $H^1(\Omega)$ qui est très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de *Dirichlet*.

Définition 3.2.14 L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme *l'adhérence* de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Donnons un résultat sur la complétude de $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 3.2.15 Muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} (f(x)g(x) + \nabla f(x) : \nabla g(x)) \, dx,$$

et de la norme associée

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|f(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Preuve. Par définition, $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert, donc c'est aussi un espace de Hilbert. ■

On donne maintenant un lemme essentiel pour démontrer l'*inégalité de Poincaré*.

Lemme 3.2.16 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $f \in C^1(\overline{\Omega})$, telle que $f \equiv 0$ sur $\partial\Omega$, on ait

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 \, dx.$$

Preuve. L'hypothèse sur le caractère borné de Ω dit que pour tout $x \in \Omega$, la première composante x_1 est bornée, donc il existe $a < b$ réels tels que $-\infty < a \leq x_1 \leq b < \infty$.

Soit $f \in C^1(\overline{\Omega})$, nulle sur $\partial\Omega$. On peut l'étendre par continuité par 0 en dehors de Ω et écrire pour $x \in \Omega$

$$f(x) = \int_a^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) \, dt,$$

d'où, par Cauchy-Schwarz,

$$|f(x)|^2 \leq (x_1 - a) \int_a^{x_1} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) \right|^2 \, dt \leq (b - a) \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) \right|^2 \, dt.$$

En intégrant sur Ω on obtient alors

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 \leq (b - a) \int_{\Omega} \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) \right|^2 \, dt \, dx,$$

et en permutant les deux intégrations par rapport à t et x_1 , on a

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 \leq (b-a)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx \leq (b-a)^2 \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx,$$

ce qui achève la preuve. ■

Proposition 3.2.17 (Inégalité de Poincaré) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $f \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx.$$

Preuve. Pour les $f \in C_c^\infty(\Omega)$, on a déjà montré l'inégalité de Poincaré dans le lemme précédent. Donc par densité, le résultat reste vrai pour tout $f \in H_0^1(\Omega)$. En effet, comme $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ par définition, il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de $C_c^\infty(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{H^1(\Omega)}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|(f - f_n)(x)|^2 + |\nabla(f - f_n)(x)|^2) dx = 0.$$

En particulier, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n(x)|^2 dx = \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla f_n(x)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx.$$

Ainsi, par le lemme (3.2.16), on obtient

$$\int_{\Omega} |f_n(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla f_n(x)|^2 dx,$$

et en passant à la limite dans chacun des deux termes de l'inégalité, on a

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx.$$

ce qu'on voulait. ■

Remarque 3.2.18 Cette inégalité de Poincaré n'est pas valable pour les fonctions de $H^1(\Omega)$; en effet, les fonctions constantes non-nulles annulent $\int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx$ mais pas $\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx$. Il est donc essentiel que les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ s'annulent sur $\partial\Omega$.

Un corollaire principal de l'inégalité de Poincaré est l'obtention d'une norme plus simple dans $H_0^1(\Omega)$.

Corollaire 3.2.19 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné dans au moins une direction de l'espace. Alors la semi-norme*

$$|f|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à celle induite par celle de $H^1(\Omega)$.

Preuve. Soit $f \in H_0^1(\Omega)$. Alors déjà

$$\|f\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|f(x)|^2 + |\nabla f(x)|^2) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, par inégalité de Poincaré,

$$\|f\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (C+1) \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 \, dx = (C+1) \|f\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

ce qui prouve que $|\cdot|_{H_0^1(\Omega)}$ est équivalente à $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. ■

3.2.2.3 Théorème de trace et formules de Green.

Comme pour n'importe quelle fonction mesurable, on ne peut parler de la valeur ponctuelle d'une fonction $f \in H^1(\Omega)$ que presque partout dans Ω . Ainsi, on ne peut pas définir clairement une valeur au bord, ou *trace* de f sur $\partial\Omega$ car $\partial\Omega$ est de mesure négligeable ou nulle. Néanmoins, pour tous les problèmes aux limites, on peut définir la trace $f|_{\partial\Omega}$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. Ce résultat se nomme le théorème de trace. Avant de le rappeler, on donne une définition d'*ouvert régulier*.

Définition 3.2.20 *Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit **régulier de classe C^k** (avec $k \geq 1$ entier) s'il existe un nombre fini d'ouverts $(\omega_i)_{i \in I}$, et que pour chaque $i \in I$, il existe une application bijective ϕ_i de classe C^k telle que*

$$\phi_i : \omega_i \longrightarrow Q := \left\{ y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \mid |y'| < 1, |y_d| < 1 \right\}$$

dont l'inverse est aussi de classe C^k , et telle qu'on ait

$$\begin{aligned} \phi_i(\omega_i \cap \Omega) &= Q \cap \left\{ y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \mid y_d > 0 \right\}, \\ \phi_i(\omega_i \cap \partial\Omega) &= Q \cap \left\{ y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \mid y_d = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Théorème 3.2.21 (Trace) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 , ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^d$. On définit l'application trace par*

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\overline{\partial\Omega}) \\ f &\longmapsto \gamma_0(f) = f|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Cette application se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, qu'on note encore γ_0 . En particulier, il existe $C > 0$ telle qu'on ait

$$\|f\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|f\|_{H^1(\Omega)},$$

pour tout $f \in H^1(\Omega)$.

Preuve. On démontre le résultat pour $\Omega = \mathbb{R}_+^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d > 0\}$. Soit $f \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^d})$. On pose $x :=$

(x', x_d) , on a alors

$$|f(x', 0)|^2 = -2 \int_0^{+\infty} f(x', x_d) \frac{\partial f}{\partial x_d}(x', x_d) dx_d,$$

et, en utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$,

$$|f(x', 0)|^2 \leq \int_0^{+\infty} \left(|f(x', x_d)|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_d}(x', x_d) \right|^2 \right) dx_d.$$

On intègre en x' et on ainsi

$$\int_{\mathbb{R}_+^{d-1}} |f(x', 0)|^2 dx' \leq \int_{\mathbb{R}_+^d} \left(|f(x)|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_d}(x) \right|^2 \right) dx,$$

c'est-à-dire $\|f\|_{L^2(\partial\mathbb{R}_+^d)} \leq \|f\|_{H^1(\mathbb{R}_+^d)}$. Par le théorème (3.2.12), on obtient ce qu'on voulait. ■

Grâce à ce théorème, on peut donc parler de la valeur d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur le bord $\partial\Omega$. Il permet aussi de généraliser aux fonctions de $H^1(\Omega)$ la *formule de Green*. On rappelle d'abord celle-ci pour une fonction $C^1(\overline{\Omega})$.

Théorème 3.2.22 (Formule de Green $C^1(\overline{\Omega})$) *Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit $h \in C^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans $\overline{\Omega}$. Alors elle vérifie la formule de Green*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} h(x) n_i(x) ds,$$

où $n = (n_i)_{i \in [1, d]}$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$.

La *formule d'intégration par parties* se déduit de ce dernier en prenant $h = fg$.

Corollaire 3.2.23 (Formule d'intégration par parties) *Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Si on a des fonctions $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans $\overline{\Omega}$, elles vérifient*

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) dx + \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) n_i(x) ds,$$

où $n = (n_i)_{i \in [1, d]}$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$.

On donne maintenant la généralisation de la formule de Green.

Théorème 3.2.24 (Formule de Green $H^1(\Omega)$) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 . Si on a des fonctions $f, g \in H^1(\Omega)$, elles vérifient*

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) dx + \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) n_i(x) ds,$$

où $n = (n_i)_{i \in [1, d]}$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$.

Preuve. Par densité de $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, il existe des suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ qui convergent dans $H^1(\Omega)$ vers f et g respectivement. Par formule d'intégration par parties, on a

$$\int_{\Omega} f_n(x) \frac{\partial g_n}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} g_n(x) \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} f_n(x) g_n(x) n_i(x) ds.$$

On peut passer à la limite les termes $f_n(x)\frac{\partial g_n}{\partial x_i}(x)$ et $g_n(x)\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x)$ grâce à la convergence dans $L^2(\Omega)$. Pour passer à la limite dans la dernière intégrale, on utilise l'inégalité de continuité de l'application trace du théorème (3.2.21), qui permet d'affirmer que $\gamma_0(f_n)$ (resp. $\gamma_0(g_n)$) converge vers $\gamma_0(f)$ (resp. $\gamma_0(g)$) dans $L^2(\partial\Omega)$. On obtient ainsi

$$\int_{\Omega} f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x) dx + \int_{\partial\Omega} f(x)g(x)n_i(x) ds,$$

ce qu'on voulait. ■

Comme conséquence du théorème de trace, on obtient une caractérisation simple de $H_0^1(\Omega)$.

Corollaire 3.2.25 *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 . L'espace $H_0^1(\Omega)$ coïncide avec le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.*

3.2.2.4 Espaces $H^{-1}(\Omega)$, $L^p(0, T; X)$ et $C([0, T]; X)$.

Ces espaces sont indispensables pour étudier correctement les *équations d'évolution*. Dans cette section et dans la suite du document, on pourra adopter selon les cas la convention d'écriture $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ pour la dérivation partielle.

Définition 3.2.26 *L'espace de Sobolev $H^{-1}(\Omega)$ désigne le dual de $H_0^1(\Omega)$.*

Pour la suite, on note $(\cdot | \cdot)$ le jumelage entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. On peut alors définir une norme :

Définition 3.2.27 *Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. On a la norme*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup \left\{ (f | u) \mid u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

On donne maintenant un résultat important permettant de caractériser $H^{-1}(\Omega)$.

Théorème 3.2.28 *Supposons que $f \in H^{-1}(\Omega)$.*

1. *Il existe des fonctions f^0, f^1, \dots, f^d dans $L^2(\Omega)$ telles que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on ait*

$$(f | u) = \int_{\Omega} \left(f^0(x)v(x) + \sum_{i=1}^d f^i(x)\partial_{x_i}v(x) \right),$$

où f^i est la i -ème composante de f .

2. *De plus, on a*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf \left\{ \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^d |f^i(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \mid f \text{ vérifie 1. pour } f^0, f^1, \dots, f^d \in L^2(\Omega) \right\}.$$

3. *En particulier, on a $(v | u) = \langle v, u \rangle_{L^2(\Omega)}$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, et $v \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.*

Preuve. Notons que lorsque la condition 1. est vérifiée, on écrira $f(x) = f^0(x) - \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} f^i(x)$.

Soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$, on définit le produit scalaire $\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} (\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + u(x)v(x)) dx$. Soit $f \in$

$H^{-1}(\Omega)$. On applique le théorème de représentation de Riez (3.1.16) et on en déduit l'existence d'une unique fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\langle u, v \rangle = (f | v)$, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. On a donc

$$\int_{\Omega} (\nabla u(x) : \nabla v(x) + u(x)v(x)) \, dx = (f | v),$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, et on obtient ce qu'on voulait pour $f^0 = u$ et $f^i = \partial_{x_i} u$ pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Ensuite, supposons $f \in H^{-1}(\Omega)$, avec

$$(f | v) = \int_{\Omega} \left(g^0(x)v(x) + \sum_{i=1}^d g^i(x)\partial_{x_i}v(x) \right) \, dx,$$

pour $g^0, g^1, \dots, g^d \in L^2(\Omega)$. En considérant

$$\int_{\Omega} (\nabla u(x)\nabla v(x) + u(x)v(x)) \, dx = (f | v)$$

et en prenant $u = v$, on a

$$\int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2) \, dx = \int_{\Omega} \left(g^0(x)v(x) + \sum_{i=1}^d g^i(x)\partial_{x_i}v(x) \right) \, dx \leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d |g^i(x)|^2 \, dx.$$

Or si $f^0 = u$ et $f^i = \partial_{x_i} u$ pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, on a

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^d |f^i(x)|^2 \, dx \leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d |g^i(x)|^2 \, dx.$$

Par la définition de $(f | v)$, on a

$$|(f | v)| \leq \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^d |f^i(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

si on a $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$. Ainsi

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^d |f^i(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

or en prenant $v = \frac{u}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla u(x)\nabla v(x) + u(x)v(x)) \, dx &= \int_{\Omega} \left(\nabla u(x)\nabla \left(\frac{u}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \right) (x) + \frac{|u(x)|^2}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2) \, dx, \end{aligned}$$

et alors

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^d |f^i(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui démontre l'assertion 2. en prenant $f^0 = u$ et $f^i = \partial_{x_i} u$ pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$.

L'égalité $(v | u) = \langle v, u \rangle_{L^2(\Omega)}$ se déduit de la première assertion. ■

Ces espaces nous permettent d'en définir de nouveaux, utiles pour la suite de notre mémoire.

Définition 3.2.29 Soit X un espace de Banach réel. **L'espace** $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $u : [0, T] \rightarrow X$ avec

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} := \left(\int_0^T \|u\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

pour $1 \leq p < \infty$ et

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} := \sup_{t \in [0, T]} \text{ess} \|u(t)\| < \infty.$$

Définition 3.2.30 Soit X un espace de Banach réel. **L'espace** $C([0, T]; X)$ est l'ensemble des fonctions continues $u : [0, T] \rightarrow X$ avec

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} := \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\| < \infty.$$

3.3 Théorème de Rellich-Kondrachov.

Dans cette partie, on donne le théorème de *Rellich-Kondrachov*. Il est essentiel à notre étude car il affirme qu'on peut extraire de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ une sous-suite faiblement convergente dans $L^2(\Omega)$. On commence par rappeler les définitions d'injections continue et compacte.

Définition 3.3.1 Soit E, F deux espaces de Banach, tels que $E \subset F$.

- On dit que qu'il y a **injection continue** de E dans F s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $\|x\|_F \leq C\|x\|_E$.
- On dit que qu'il y a **injection compacte** de E dans F si pour $B \subset E$ borné, on a B relativement compacte dans E .

Autrement dit, s'il y a injection compacte de E dans F , cela signifie que de toute suite bornée de E , on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente dans F .

Définition 3.3.2 Soit $1 \leq p \leq \infty$, on appelle **exposant conjugué de Sobolev** de p le réel $p^* := \frac{dp}{d-p}$, tel que $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$.

On rappelle maintenant un théorème essentiel à la base de Rellich-Kondrachov.

Théorème 3.3.3 (Inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) Soit $1 \leq p \leq \infty$, alors pour tout $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \alpha_{d,p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

où on peut prendre $\alpha_{d,p} := \frac{(d-1)p}{d-p}$ par exemple.

On donne maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 3.3.4 (Rellich-Kondrachov) *Soit Ω un ouvert régulier borné C^1 .*

- *Si $p \in [1, d)$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec injection compacte, pour tout $q \in [1, p^*)$.*
- *Si $p = d$, alors $W^{1,d}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec injection compacte, pour tout $q \in [d, \infty)$.*
- *Si $p \in (d, \infty]$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ avec injection compacte et on a l'inégalité*

$$|f(x) - f(y)| \leq C_{p,d} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} |x - y|^{1-dp^{-1}}$$

pour tout $f \in L^2(\Omega)$ et $x, y \in \Omega$.

On pourra donc extraire de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ une sous-suite faiblement convergente dans $L^2(\Omega)$.

Chapitre 4

Exemple de problème d'évolution.

Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse à des équations aux dérivées partielles linéaires qui ont une variable temporelle. Nous les appelons *équations d'évolution*, l'idée étant que la solution évolue dans le temps à partir d'une configuration initiale connue. L'objectif de cette courte section est de donner une idée de comment obtenir des solutions faibles pour de tels problèmes.

Dans cette partie, sauf mention du contraire, Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^d . Prenons l'*équation de la chaleur*, équation parabolique du second-ordre, à laquelle on rajoute des conditions, pour former le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où $u : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ et où $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne le *laplacien* par rapport aux variables d'espace. Cette équation modélise ainsi la distribution de la température sur un domaine Ω en fonction du temps, et elle ainsi que ses variantes interviennent dans de nombreux problèmes de *diffusion*, et est l'exemple le plus simple d'équation *parabolique*. Les *équations paraboliques du second-ordre* sont ainsi une généralisation naturelle de l'équation de la chaleur.

4.1 Définition du problème d'évolution.

Dans la suite, on considère Ω comme un ouvert *borné* de \mathbb{R}^d , et on note $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$, pour un certain temps fixé $T > 0$. Nous allons ainsi étudier le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \mathcal{L}u(x, t) = f(x, t), & \text{sur } \Omega_T \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = g(x), & \text{sur } \Omega \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

où $f : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont donnés, et où l'on cherche $u : \overline{\Omega_T} \rightarrow \mathbb{R}$. La lettre \mathcal{L} désigne un *opérateur différentiel du second ordre*, pouvant être sous forme divergente

$$\mathcal{L}u(x, t) = - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, t) \right) (x, t) + \sum_{i=1}^d b^i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) + c(x, t)u(x, t), \quad (\text{F. Div})$$

ou sous forme non-divergente

$$\mathcal{L}u(x, t) = - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a^{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x, t) + \sum_{i=1}^d b^i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) + c(x, t)u(x, t), \quad (\text{F. Ndiv})$$

où a^{ij} , b^i et c sont des coefficients pour $i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket$.

Définition 4.1.1 *L'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}$ est dit **uniformément parabolique** s'il existe une constante $\theta > 0$ telle que*

$$\theta |\xi|^2 \leq \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a^{ij}(x, t) \xi_i \xi_j$$

pour tout $(x, t) \in \Omega_T$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Remarque 4.1.2 Pour retrouver l'équation de la chaleur, il suffit de prendre $a^{ij} \equiv \delta_{ij}$, $b^i \equiv c \equiv f \equiv 0$, et on obtient alors

$$\mathcal{L}u(x, t) = - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \delta_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x, t) = - \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, t) = -\Delta u(x, t)$$

et ainsi $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \mathcal{L}u(x, t) = f(x, t)$ devient $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$.

En physique, les équations paraboliques décrivent l'évolution dans le temps de la *densité* d'une certaine quantité u dans la région Ω . Dans ces équations, le terme de second ordre décrit la *diffusion*, le terme de premier ordre décrit les *phénomènes de transports*, tandis que le terme d'ordre zéro décrit la *création* ou la *destruction*.

4.2 Solution faible.

Dans cette section, on considère que \mathcal{L} est sous forme (F. Div), et on essaie de trouver une formulation efficace de la notion de solution faible pour le problème d'évolution (\mathcal{P}). On suppose que les coefficients $a^{ij} = a^{ji}$, b^i et c sont bornés pour $i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, que $f \in L^2(\Omega_T)$ et $g \in L^2(\Omega)$.

Définissons maintenant la forme bilinéaire

$$\mathcal{B}[u, v; t] := \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a^{ij}(\cdot, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x, t) + \sum_{i=1}^d b^i(\cdot, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) v(x, t) + c(\cdot, t) u(x, t) v(x, t) \right) dx$$

pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$ et $t \in [0, T]$ presque partout. Pour avoir une définition satisfaisante de *solution faible*, on suppose dans un premier temps qu'effectivement u est solution lisse du problème (\mathcal{P}). On associe alors

à u l'application

$$\mathbf{u} : t \in [0, T] \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$

telle que $[\mathbf{u}(t)](x) := u(x, t)$ pour $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$. Ainsi, on ne considère plus u comme une simple fonction de x et t , mais comme une application de t dans un espace de Sobolev de fonctions de x . On définit d'une manière similaire

$$\mathbf{f} : t \in [0, T] \longrightarrow L^2(\Omega)$$

telle que $[\mathbf{f}(t)](x) := f(x, t)$ pour $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$. Alors, si on prend une fonction $v \in H_0^1(\Omega)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} v(\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{L}\mathbf{u}) = v\mathbf{f} &\Leftrightarrow v \left(\partial_t \mathbf{u} - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \partial_{x_i} (a^{ij} \partial_{x_j} \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^d b^i \partial_{x_i} \mathbf{u} + c\mathbf{u} \right) = v\mathbf{f} \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} v \left(\partial_t \mathbf{u} - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \partial_{x_i} (a^{ij} \partial_{x_j} \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^d b^i \partial_{x_i} \mathbf{u} + c\mathbf{u} \right) = \int_{\Omega} v\mathbf{f} \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} v \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \int_{\Omega} v \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \partial_{x_i} (a^{ij} \partial_{x_j} \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^d b^i \partial_{x_i} \mathbf{u} + c\mathbf{u} \right) = \int_{\Omega} v\mathbf{f} \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} v \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \int_{\Omega} v \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \partial_{x_i} (a^{ij} \partial_{x_j} \mathbf{u}) + \int_{\Omega} v \sum_{i=1}^d b^i \partial_{x_i} \mathbf{u} + \int_{\Omega} v c\mathbf{u} = \int_{\Omega} v\mathbf{f}, \end{aligned}$$

or par intégration par parties on a

$$\int_{\Omega} v \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \partial_{x_i} (a^{ij} \partial_{x_j} \mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a^{ij} \partial_{x_i} \mathbf{u} \partial_{x_j} v,$$

et on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \int_{\Omega} v \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \partial_{x_i} (a^{ij} \partial_{x_j} \mathbf{u}) + \int_{\Omega} v \sum_{i=1}^d b^i \partial_{x_i} \mathbf{u} + \int_{\Omega} v c\mathbf{u} &= \int_{\Omega} v\mathbf{f} \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} v \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a^{ij} \partial_{x_i} \mathbf{u} \partial_{x_j} v + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d b^i \partial_{x_i} \mathbf{u} v + \int_{\Omega} v c\mathbf{u} &= \int_{\Omega} v\mathbf{f} \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} v \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a^{ij} \partial_{x_i} \mathbf{u} \partial_{x_j} v + \sum_{i=1}^d b^i \partial_{x_i} \mathbf{u} v + v c\mathbf{u} \right) &= \int_{\Omega} v\mathbf{f} \\ \Leftrightarrow \left\langle v, \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right\rangle + \mathcal{B}[\mathbf{u}, v; t] &= \langle v, \mathbf{f} \rangle, \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$. Ensuite, on note

$$g^0 := f - \sum_{i=1}^d b^i \partial_{x_i} u - cu \quad \text{et} \quad g^j := \sum_{i=1}^d a^{ij} \partial_{x_i} u,$$

et on voit que

$$\partial_t u = g^0 + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} g^i \text{ sur } \Omega_t.$$

Par ce qui a été vu dans le chapitre 1, $g^0 + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} g^i$ appartient à $H^{-1}(\Omega)$, et on a

$$\|\partial_t u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \left(\sum_{j=0}^n \|g^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

Tout cela permet d'aboutir à la définition suivante.

Définition 4.2.1 *On dit qu'une fonction $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, avec $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ est une **solution faible** du problème (\mathcal{P}) si on a $\mathbf{u}(0) = g$ et*

$$\left\langle v, \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right\rangle + \mathcal{B}[\mathbf{u}, v; t] = \langle \mathbf{f}, v \rangle,$$

pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et pour presque tout $t \in [0, T]$.

Chapitre 5

Notions de mécanique mathématique.

Dans cette section, on introduit quelques éléments de mécanique pour illustrer certaines des notions qu'on utilise dans ce travail. En effet, l'avantage de la mécanique, et de la physique en général, est qu'elle permet souvent de s'approprier certains résultats abstraits qu'on étudie en mathématiques. En sens inverse, les progrès de celles-ci ont souvent été, et sont encore stimulés par des difficultés rencontrées par des physiciens. La finalité de cette section est l'obtention de l'équation de la chaleur, qu'on étudiera en homogénéisation.

5.1 Prolégomène mathématique.

Cette partie se consacre à l'introduction des notations, quelques rappels sur des opérateurs différentiels et des propriétés qui seront utiles par la suite.

Dans ce qui suit, et pour toute la suite du mémoire, on désignera les *scalaires* et les *points de l'espace* par des symboles commençant par des lettres minuscules, et les *vecteurs* et les fonctions à *valeurs vectorielles* par des symboles commençant par des lettres minuscules en caractères gras.

5.1.1 Quelques notations.

- On note $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ la *base canonique* de \mathbb{R}^3 , qui est orthonormée.
- On note u_i la i -ème composante du vecteur \mathbf{u} dans la base canonique, on a donc $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i e_i$.
- Le *produit scalaire* entre deux vecteurs est noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$.
- La matrice dont toutes les composantes sont nulles sauf celle situées sur la i -ème ligne et la j -ième colonne est notée $e_i \otimes e_j$.
- On note $A_{i,j}$ la composante se trouvant sur la i -ème ligne et la j -ième colonne de la matrice \mathbf{A} . Ainsi on a $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{i,j} e_i \otimes e_j$.
- Le *produit matriciel* est noté \mathbf{AB} , ainsi $(\mathbf{AB})_{i,j} = \sum_{k=1}^3 A_{i,k} B_{k,j}$.
- Le *produit « scalaire » matriciel* est noté $\mathbf{A} : \mathbf{B} := \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{i,j} B_{i,j}$.
- Le *symbole de Kronecker* est noté δ_{ij} et est tel que $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon.
- Pour tout triplet $(i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3$, on pose le *symbole d'orientation* $\varepsilon_{ijk} := \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} = \pm 1$.

— On note quelquefois les dérivées partielles $f_{,i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{,ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $f_{,ijk} := \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$.

5.1.2 Opérateurs différentiels courants.

Définition 5.1.1 *Le Laplacien d'un champ scalaire* $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est le champ scalaire $\Delta f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\Delta f := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \left(= \sum_{i=1}^3 f_{,ii} \right).$$

Définition 5.1.2 *La divergence d'un champ vectoriel* $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le champ scalaire $\operatorname{div} \mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\operatorname{div} \mathbf{u} := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \left(= \sum_{i=1}^3 u_{i,i} \right).$$

Définition 5.1.3 *Le gradient d'un champ scalaire* $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est le champ vectoriel $\nabla f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$\nabla f := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \left(= \sum_{i=1}^3 f_{,i} \mathbf{e}_i \right),$$

qu'on peut aussi écrire $\nabla f = (f_{,1}, f_{,2}, f_{,3})^T$.

Définition 5.1.4 *Le rotationnel d'un champ vectoriel* $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le champ vectoriel $\operatorname{rot} \mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} := \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3, = \nabla \wedge \mathbf{u}.$$

Remarquons qu'à l'aide du symbole d'orientation, on peut le réécrire

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \mathbf{e}_i.$$

Définition 5.1.5 *La jacobienne d'un champ vectoriel* $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le champ matriciel $\nabla \mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{M}_{3 \times 3}$ défini par

$$\nabla \mathbf{u} := \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \left(= \sum_{i,j=1}^3 u_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right).$$

On l'écrira quelquefois plus simplement $\nabla \mathbf{u}$, notamment dans les deux premiers chapitres.

Définition 5.1.6 *La divergence d'un champ matriciel* $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{M}_{3 \times 3}$ est le champ vectoriel $\operatorname{div} \mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$\operatorname{div} \mathbf{A} := \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \left(= \sum_{i,j=1}^3 A_{i,j} \mathbf{e}_i \right),$$

donc la i -ème composante de $\operatorname{div} \mathbf{A}$ est égale à la divergence de la i -ème ligne de \mathbf{A} .

Définition 5.1.7 Le *Laplacien d'un champ vectoriel* $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le champ vectoriel $\Delta \mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$\Delta \mathbf{u} := \sum_{i=1}^3 \Delta u_i \mathbf{e}_i.$$

Les composantes du vecteur $\Delta \mathbf{u}$ sont les Laplaciens des composantes de \mathbf{u} .

5.1.3 Calcul indiciel.

Le calcul indiciel est un outil utile et efficace reposant essentiellement sur les propriétés du symbole de Kronecker et du symbole d'orientation.

On utilisera par la suite souvent la *convention de sommation des indices répétés d'Einstein*, qui consiste à déclarer que lorsqu'un indice muet est répété, il y a sommation sur cet indice. Par exemple, si \mathbf{S} est une matrice carrée de composante S_{ij} , alors sa trace $\operatorname{tr} \mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 S_{ii}$ est notée

$$\operatorname{tr} \mathbf{S} = S_{ii}.$$

Proposition 5.1.8 (Propriétés de δ_{ij}) Soit \mathbf{A} une matrice quelconque.

1. $\delta_{ii} = 3$.
2. $\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$.
3. $\delta_{ij} A_{jl} = A_{il}$.

Proposition 5.1.9 (Propriétés de ε_{ijk}) Soit \mathbf{A} une matrice quelconque.

1. On a

$$\det \begin{pmatrix} A_{ip} & A_{iq} & A_{ir} \\ A_{jp} & A_{jq} & A_{jr} \\ A_{kp} & A_{kq} & A_{kr} \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \det \mathbf{A}.$$

2. On a

$$\det \begin{pmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr}.$$

3. $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$, $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ et $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$.
4. Si \mathbf{A} est symétrique, $\varepsilon_{ijk} M_{jk} = 0$.

On énonce maintenant le théorème fondamental du calcul indiciel.

Théorème 5.1.10 (Calcul indiciel) *On a les relations suivantes*

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp},$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pjk} = 2\delta_{ip},$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6.$$

On obtient ainsi un corollaire qu'on utilisera régulièrement.

Corollaire 5.1.11 *Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}$, et soit $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ les vecteurs colonnes de \mathbf{A} , définis par $\mathbf{u} := (A_{11} \ A_{21} \ A_{31})^T$, $\mathbf{v} := (A_{12} \ A_{22} \ A_{32})^T$ et $\mathbf{w} := (A_{13} \ A_{23} \ A_{33})^T$. Alors on a*

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} A_{ip} A_{jq} A_{kr}.$$

5.2 Cinématique des milieux continus.

Considérons maintenant un milieu continu en mouvement, qui occupe à chaque instant t une région $\Omega(t)$ de l'espace. Le mouvement du milieu continu est ainsi défini complètement si, pour chaque instant t et pour chaque point matériel mobile $M(t)$ du milieu, on connaît l'application qui à la position X du point à l'instant $t_0 = 0$ associe sa position x à l'instant t .

5.2.1 Définitions du mouvement.

Définition 5.2.1 *Les coordonnées $X := (X_1 \ X_2 \ X_3)^T$ du point matériel à l'instant t_0 sont appelées ses **coordonnées de Lagrange**, tandis que les coordonnées $x := (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$ du point matériel à l'instant $t \neq t_0$ sont appelées ses **coordonnées d'Euler**.*

Dans la suite, on notera

$$\mathbf{f} : (X, t) \in \Omega(0) \longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) \in \Omega(t)$$

l'application qui donne les coordonnées d'Euler en fonction du temps et des coordonnées de Lagrange. Tout au long de cette partie, \mathbf{f} sera supposée infiniment différentiable, et on considèrera que l'application $X \in \Omega(0) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) \in \Omega(t)$ est une bijection, dont la bijection réciproque, infiniment différentiable elle aussi, sera notée $\mathbf{g}(x, t)$. Ainsi,

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) = X, \quad \forall X \in \Omega(0).$$

Voici maintenant les définitions de la *vitesse* et de l'*accélération* en mécanique des milieux continus.

Définition 5.2.2 *On définit la **vitesse à l'instant t** d'un point matériel $M(t)$ occupant la position X à l'instant t_0 , donnée par $\mathbf{v}(M(t)) := \partial_t \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$, et on note la description lagrangienne du mouvement*

$$\tilde{\mathbf{v}} : (X, t) \in \Omega(0) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{v}(X, t) := \partial_t \mathbf{f}(\mathbf{X}, t),$$

l'application qui associe au couple (X, t) la vitesse à l'instant t du point matériel de coordonnées lagrangiennes X . De même, on notera la description eulérienne du mouvement

$$\mathbf{v} : (x, t) \in \Omega(t) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{v}(x, t) := \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{g}(x, t), t)$$

l'application qui associe au couple (x, t) la vitesse à l'instant t du point matériel de coordonnées eulériennes X .

Définition 5.2.3 On définit l'**accélération** à l'instant t d'un point matériel $M(t)$ occupant la position X à l'instant t_0 , donnée par $\boldsymbol{\gamma}(M(t)) := \partial_t^2 \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$, et on note la description lagrangienne de l'accélération

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}} : (X, t) \in \Omega(0) \times \mathbb{R} \longrightarrow \boldsymbol{\gamma}(X, t) := \partial_t^2 \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \partial_t \mathbf{v}(X, t),$$

l'application qui associe au couple (X, t) l'accélération à l'instant t du point matériel de coordonnées lagrangiennes X . De plus, on notera la description eulérienne de l'accélération

$$\boldsymbol{\gamma} : (x, t) \in \Omega(t) \times \mathbb{R} \longrightarrow \boldsymbol{\gamma}(x, t) := \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{g}(x, t), t),$$

l'application qui associe au couple (x, t) la vitesse à l'instant t du point matériel de coordonnées eulériennes X .

5.2.2 Dérivation particulière.

Il arrive de dire que la description eulérienne $\boldsymbol{\gamma}(x, t)$ de l'accélération est égale à la *dérivée particulière* du champ des vitesses $\mathbf{v}(x, t)$ en description eulérienne. On note la dérivée particulière $\frac{d}{dt}$, à ne pas confondre avec la dérivée d'une fonction à variable temporelle $\frac{d}{dt}$. On a ainsi

$$\boldsymbol{\gamma}(x, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(x, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(x, t) v_i(x, t)$$

où les v_i sont les composantes de \mathbf{v} .

Définition 5.2.4 On appelle **dérivée particulière** d'une quantité k attachée à une particule la dérivée par rapport au temps de cette quantité quand on suit la particule dans son mouvement. Si la quantité k est donnée en description eulérienne, on a

$$\frac{d}{dt} k(x, t) = \frac{\partial k}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial k}{\partial x_i}(x, t) v_i(x, t),$$

qu'on peut écrire en abrégé

$$\frac{d}{dt} k = \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla k \cdot \mathbf{v}$$

Maintenant, on donne un rappel sur un résultat important en calcul différentiel qu'on utilisera directement ensuite.

Théorème 5.2.5 (Formule de changement de variables) Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application de classe C^1 , et soit $k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application intégrable. Alors pour tout $U \subset \mathbb{R}^3$ ouvert, on a la formule de

changement de variable

$$\int_{\varphi(U)} k(x) \, dx = \int_U k(\varphi(X)) |\det \nabla \varphi| \, dX$$

Ce résultat va nous permettre de démontrer le théorème suivant, qui donne une formule permettant d'obtenir la plupart des équations de mécanique des milieux continus.

Théorème 5.2.6 *Soit k une quantité attachée à une particule, \mathbf{v} sa vitesse. On a la formule*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} k(x, t) \, dx = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{d}{dt} k(x, t) + k(x, t) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dx.$$

Preuve. Appliquons la formule de changement de variables à $\varphi(X) := \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$, $U = \Omega(0)$, de sorte que $\varphi(U) = \mathbf{f}(\Omega(0), t) = \Omega(t)$. On a ainsi

$$\nabla \mathbf{f} := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \partial_{x_2} f_1 & \partial_{x_3} f_1 \\ \partial_{x_1} f_2 & \partial_{x_2} f_2 & \partial_{x_3} f_2 \\ \partial_{x_1} f_3 & \partial_{x_2} f_3 & \partial_{x_3} f_3 \end{pmatrix}.$$

D'après (5.1.11), on a

$$\det \nabla \mathbf{f} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} (\nabla \mathbf{f})_{ip} (\nabla \mathbf{f})_{jq} (\nabla \mathbf{f})_{kr}.$$

La formule de changement de variable s'écrit alors

$$\int_{\Omega(t)} k(x, t) \, dx = \int_{\Omega(0)} k(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) \det \nabla \mathbf{f} \, dX.$$

Comme le domaine $\Omega(0)$ est fixe, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} k(x, t) \, dx &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega(0)} k(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) \det \nabla \mathbf{f} \, dX \right) = \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} (k(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) \det \nabla \mathbf{f}) \, dX \\ &= \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} (k(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t)) \det \nabla \mathbf{f} \, dX + \int_{\Omega(0)} k(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) \frac{d}{dt} (\det \nabla \mathbf{f}) \, dX. \end{aligned}$$

Le changement de variable inverse donne alors

$$\int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} (k(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t)) \det \nabla \mathbf{f} \, dX = \int_{\Omega(t)} \frac{d}{dt} k(x, t) \, dx.$$

De plus, on a la formule

$$\frac{d}{dt} (\det \nabla \mathbf{f}) = \det \nabla \mathbf{f} \operatorname{div} \mathbf{v},$$

ce qui donne finalement

$$\int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} k(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) \frac{d}{dt} (\det \nabla \mathbf{f}) \, dX = \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} k(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) \det \nabla \mathbf{f} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dX = \int_{\Omega(t)} k(x, t) \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx.$$

En regroupant les calculs précédent, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} k(x, t) \, dx = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{d}{dt} k(x, t) + k(x, t) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dx$$

ce qu'on voulait. ■

5.3 Lois de conservation.

5.3.1 Masse et équation de continuité.

On commence par rappeler la *loi de Lavoisier* concernant la masse.

Loi 5.3.1 (Conservation de la masse) *La masse d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement reste constante.*

Considérons $\omega(t)$ un système en mouvement. La masse du système est donnée par

$$m(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho(x, t) \, d\mathcal{L}^3,$$

où ρ désigne la masse volumique au point x et à l'instant t . Par la loi précédente, on a

$$\frac{d}{dt} m(\omega(t)) = 0,$$

pour tout système $\omega(t)$, qu'on peut réécrire, par le théorème (5.2.6),

$$\int_{\omega(t)} \left(\frac{d}{dt} \rho(x, t) + \rho(x, t) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \, d\mathcal{L}^3$$

pour tout système $\omega(t)$. On en déduit que la loi de conservation de la masse implique que la représentation eulérienne $\rho(x, t)$ de la masse volumique vérifie l'équation suivante

Théorème 5.3.2 *La loi de Lavoisier est équivalente à l'équation*

$$\frac{d}{dt} \rho(x, t) + \rho(x, t) \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Cette équation peut se réécrire sous plusieurs manières, en utilisant notamment la définition (5.2.4) :

$$\frac{d}{dt} \rho(x, t) + \rho(x, t) \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \nabla k \cdot \mathbf{v} + \rho(x, t) \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

De la formule de dérivation particulière d'une intégrale de volume, et de l'équation de continuité ci-dessus, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) k(x, t) \, dx &= \int_{\Omega(t)} \left(\frac{d}{dt} (\rho(x, t) k(x, t)) + k(x, t) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dx \\ &= \int_{\Omega(t)} \left(\rho(x, t) \frac{d}{dt} k(x, t) + k(x, t) \frac{d}{dt} \rho(x, t) + k(x, t) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dx \\ &= \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) \frac{d}{dt} k(x, t) \, dx. \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $k = \mathbf{v}$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) \, dx = \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) \frac{d}{dt} \mathbf{v}(x, t) \, dx = \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) \boldsymbol{\gamma}(x, t) \, dx.$$

5.3.2 Quantité de mouvement.

On donne maintenant la loi de conservation de la quantité de mouvement.

Loi 5.3.3 (Principe fondamental de la dynamique) *Dans un repère galiléen, pour tout système matériel, la dérivée par rapport au temps du torseur des quantités de mouvement est égale au torseur des forces extérieures appliquées au système.*

Prenons $\Omega(t)$ un système matériel, et $\omega(t) \subset \Omega(t)$ un système quelconque. Les forces extérieures agissant sur $\omega(t)$ sont des forces massiques de densité volumique $\rho \vec{f}$ dans $\omega(t)$, ainsi que des forces de contact de densité $\vec{F}(M, t, \mathbf{n})$ sur $\partial\omega(t)$ de sorte que le torseur des forces extérieures a une résultante

$$\int_{\omega(t)} \rho(x, t) \vec{f} \, dx + \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(M, t, \mathbf{n}) \, dS$$

et un moment en O donné par

$$\int_{\omega(t)} O\vec{M} \wedge \rho(x, t) \vec{f} \, dx + \int_{\partial\omega(t)} O\vec{M} \wedge \vec{F}(M, t, \mathbf{n}) \, dS.$$

Quant au torseur des quantités de mouvement, il a une résultante

$$\int_{\omega(t)} \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) \, dx$$

ainsi qu'un moment en O défini par

$$\int_{\omega(t)} O\vec{M} \wedge \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) \, dx.$$

Ainsi le principe fondamental de la dynamique se traduit par les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) \, dx &= \int_{\omega(t)} \rho(x, t) \vec{f} \, dx + \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(M, t, \mathbf{n}) \, dS, \\ \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} O\vec{M} \wedge \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) \, dx &= \int_{\omega(t)} O\vec{M} \wedge \rho(x, t) \vec{f} \, dx + \int_{\partial\omega(t)} O\vec{M} \wedge \vec{F}(M, t, \mathbf{n}) \, dS. \end{aligned}$$

De ce qui a été vu précédemment, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) \, dx &= \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) \boldsymbol{\gamma}(x, t) \, dx, \\ \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} O\vec{M} \wedge \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) \, dx &= \int_{\omega(t)} \rho(x, t) \frac{d}{dt} (O\vec{M} \wedge \mathbf{v}(x, t)) \, dx = \int_{\omega(t)} \rho(x, t) (O\vec{M} \wedge \boldsymbol{\gamma}(x, t)) \, dx. \end{aligned}$$

On en déduit ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\omega(t)} (\rho(x, t)\boldsymbol{\gamma}(x, t) - \rho(x, t)\vec{f}) \, dx &= \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(M, t, \mathbf{n}) \, dS, \\ \int_{\omega(t)} O\vec{M} \wedge (\rho(x, t)\boldsymbol{\gamma}(x, t) - \rho(x, t)\vec{f}) \, dx &= \int_{\partial\omega(t)} O\vec{M} \wedge \vec{F}(M, t, \mathbf{n}) \, dS. \end{aligned}$$

Pour la suite, on utilise deux résultats qu'on rappelle maintenant.

Proposition 5.3.4 (Formule de Stokes) *Soit U un ouvert, ν la normale extérieure à ∂U , et $\nu_i := \nu \cdot e_i$ la i -ème composante de ν . En notant $d\mathcal{H}^2$ l'élément de surface, et $d\mathcal{H}^3$ l'élément de volume, on a*

$$\int_U \partial_{x_i} f \, d\mathcal{H}^3 = \int_{\partial U} f \nu_i \, d\mathcal{H}^2$$

On peut dire de cette formule qu'elle est l'analogie de la formule fondamentale de l'analyse : $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) \, dt$. Donnons maintenant l'énoncé du théorème de Cauchy.

Théorème 5.3.5 (Cauchy) *Soit $\mathbf{b} := \mathbf{b}(M)$ un champ de vecteurs défini dans Ω , et soit $\alpha(M, \mathbf{n})$ une application dépendant de M et du vecteur unitaire \mathbf{n} . Supposons que pour \mathbf{n} fixé, l'application $M \rightarrow \alpha(M, \mathbf{n})$ est continue, et que le champ $\mathbf{b}(M)$ est borné, et que pour tout $\omega \subset \Omega$, on a la loi de conservation*

$$\int_{\omega} \mathbf{b}(M) \, dx = \int_{\partial\omega} \alpha(M, \mathbf{n}) \, dS.$$

Alors, pour tout $M \in \Omega$, il existe une matrice $\mathbf{T}(M)$ telle que

$$\alpha(M, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(M)\mathbf{n}.$$

On utilise ainsi les deux résultats précédents dans le cas de notre loi de conservation : prenons $\mathbf{b} := \rho\boldsymbol{\gamma} - \rho\vec{f}$ et $\alpha(M, \mathbf{n}) := \vec{F}(M, t, \mathbf{n})$. On en déduit, par le théorème de Cauchy, l'existence d'une matrice qu'on note $\boldsymbol{\sigma}$, et qu'on appelle *tenseur des contraintes de Cauchy*, tel que

$$\vec{F}(M, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{n}.$$

Par formule de Stokes, on a alors

$$\int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(M, t, \mathbf{n}) \, dS = \int_{\partial\omega(t)} \boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{n} \, dS = \int_{\partial\omega(t)} \sigma_{ij} n_j e_i \, dS = \int_{\omega(t)} \sigma_{ij,j} e_i \, dx = \int_{\omega(t)} (\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma})(M) \, dx.$$

En combinant avec les équations obtenues précédemment, on obtient

$$\int_{\omega(t)} (\rho(x, t)\boldsymbol{\gamma}(x, t) - \rho(x, t)\vec{f} - (\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma})(M)) \, dx = 0,$$

or cette équation reste vraie pour tout $\omega(t)$, donc on a les équations

$$\rho(x, t)\boldsymbol{\gamma}(x, t) = \rho(x, t)\vec{f} + (\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma})(M)$$

qu'on appelle *équations du mouvement du milieu continu*. Si le milieu est à l'équilibre ou en mouvement de translation uniforme, on a $\boldsymbol{\gamma}(x, t) = 0$ et ainsi

$$\rho(x, t)\vec{f} + (\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma})(M) = 0$$

qu'on appelle *équations d'équilibre du milieu continu*. On déduit ainsi, de Stokes et de l'égalité vérifiée par $\vec{F}(M, t, \mathbf{n})$ que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega(t)} O\vec{M} \wedge \vec{F}(M, t, \mathbf{n}) \, dS &= \int_{\partial\omega(t)} O\vec{M} \wedge \boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{n} \, dS = \int_{\partial\omega(t)} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l e_i \, dS \\ &= \int_{\omega(t)} \varepsilon_{ijk} (x_j \sigma_{kl})_{,l} e_i \, dx = \int_{\omega(t)} (\varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{kl} e_i + \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl,l} e_i) \, dx \\ &= \int_{\omega(t)} (\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} e_i + O\vec{M} \wedge (\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma})(M)) \, dx, \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{\omega(t)} O\vec{M} \wedge (\rho(x, t)\boldsymbol{\gamma}(x, t) - \rho(x, t)\vec{f}) \, dx = \int_{\omega(t)} (\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} e_i + O\vec{M} \wedge (\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma})(M)) \, dx.$$

Par les équations du mouvement du milieu continu, on obtient

$$\int_{\omega(t)} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} e_i \, dx = 0.$$

Comme $\omega(t)$ est arbitraire, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a $\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0$, ce qui implique que pour tout $p, q \in \{1, 2, 3\}$, on a $\varepsilon_{pqi} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0$. Par le théorème (5.1.10), on a alors pour tout $p, q \in \{1, 2, 3\}$, la relation suivante

$$(\delta_{pj} \delta_{qk} - \delta_{pk} \delta_{qj}) \sigma_{kj} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{qp} - \sigma_{pq} = 0,$$

ce qui signifie que le tenseur $\boldsymbol{\sigma}(M)$ est symétrique. Les résultats énoncés précédemment sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 5.3.6 *La loi de conservation de la quantité de mouvement implique l'existence d'une matrice $\boldsymbol{\sigma}(M)$ pour chaque point M du milieu continu, appelée **tenseur des contraintes de Cauchy**, satisfaisant les équations du mouvement*

$$\rho\boldsymbol{\gamma} = \rho\vec{f} + (\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma})(M),$$

ou, si le milieu est à l'équilibre ou en mouvement de translation uniforme, les équations d'équilibre

$$\rho\vec{f} + (\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma})(M) = 0.$$

5.3.3 Énergie.

Pour travailler sur la loi de conservation de l'énergie, rappelons le résultat suivant.

Loi 5.3.7 (Premier principe de la thermodynamique) *Pour tout système matériel, il existe une fonction énergie interne spécifique¹, notée $\boldsymbol{\epsilon}$, telle que la dérivée par rapport au temps de l'énergie totale, somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique, soit égale à la puissance des forces extérieures appliquées au système plus les apports de chaleur par unité de temps.*

1. Par unité de masse.

5.3.3.1 Équation de l'énergie.

Donnons maintenant la définition du tenseur des vitesses de déformation.

Définition 5.3.8 *Le tenseur des vitesses de déformation est la matrice \mathbf{Dv} définie par*

$$\mathbf{Dv} := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T),$$

où $\nabla \mathbf{v}$ est le gradient du champ vectoriel \mathbf{v} définie dans (5.1.5).

Maintenant, on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 5.3.9 *Le premier principe de la thermodynamique entraîne que l'énergie interne spécifique vérifie l'équation suivante, appelée **équation de l'énergie***

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{Dv} + \rho w - \operatorname{div} \mathbf{q},$$

où ρw désigne les apports volumiques de chaleur par unité de temps, et \mathbf{q} le vecteur flux de chaleur.

Preuve. Prenons $M \in \omega(t) \subset \Omega(t)$. On a les quantités suivantes

$\int_{\omega(t)} \rho(x, t) \epsilon \, dx$	Énergie interne du système $\omega(t)$,
$\frac{1}{2} \int_{\omega(t)} \rho(x, t) \mathbf{v} ^2 \, dx$	Énergie cinétique du système $\omega(t)$,
$\int_{\omega(t)} \rho(x, t) \vec{f} \cdot \mathbf{v} \, dx$	Puissance des forces extérieures volumiques,
$\int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(M, t, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS$	Puissance des forces extérieures surfaciques,
$\int_{\omega(t)} \rho(x, t) w \, dx$	Apport volumique de chaleurs,
$-\int_{\partial\omega(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS$	Apport surfacique de chaleurs.

Par le premier principe de la thermodynamique, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\omega(t)} \rho(x, t) \epsilon \, dx + \frac{1}{2} \int_{\omega(t)} \rho(x, t) |\mathbf{v}|^2 \, dx \right) &= \int_{\omega(t)} \rho(x, t) \vec{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(M, t, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS \\ &\quad + \int_{\omega(t)} \rho(x, t) w \, dx - \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS, \end{aligned}$$

Or on a $\vec{F}(M, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{n}$, donc

$$\int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(M, t, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS = \int_{\partial\omega(t)} \boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS = \int_{\partial\omega(t)} \sigma_{ij} n_j v_i \, dS.$$

En appliquant la formule de Stokes, on en déduit

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(M, t, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS &= \int_{\omega(t)} (\sigma_{ij} v_i)_{,j} \, dS = \int_{\omega(t)} (\sigma_{ij,j} v_i + \sigma_{ij} v_{i,j}) \, dS \\ &= \int_{\omega(t)} ((\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma})(M) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}(M) : \nabla\mathbf{v}) \, dS. \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\int_{\partial\omega(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial\omega(t)} q_i n_i \, dS = \int_{\omega(t)} q_{i,i} \, dx = \int_{\omega(t)} \operatorname{div} \mathbf{q} \, dx.$$

Par la formule de dérivation particulière d'une intégrale de volume, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\omega(t)} \rho(x, t) \boldsymbol{\epsilon} \, dx + \frac{1}{2} \int_{\omega(t)} \rho(x, t) |\mathbf{v}|^2 \, dx \right) &= \int_{\omega(t)} \rho(x, t) \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) \, dx \\ &= \int_{\omega(t)} \rho(x, t) \left(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} \right) \, dx, \end{aligned}$$

et en combinant avec les résultats obtenus précédemment, on obtient

$$\int_{\omega(t)} \rho(x, t) \left(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} \right) \, dx = \int_{\omega(t)} (\rho(x, t) \vec{f} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma})(M) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}(M) : \nabla\mathbf{v} + \rho(x, t)w - \operatorname{div} \mathbf{q}) \, dx,$$

ce qui équivaut à

$$\int_{\omega(t)} \left(\mathbf{v} \cdot (\rho(x, t) \boldsymbol{\gamma} - \rho(x, t) \vec{f} - (\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma})(M)) + \rho(x, t) \frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} \right) \, dx = \int_{\omega(t)} (\boldsymbol{\sigma}(M) : \nabla\mathbf{v} + \rho(x, t)w - \operatorname{div} \mathbf{q}) \, dx.$$

Avec le théorème (5.3.6), on sait que $\rho\boldsymbol{\gamma} - \rho\vec{f} - (\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma})(M) = 0$, donc

$$\int_{\omega(t)} \rho(x, t) \frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} \, dx = \int_{\omega(t)} (\boldsymbol{\sigma}(M) : \nabla\mathbf{v} + \rho(x, t)w - \operatorname{div} \mathbf{q}) \, dx.$$

Cette dernière équation est vraie pour tout sous-système $\omega(t) \subset \Omega(t)$, il en résulte que

$$\rho(x, t) \frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} \, dx = \boldsymbol{\sigma}(M) : \nabla\mathbf{v} + \rho(x, t)w - \operatorname{div} \mathbf{q}.$$

Par la définition (5.3.8), et la symétrie de la matrice $\boldsymbol{\sigma}(M)$, on a

$$\boldsymbol{\sigma}(M) : \nabla\mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma}(M) : \mathbf{D}\mathbf{v}.$$

Les deux dernières équations combinées donnent l'équation de l'énergie. ■

5.3.3.2 Obtention de l'équation de la chaleur.

Dans le cas d'un milieu au repos, on a $\mathbf{v} = 0$ et

$$\frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} + \nabla E \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t},$$

donc l'équation de l'énergie précédente se réécrit

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \rho w - \operatorname{div} \mathbf{q}.$$

Dans un tel milieu, on a deux lois physiques approchées, expérimentalement vérifiées, appelées *lois de comportement* :

Loi 5.3.10 *On a les proportionnalités suivantes :*

— *entre l'énergie interne ϵ et la température absolue T , soit*

$$\epsilon = CT.$$

— *entre le vecteur flux de chaleur \mathbf{q} et le vecteur gradient de température dirigé en sens opposé, soit*

$$\mathbf{q} = -K \nabla T,$$

avec $K > 0$. C'est la loi de Fourier.

En reportant ces deux lois dans les équations précédentes, on obtient finalement l'équation de la chaleur

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \rho w + \operatorname{div}(K \nabla T).$$

Le coefficient K est appelé *coefficient de diffusion de la chaleur*. Si le milieu est anisotrope², K doit être remplacé par une matrice de diffusivité symétrique définie positive. Si le milieu est homogène, la diffusivité ne dépend pas de x , et on a $\operatorname{div}(K \nabla T) = K \operatorname{div}(\nabla T) = K \nabla T$. Ainsi, l'équation de la chaleur se réécrit

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \rho w + K \nabla T.$$

2. Les propriétés du milieu varient selon la direction considérée.

Chapitre 6

Convergence double-échelle.

Cette partie introduit un nouveau type de convergence, essentielle à la théorie de l'homogénéisation.

6.1 Convergence double-échelle.

Dans cette section, on définit la notion de *convergence double-échelle* classique. On donne ensuite quelques résultats qui nous sera utile plus tard. Pour la suite, on considère $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert, et $Y := [0, 1]^3$ le cube unité.

6.1.1 Rappels et résultats préliminaires.

Commençons par donner quelques résultats préliminaires.

Définition 6.1.1 Une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *Y -périodique* si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{Z}^3$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a $f(x + i) = f(x)$. On note $C_{\#}(Y)$ l'ensemble des fonctions Y -périodiques continues. Soit $f \in C_{\#}(Y)$, alors $C_{\#}(Y)$ muni de la norme $\|f\|_{C_{\#}(Y)} = \max_Y |f|$ est un espace de Banach.

Théorème 6.1.2 Le dual de l'espace de Banach $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des mesures de Radon¹ sur $\overline{\Omega}$, qu'on note $\mathcal{M}(\Omega)$.

Proposition 6.1.3 (Inégalité de Jensen) Soit (Ω, A, λ) un espace mesuré, telle que $\lambda(\Omega) = 1$, soit g une fonction μ -intégrable à valeurs dans un intervalle réel I et soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors on a

$$\varphi \left(\int_{\Omega} g \, d\lambda \right) \leq \int_{\Omega} \varphi \circ g \, d\lambda.$$

Proposition 6.1.4 Soit (Ω, A, λ) un espace mesuré, telle que $\lambda(\Omega) = 1$, soit g une fonction μ -intégrable à valeurs dans un intervalle réel I et soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Alors si

$$\varphi \left(\int_{\Omega} g \, d\lambda \right) = \int_{\Omega} \varphi \circ g \, d\lambda,$$

il existe $c \in \mathbb{R}^3$ tel que $g = c$ λ -presque partout.

1. Une mesure de Radon est une mesure donnant une masse finie à tout compact.

On énonce aussi un variante du théorème de *Riesz*.

Théorème 6.1.5 (Riez L^p) Pour $1 < p < \infty$, l'espace $(L^p(\Omega))^* := \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathbb{R})$ est isométriquement isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$. Plus précisément, pour chaque $f \in (L^p(\Omega))^*$, il existe un unique $v \in L^{p'}(\Omega)$ tel que

$$f(u) = \int_{\Omega} uv \, d\lambda$$

pour tout $u \in L^p(\Omega)$, avec λ la mesure définie sur ces espaces. On a aussi l'égalité

$$\|f\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Les résultats suivants sont cruciaux pour la suite de notre étude.

Théorème 6.1.6 Soient $p \in \mathbb{N}$ et f une fonction Y -périodique telle que $\|f\|_{L^p(Y)} \leq \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $p' = \frac{p}{p-1}$ et

$$f_{\varepsilon}(x) := f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

$$m(f) := \int_Y f(y) \, dy = \frac{1}{\text{mes}(Y)} \int_Y f(y) \, dy = \int_Y f(y) \, dy.$$

Alors on a les convergences

$$f_{\varepsilon} \xrightarrow[\sigma(L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega))]{\quad} m(f)\mathbf{1}_{\Omega} \quad \text{si } 1 < p \leq \infty,$$

$$f_{\varepsilon} \xrightarrow[\sigma(L^{\infty}(\Omega), L^1(\Omega))]{*} m(f)\mathbf{1}_{\Omega} \quad \text{si } p = \infty,$$

$$f_{\varepsilon} \xrightarrow[\sigma(\mathcal{M}(\Omega), C_c(\Omega))]{*} m(f)\mathbf{1}_{\Omega} \quad \text{si } p = 1,$$

où les topologies $\sigma(L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega))$, $\sigma(L^{\infty}(\Omega), L^1(\Omega))$ et $\sigma(\mathcal{M}(\Omega), C_c(\Omega))$ sont des topologies engendrées, telles que définies en (3.1.4).

Preuve. Prouvons d'abord que f est bornée dans $L^p(\Omega)$. Pour le cas $p = \infty$, on a $\|f_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}^3$, on pose

$$Y_{\varepsilon}^i := \varepsilon(i + Y) = \{\varepsilon(i + y) \mid y \in Y\}.$$

Alors on a l'existence de $M > 0$ tel que

$$\Omega \subset [-M, M]^3 \subset \bigcup_{i \in I_{\varepsilon}} Y_{\varepsilon}^i, \quad \text{avec } I_{\varepsilon} = \left[\left[-E\left(\frac{M}{\varepsilon}\right) - 1, E\left(\frac{M}{\varepsilon}\right) \right] \right]$$

où $E(s)$ désigne la partie entière du réel s . Pour chaque $i \in I_{\varepsilon}$, on effectue le changement de variables

$x = \varepsilon(i + y)$, et grâce à la périodicité de f on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_{\varepsilon}(x)|^p dx &\leq \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \int_{Y_{\varepsilon}^i} |f_{\varepsilon}(x)|^p dx = \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \varepsilon^3 \int_Y |f_{\varepsilon}(\varepsilon(i + y))|^p dy \\ &= \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \varepsilon^3 \int_Y |f(i + y)|^p dy \leq \text{Card}(I_{\varepsilon}) \varepsilon^3 \int_Y |f(y)|^p dy \\ &\leq \left(2\varepsilon \left(1 + \frac{M}{\varepsilon}\right)\right)^3 \int_Y |f(y)|^p dy \leq C \int_Y |f(y)|^p dy. \end{aligned}$$

Ainsi (f_{ε}) est bornée dans $L^p(\Omega)$, et à une suite extraite près

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon} &\xrightarrow{\sigma((L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega)))} g && \text{si } 1 < p \leq \infty, \\ f_{\varepsilon} &\xrightarrow{\sigma(L^{\infty}(\Omega), L^1(\Omega))} g && \text{si } p = \infty, \\ f_{\varepsilon} &\xrightarrow{\sigma(\mathcal{M}(\Omega), C_c(\Omega))} g && \text{si } p = 1. \end{aligned}$$

Maintenant, prouvons que $g = m(f)\mathbf{1}_{\Omega}$. Pour $p > 1$, soit $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, qu'on prolonge par 0 sur tout \mathbb{R}^3 . En prenant

$$J_{\varepsilon} := \{i \in \mathbb{Z}^3 \mid Y_{\varepsilon}^i \cap \text{supp}(\varphi) \neq \emptyset\},$$

on a aussi

$$\varphi_{\varepsilon}(x) := \sum_{j \in J_{\varepsilon}} \left(\int_Y \varphi(y) dy \right) \mathbf{1}_{Y_{\varepsilon}^j}(x).$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(\varphi - \varphi_{\varepsilon}) dx \right| &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(\varphi - \varphi_{\varepsilon})(x) dx \right| \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}^3} f_{\varepsilon}(\varphi - \varphi_{\varepsilon})(x) \mathbf{1}_{\Omega}(x) dx \right| \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi - \varphi_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|f_{\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} \|\mathbf{1}_{\Omega}\|_{L^{p'}(\Omega)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si on a la condition

$$\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{dist}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \text{supp}(\varphi)),$$

alors pour tout $i \in J_\varepsilon$, on a $\Omega \cap Y_\varepsilon^i = Y_\varepsilon^i$ et

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f_\varepsilon(x) \varphi_\varepsilon(x) \, dx &= \int_{\Omega} f_\varepsilon(x) \left(\sum_{j \in J_\varepsilon} \left(\int_Y \varphi(y) \, dy \right) \mathbf{1}_{Y_\varepsilon^j}(x) \right) \, dx \\
 &= \sum_{j \in J_\varepsilon} \int_{\Omega \cap Y_\varepsilon^j} f_\varepsilon(x) \left(\int_Y \varphi(y) \, dy \right) \, dx \\
 &= \sum_{j \in J_\varepsilon} \left(\int_{Y_\varepsilon^j} f_\varepsilon(x) \, dx \right) \left(\int_Y \varphi(y) \, dy \right) \\
 &= \sum_{j \in J_\varepsilon} \varepsilon^3 m(f) \left(\int_Y \varphi(y) \, dy \right) \\
 &= m(f) \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(y) \, dy.
 \end{aligned}$$

Si on considère le cas $p > 1$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x) \varphi_\varepsilon(x) \, dx = \int_{\Omega} m(f) \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) \, dx,$$

donc $g = m(f) \mathbf{1}_\Omega$, et si $p = 1$ alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x) \varphi_\varepsilon(x) \, dx = \int_{\Omega} m(f) \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} \varphi \, dg,$$

et ainsi $g = m(f) \mathbf{1}_\Omega dx$. ■

Théorème 6.1.7 *Soit $\psi \in L^2(\Omega, C_\#(Y))$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\begin{aligned}
 \left\| \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\psi\|_{L^2(\Omega, C_\#(Y))}, \\
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} &= \|\psi\|_{L^2(\Omega \times Y)}.
 \end{aligned}$$

Preuve. Pour la première égalité, il suffit d'écrire

$$\left\| \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left| \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 \, dx \leq \int_{\Omega} \left| \sup_{y \in Y} \psi(x, y) \right|^2 \, dx = \|\psi\|_{\psi \in L^2(\Omega, C_\#(Y))}^2$$

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^3$, on définit

$$Y_j^n := \frac{E(j+Y)}{n},$$

et en fixant $y_j \in Y_j^n$, on pose

$$(Y_j^n)^\# = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^3} (z + Y_j^n),$$

et aussi

$$\psi_n(x, y) = \sum_{j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^3} \psi(x, y_j) \mathbf{1}_{(Y_j^n)^\#}(y_j)$$

Prenons $\eta > 0$. On divise la preuve de la seconde égalité en trois lemmes.

Lemme 1 *Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N_1$ et tout $\varepsilon > 0$, on ait*

$$\left| \left\| \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} - \left\| \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \right| < \frac{\eta}{3}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \left\| \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} - \left\| \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \right| &= \left| \int_{\Omega} \left(\psi_n^2 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) - \psi^2 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} \sup_{y \in Y} |\psi_n^2(x, y) - \psi^2(x, y)| dx. \end{aligned}$$

La fonction g_n définie par

$$g_n(x) := \sup_{y \in Y} |\psi_n^2(x, y) - \psi^2(x, y)|$$

vérifie l'inégalité

$$g_n(x) \leq \sup_{y \in Y} (|\psi_n^2(x, y)|^2 - |\psi^2(x, y)|^2) = 2 \sup_{y \in Y} |\psi^2(x, y)| \in L^1(\Omega).$$

Pour tout $x \in \Omega$, on a $\psi(x, \cdot)$ continue sur Y et $\psi_n(x, \cdot) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \psi(x, \cdot)$ uniformément sur Y , c'est-à-dire

$$\sup_{y \in Y} |\psi_n(x, y) - \psi(x, y)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui nous permet d'affirmer que $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ presque partout. Ainsi, par théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\int_{\Omega} g_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi il existe un entier N_1 tel que pour tout $n > N_1$, on ait $\int_{\Omega} g_n(x) dx < \frac{\eta}{3}$, donc, pour tout $n > N_1$, on a

$$\left| \left\| \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} - \left\| \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \right| < \int_{\Omega} g_n(x) dx < \frac{\eta}{3}.$$

ce qu'on voulait. □

Lemme 2 *Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N_2$ on ait*

$$\left| \|\psi_n\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 - \|\psi\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \right| < \frac{\eta}{3}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire

$$\begin{aligned} \left| \|\psi_n\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 - \|\psi\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \right| &= \left| \iint_{\Omega \times Y} (\psi_n^2(x, y) - \psi^2(x, y)) \, dx \, dy \right| \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_Y \sup_{y \in Y} |\psi_n^2(x, y) - \psi^2(x, y)| \, dy \right) dx \\ &= \int_{\Omega} g_n(x) \left(\int_Y dy \right) dx = \int_{\Omega} g_n(x) \, dx. \end{aligned}$$

En choisissant $N_2 = N_1$ on peut conclure comme précédemment. \square

Lemme 3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon_0(n)$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0(n)$, on ait*

$$\left| \left\| \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\psi_n\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \right| < \frac{\eta}{3}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\left\| \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^3} \left(\int_{\Omega} \psi^2(x, y_j) \mathbf{1}_{(Y_j^n)^\#} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right).$$

D'après le théorème précédent, pour n et j fixés, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a

$$\mathbf{1}_{(Y_j^n)^\#} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \xrightarrow[\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))]{*} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{Y_j^n}(y) \, dy = \int_{Y_j^n} dy.$$

Considérons $h(x) := \psi^2(x, y_j)$, alors elle est bien dans $L^1(\Omega)$ car

$$\int_{\Omega} |h(x)| \, dx \leq \text{mes}(\Omega) \|\psi^2\|_{\infty},$$

ainsi pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \psi^2(x, y_j) \mathbf{1}_{(Y_j^n)^\#} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \int_{\Omega} \psi^2(x, y_j) \left(\int_{Y_j^n} dy \right) dx.$$

Avec ce qui a été obtenu précédemment, on a finalement

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} \psi^2(x, y_j) \mathbf{1}_{(Y_j^n)^\#} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right) \\ &= \sum_{j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^3} \int_{\Omega} \psi^2(x, y_j) \left(\int_{Y_j^n} dy \right) dx \\ &= \iint_{\Omega \times Y} \left(\sum_{j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^3} \psi^2(x, y_j) \mathbf{1}_{Y_j^n} \right) dx \, dy \\ &= \|\psi_n\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2, \end{aligned}$$

ce qu'on souhaitait. \square

Ainsi, à l'aide des lemmes précédent, en prenant $n > \sup(N_1, N_2)$, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0(n)$, on a

$$\begin{aligned} & \left| \left\| \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} - \left\| \psi_n \right\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \right| + \left| \left\| \psi_n \right\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 - \left\| \psi \right\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \right| + \left| \left\| \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} - \left\| \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \right| \\ & \leq \left| \left\| \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} - \left\| \psi \right\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \right| < \eta, \end{aligned}$$

et la deuxième égalité est prouvée. ■

6.1.2 Définition et critères de convergence.

On peut maintenant donner une définition de la *convergence double-échelle*.

Définition 6.1.8 *On dit qu'une suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de $L^2(\Omega)$ converge double-échelle vers une fonction $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$, si et seulement si pour tout $\varphi \in L^2(\Omega, C_\#(Y))$ on a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \iint_{\Omega \times Y} u_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy.$$

Cette convergence est notée $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$.

Proposition 6.1.9 *Pour tout $f \in L^2(\Omega, C_\#(Y))$, on a $(f(x, \frac{x}{\varepsilon})) \rightharpoonup f$.*

Preuve. Soit $f \in L^2(\Omega, C_\#(Y))$. D'après le théorème (6.1.7), on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} ((f + \varphi)^2 - f^2 - \varphi^2) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \\ &= \iint_{\Omega \times Y} ((f + \varphi)^2 - f^2 - \varphi^2)(x, y) dx dy \\ &= \iint_{\Omega \times Y} f(x, y) \varphi(x, y) dx dy \end{aligned}$$

ce que nous voulions. ■

Le théorème suivant porte sur un critère pour la convergence double-échelle, et est primordial dans la suite de notre étude.

Théorème 6.1.10 (Nguetseng) *Toute suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ bornée dans $L^2(\Omega)$ admet une sous-suite qui converge double-échelle.*

Preuve. Soit $\varphi \in L^2(\Omega, C_\#(Y))$. On pose

$$\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle := \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx.$$

D'après le théorème 6.1.7, on a

$$\begin{aligned} |\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega, C_\#(Y))}, \end{aligned}$$

donc la suite $(T_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une suite bornée de $(L^2(\Omega, C_{\#}(Y)))^*$. On sait que $L^2(\Omega, C_{\#}(Y))$ est un espace de Banach séparable, donc on peut extraire de cette suite une sous-suite, qu'on note encore $(T_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, convergente $*$ -faiblement dans $(L^2(\Omega, C_{\#}(Y)))^*$ vers $T \in (L^2(\Omega, C_{\#}(Y)))^*$ par le théorème (3.1.9). Ainsi, d'après ce qu'on a vu précédemment, on peut écrire

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle| \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times Y)}.$$

De plus, par le théorème 3.1.11, on peut prolonger T , forme linéaire continue sur $L^2(\Omega, C_{\#}(Y))$ en une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega \times Y)$, unique par densité, qu'on note encore T . En utilisant également le théorème 6.1.5, on a l'existence de $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ tel que pour tout $\varphi \in L^2(\Omega, C_{\#}(Y))$, on ait

$$\langle T, \varphi \rangle = \iint_{\Omega \times Y} u_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy.$$

ce qu'on voulait. ■

On énonce maintenant quelques théorèmes indispensables.

Théorème 6.1.11 *Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ bornée dans $L^2(\Omega)$, convergente double-échelle vers $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$. Alors on a*

1. *La convergence $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega)$, avec*

$$u(x) := \int_Y u_0(x, y) dy.$$

2. *Les inégalités*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

3. *Si $\|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)} = \|u\|_{L^2(\Omega)}$, alors $u_0(x, y) = u(x)$ pour presque tout $(x, y) \in \Omega \times Y$.*

Preuve.

1. Soit $v \in L^2(\Omega)$, on pose $\psi(x, y) := v(x)$. Donc $\psi \in L^2(\Omega, C_{\#}(Y))$ et

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) v(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \iint_{\Omega \times Y} u_0(x, y) \psi(x, y) dx dy \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_Y u_0(x, y) dy \right) v(x) dx, \end{aligned}$$

ainsi u_ε converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers $u(x) := \int_Y u_0(x, y) dy$.

2. Appliquons l'inégalité 6.1.3,

$$\varphi \left(\int_{\Omega} g d\lambda \right) \leq \int_{\Omega} \varphi \circ g d\lambda.$$

à la fonction strictement convexe $\varphi(z) := |z|^2$ et la probabilité $\lambda := \mathcal{L}_{|Y}^3$. On obtient alors

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left| \int_Y u_0(x, y) dy \right|^2 dx \leq \iint_{\Omega \times Y} |u_0(x, y)|^2 dx dy = \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2.$$

En considérant l'inégalité $a^2 \geq 2ab - b^2$, avec $a = u_\varepsilon(x)$ et $b = \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$. On a $\psi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathcal{D}_\#(Y))$, avec

$$\mathcal{D}_\#(Y) := \{\varphi \in C^\infty(Y) \mid \varphi \mathbf{1}_Y \in \mathcal{D}(Y)\}.$$

Alors

$$\int_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2 dx \geq 2 \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx - \int_{\Omega} \left| \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx.$$

Or, par la convergence $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ et du théorème (6.1.7), on a

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2 dx &\geq 2 \iint_{\Omega \times Y} u_0(x, y) \psi(x, y) dx dy - \iint_{\Omega \times Y} |\psi(x, y)|^2 dx dy \\ &= \iint_{\Omega \times Y} (2u_0 \psi - \psi^2)(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Par densité de $\mathcal{D}(\Omega \times Y)$ dans $L^2(\Omega \times Y)$, la formule s'étend à tout $\psi \in L^2(\Omega \times Y)$. Pour $\psi = u_0$, on obtient

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2 dx \geq \iint_{\Omega \times Y} u_0^2(x, y) dx dy.$$

3. Si $\|u\|_{L^2(\Omega \times Y)} = \|u\|_{L^2(\Omega)}$, alors

$$\int_{\Omega} \left(\int_Y |u_0(x, y)|^2 dy - |u(x)|^2 \right) dx = 0.$$

Par inégalité de Jensen, pour presque tout $x \in \Omega$, $\int_Y |u_0(x, y)|^2 dy \geq \left| \int_Y u_0(x, y) dy \right|^2 = |u(x)|^2$ presque partout, donc

$$\int_{\Omega} \left| \int_Y |u_0(x, y)|^2 dy - |u(x)|^2 \right| dx = 0,$$

ainsi on en déduit que $\int_Y |u_0(x, y)|^2 dy = |u(x)|^2$ presque partout. Appliquons la propriété (6.1.4) à $\varphi(t) := |t|^2$, $\lambda := \mathcal{L}_Y^3$; on obtient ainsi que pour presque tout $x \in \Omega$, l'existence de $c(x)$ tel que $u_0(x, y) = c(x)$ pour presque tout $y \in Y$. De plus

$$c(x) = \int_Y c(x) dy = \int_Y u_0(x, y) dy = u(x)$$

pour presque tout $x \in \Omega$. ■

6.2 Convergence double-échelle forte.

Dans cette section, on définit la notion de *convergence double-échelle forte* et on donne les résultats principaux qui mêlent les deux convergences double-échelles.

6.2.1 Définition et suite de fonctions admissibles.

On commence par deux définitions.

Définition 6.2.1 On dit qu'une suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de $L^2(\Omega)$ *converge double-échelle fortement* vers une fonction $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$, si et seulement si elle converge double échelle vers u_0 et si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)}.$$

Cette convergence est notée $u_\varepsilon \rightarrow\rightarrow u_0$.

Définition 6.2.2 On dit qu'une suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de $L^2(\Omega)$ est une *suite de fonctions tests admissibles pour la convergence double-échelle* associée à $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ si pour toute suite $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de $L^2(\Omega)$, quand $f_\varepsilon \rightarrow\rightarrow f_0$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x) \, dx = \iint_{\Omega \times Y} f_0(x, y) u_0(x, y) \, dx \, dy.$$

6.2.2 Théorèmes principaux.

On donne maintenant les résultats qui nous intéressent pour l'homogénéisation.

Théorème 6.2.3 Si on a deux suites $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telles que $u_\varepsilon \rightarrow\rightarrow u_0$ et $v_\varepsilon \rightharpoonup v_0$, alors on a la convergence

$$u_\varepsilon v_\varepsilon \xrightarrow[\sigma(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))]{*} g(x) := \int_Y u_0(x, y) v_0(x, y) \, dy.$$

Preuve. Soient $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ et $\eta > 0$. Par argument de densité, on a existence de $\psi \in L^2(\Omega, C_\#(Y))$ tel que $\|u_0 - \psi\|_{L^2(\Omega \times Y)} < \eta$. On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| u_\varepsilon - \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \, dx \right) \\ &= \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 + \|\psi\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 - 2 \iint_{\Omega \times Y} u_0(x, y) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \, dx \, dy \\ &= \|u_0 - \psi\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 < \eta^2, \end{aligned}$$

d'où les inégalités

$$\begin{aligned} & \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} \varphi(x) u_\varepsilon(x) v_\varepsilon(x) \, dx - \int_{\Omega} \varphi(x) \left(\int_Y u_0(x, y) v_0(x, y) \, dy \right) \, dx \right| \\ & \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} \varphi(x) (u_\varepsilon - \psi) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) v_\varepsilon(x) \, dx + \int_{\Omega} \varphi(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) v_\varepsilon(x) \, dx - \iint_{\Omega \times Y} \varphi(x) u_0(x, y) v_0(x, y) \, dy \, dx \right| \\ & \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi\|_\infty \left\| u_\varepsilon - \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \iint_{\Omega \times Y} \varphi(x) (\psi - u_0)(x, y) v_0(x, y) \, dx \, dy \\ & \leq C\eta. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$, on a

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} \varphi(x) u_\varepsilon(x) v_\varepsilon(x) \, dx - \int_{\Omega} \varphi(x) \left(\int_Y u_0(x, y) v_0(x, y) \, dy \right) \, dx \right| = 0,$$

donc on a bien $u_\varepsilon v_\varepsilon \xrightarrow[\sigma(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))]{*} g(x)$. ■

Théorème 6.2.4 *Si $u_0 \in L^2(\Omega, C_{\#}(Y))$, alors*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| u_{\varepsilon}(x) - u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Preuve. Si $u_0 \in L^2(\Omega, C_{\#}(Y))$, alors la suite $(u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}))_{\varepsilon > 0}$ est admissible, et donc

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| u_{\varepsilon}(x) - u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\|u_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right) \\ &= \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 + \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 - 2 \iint_{\Omega \times Y} u_0^2(x, y) dx dy \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. ■

Théorème 6.2.5 *On a la convergence $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u_0$ si et seulement si $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ est une suite de fonctions tests admissibles pour la convergence double-échelle associée à u_0 .*

Preuve. Supposons que $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u_0$, on applique le théorème (6.2.3) à la fonction test $\mathbf{1}_{\Omega} \in L^{\infty}(\Omega)$. On prend ainsi $(v_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ telle que $v_{\varepsilon} \rightharpoonup v_0$. Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega \times (0, t_1)} v_{\varepsilon}(x, t) u_{\varepsilon}(x, t) dx dt = \iiint_{\Omega \times (0, t_1) \times Y} v_0(x, t) u_0(x, t) dx dt dy.$$

Réciproquement, supposons que $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ est une suite de fonctions tests admissibles pour la convergence double-échelle associée à u_0 . Il suffit de remarquer que $\|u_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ et donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)}$. ■

Théorème 6.2.6 *Soit $S \in \mathcal{D}'(\Omega \times Y, \mathbb{R}^3)$, on a équivalence entre :*

- *il existe $T \in \mathcal{D}'(\Omega \times Y, \mathbb{R}^3)$ tel que $\mathbf{grad}_y T = S$,*
- *pour tout $i, j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on a $\partial_{y_j} S_i = \partial_{y_i} S_j$, c'est-à-dire que $\mathbf{rot}_y S = 0$,*
- *pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times Y, \mathbb{R}^3)$, si $\mathbf{div}_y \varphi = 0$ alors $\langle S, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega \times Y, \mathbb{R}^3), \mathcal{D}(\Omega \times Y, \mathbb{R}^3)} = 0$.*

Théorème 6.2.7 *Soit $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ suite de $H^1(\Omega)$, telle que*

$$u_{\varepsilon} \xrightarrow[\sigma(H^1(\Omega), (H^1(\Omega))^*)]{*} u, \quad u_{\varepsilon} \rightharpoonup u_0, \quad \text{et} \quad \nabla u_{\varepsilon} \rightharpoonup \chi_0.$$

où χ_0 est une fonction 1-périodique. Alors $u_0(x, y) = u(x)$ presque partout et il existe $w \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y))$ telle que $\chi_0(x, y) = \nabla u(x) + \nabla_y w_0(x, y)$.

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, C_{\#}^{\infty}(Y, \mathbb{R}^3))$. Par intégration par partie, on a

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon}(x) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = - \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) (\mathbf{div}_x \varphi) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) (\mathbf{div}_y \varphi) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx.$$

Or dans $L^2(\Omega)$, les suites $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ et $(\nabla u_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ sont bornées, donc on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) (\mathbf{div}_y \varphi) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = 0.$$

Compte-tenu de la convergence double-échelle de u_ε vers u_0 , on a aussi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) (\mathbf{div}_y \varphi) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \iint_{\Omega \times Y} u_0(x, y) (\mathbf{div}_y \varphi)(x, y) dx dy,$$

ainsi $\nabla_y u_0 = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega \times Y, \mathbb{R}^3)$. Donc $u_0(x, y) = \int_y u_0(x, y) dy = u_0(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$. Si on a $\mathbf{div}_y \varphi(x, y) = 0$ alors

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon(x) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = - \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) (\mathbf{div}_x \varphi) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx.$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, compte tenu des convergences double-échelle de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ vers $u_0 = u$ et de $(\nabla u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ vers χ_0 , il vient

$$\iint_{\Omega \times Y} \chi_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy = - \iint_{\Omega \times Y} u(x) (\mathbf{div}_x \varphi)(x, y) dx dy = \iint_{\Omega \times Y} \nabla u(x) \varphi(x, y) dx dy.$$

Pour $\mathcal{D}'(\Omega \times Y, \mathbb{R}^3)$, on déduit que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, C_{\#}^\infty(Y, \mathbb{R}^3))$, $\mathbf{div}_y \varphi(x, y) = 0$ et

$$\langle \chi_0 - \nabla u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega \times Y, \mathbb{R}^3), \mathcal{D}(\Omega \times Y, \mathbb{R}^3)} = 0.$$

D'après le théorème (6.2.6), il existe $w \in \mathcal{D}'(\Omega \times Y)$ tel que $\chi_0(x, y) = \nabla u(x) + \nabla_y w_0(x, y)$, w étant défini à une constante près. On admet pour la suite le résultat suivant :

Lemme. *Si on a $w \in \mathcal{D}'(\Omega \times Y)$ et $\nabla_y w \in L^2(\Omega \times Y)$, alors $w \in L^2(\Omega; H^1(Y))$.*

En substituant ainsi $\nabla u + \nabla_y w_0$ à χ_0 dans ce qu'on a vu précédemment, on obtient que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, C_{\#}^\infty(Y, \mathbb{R}^3))$, $(\mathbf{div}_y \varphi)(x, y) = 0$ et

$$\iint_{\Omega \times Y} \nabla_y w_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy = 0,$$

d'où

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\partial Y} w_0(x, y) \varphi(x, y) \cdot n dy \right) dx = 0.$$

On en déduit que pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $\eta \in C_{\#}^\infty(Y, \mathbb{R}^3)$, $(\mathbf{div}_y \eta)(x, y) = 0$ et

$$\int_{\partial Y} w_0(x, y) \eta(x, y) \cdot n dy = 0.$$

En prenant $\eta(x, y) = \varphi(y_1, y_2) e_3$, avec φ arbitraire, on obtient que w prend des valeurs égales sur les faces opposées de Y , d'équation $y_3 = 1$ et $y_3 = 0$. La même propriété ayant lieu sur les autres faces, on en déduit que $w(x, y) \in H_{\#}^1(Y)$ pour presque tout $x \in \Omega$. ■

Bibliographie

- [1] Grégoire Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1992.
- [2] Michel Bellieud. Homogenization of evolution problems for a composite medium with very small and heavy inclusions. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2005.
- [3] Haïm Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, 2010.
- [4] Lawrence C.Evans. *Partial differential equations*. American mathematical society, 2010.
- [5] Francois Murat & Doina Cioranescu. Un terme étrange venu d'ailleurs. *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, Collège de France*, 1992.
- [6] Lawrence C.Evans & Ronald F.Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, 1992.
- [7] Gabriel Ngusteng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1989.
- [8] Michel Bellieud. *Convergence double-échelle et applications en homogénéisation*. Polycopié de cours, 2006.
- [9] Michel Bellieud. *Analyse fonctionnelle, théorie de la mesure, espaces de Sobolev*. Polycopié de cours, 2022.
- [10] Xavier Gourdon. *Analyse*. Ellipses, 2008.