Modèles et méthodes numériques pour les interactions entre vagues et structures flottantes

Sacha Cardonna, Fabien Marche & François Vilar
Institute of Mathematics Alexander Grothendieck, University of Montpellier

Métiers autour des mathématiques (Licence et Master de Maths)
Montpellier, France – Février 2026

Suggestions de titres accrocheurs selon l'IA

- "Vagues 1 - Structures 0 : Comment un Thésard Redresse la Balance"
- "Shallow Water : Quand les Vagues Font du Surf sur Mes Structures !"
- "Vagues + Structures = Le Match de Boxe que Personne n'Attendait"
- "Mes Structures Flottantes : Elles Coulent... Sauf dans Mes Simulations !"

Le titre finalement retenu

Modèles et **méthodes numériques** pour les **interactions entre vagues et structures flottantes**

- **Modèles** : sous forme d'*équations aux dérivées partielles*, décrivant le comportement des vagues en eau peu profonde et leur interaction avec des structures flottantes,
- **Méthodes numériques** : algorithmes mathématiques qui permettent de résoudre des équations ne pouvant être résolues "à la main",
- **Interactions vagues-structures** : modéliser les interactions complexes entre les vagues et des plateformes offshore (bateaux, bouées, dispositifs houlomoteurs, etc.).

Plan d'aujourd'hui

1. **Parcours en mathématiques**
2. **Introduction aux EDPs et à la modélisation numérique**
3. **Travail de thèse**
4. **Mot de la fin**

Slides disponibles sur sachacardonna.github.io

Plan d'aujourd'hui

1. **Parcours en mathématiques**
2. **Introduction aux EDPs et à la modélisation numérique**
3. **Travail de thèse**
4. **Mot de la fin**

Slides disponibles sur sachacardonna.github.io

Cursus académique

Une trajectoire ni rectiligne ni uniforme

- **2016-2017** : PACES → Année de sortie de FIFA 17
- **2017-2019** : L1-L2 CUPGE MP → Choix entre les maths et la physique
- **2019-2020** : L3 Mathématiques → Premier stage de recherche
- **2020-2022** : M1 MF et MANU → Affinement du projet professionnel
- **2022-2023** : M2 MANU → Compétition et sélection

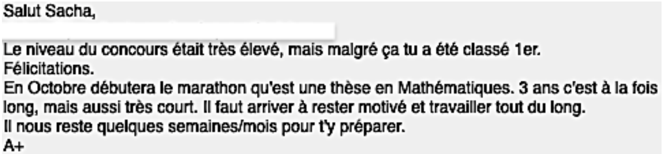
Obtenir un financement de thèse

En France, les thésards en sciences peuvent financer leurs études doctorales via plusieurs voies. Les principales sont :

- **Concours doctoral** : Allocations de recherche des écoles doctorales et universités données par le ministère de l'enseignement supérieur,
- **ANR/ERC/Région/etc.** : Bourses externes via appels à projets nationaux/internationaux,
- **CIFRE** : Contrats industriels en partenariat entreprises - laboratoires de recherche.

Ma thèse à l'IMAG

- **Sujet** : Modélisation et simulation numérique des interactions entre vagues et structures flottantes en eaux peu profondes
- **Mots-clés** : EDPs, analyse numérique, mécanique des fluides, calcul scientifique
- **Financement** : Allocation de recherche pour 2023-2026 obtenue au Concours Doctoral de l'I2S en 2023
- **Laboratoire** : Institut de Mathématiques Alexander Grothendieck (IMAG), Université de Montpellier
- **Directeurs** : Fabien Marche & François Vilar


Salut Sacha,

Le niveau du concours était très élevé, mais malgré ça tu a été classé 1er.
Félicitations.
En Octobre débutera le marathon qu'est une thèse en Mathématiques. 3 ans c'est à la fois long, mais aussi très court. Il faut arriver à rester motivé et travailler tout du long.
Il nous reste quelques semaines/mois pour t'y préparer.
A+

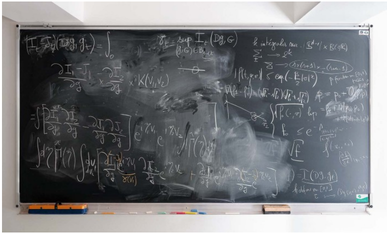
Figure: Avoir le financement c'est bien, mais le plus dur reste à venir *lol*

Plan d'aujourd'hui

Slides disponibles sur sachacardonna.github.io

Vie et postérité des mathématiques appliquées

1. Phénomènes réels
(p.ex. ondes, chaleur, biologie)



2. Modélisation mathématique
(décrire et étudier les équations)

3. Simulation numérique
(résoudre les équations sur ordinateur)

4. Prédiction et/ou décision
(risque, contrôle, conception)

Modélisation des phénomènes dépendant du temps

Les EDPs comme outil universel de modélisation

De nombreux phénomènes physiques, biologiques ou d'ingénierie sont gouvernés par des quantités qui évoluent dans le temps et l'espace.

$\hookrightarrow$ Les **Équations aux Dérivées Partielles (EDPs)** nous permettent de décrire comment ces quantités changent, souvent basées sur des lois de conservation ou des observations empiriques.

Quelques exemples de modèles basés sur les EDPs

- **Physique :** modéliser la diffusion de la température dans le corps d'une fusée lors de la rentrée atmosphérique,
- **Chimie :** décrire comment deux substances se mélangent pour former des motifs particuliers,
- **Biologie/Médecine :** prédire comment les signaux électriques vont se propager dans le cœur, aidant à comprendre les arythmies ou la défibrillation,
- **Finance :** déterminer le prix d'une option en fonction de la volatilité du marché et du délai d'expiration.

Définitions et terminologie (sans terme source)

Équations Différentielles Ordinaires (EDO)

Une **EDO** est une équation reliant une fonction inconnue $y(t)$ et ses dérivées :

$$F\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}(t), \frac{d^2y}{dt^2}(t), \dots\right) = 0$$

- $y(t)$: fonction inconnue dépendant uniquement d'une variable t,
- F : opérateur reliant y à ses dérivées successives.

Équations aux Dérivées Partielles (EDP) — La généralisation

Une **EDP** est une équation reliant une fonction inconnue $u(t, \boldsymbol{x})$, pour $\boldsymbol{x} := (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et ses dérivées partielles :

$$\mathscr{L}\left(t, u(t, \boldsymbol{x}), \frac{\partial u}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}), \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, \boldsymbol{x}), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, \boldsymbol{x}), \dots\right) = 0$$

- $u(t, \boldsymbol{x})$: fonction inconnue dépendant du temps t et de l'espace $\boldsymbol{x}$,
- $\mathscr{L}$: opérateur reliant u à ses dérivées partielles successives.

Un premier exemple

Équation de transport sur un segment (EDP scalaire d'ordre 1)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \quad \textbf{CI} : u(0,x) = u_0(x)$$

- $u : (t,x) \in [0,T] \times [a,b] \mapsto u(t,x)$ représente la concentration ou densité à transporter,
- $c \in \mathbb{R}^*$ est la vitesse de transport (supposée constante ici).

Signification physique

Une substance (polluant, chaleur, population...) se déplace à vitesse constante c sur un segment 1D sans changer d'intensité :

- **Exemple** : une canette de 8:6 sur un tapis roulant à Auchan,
- **Solution** : $u(t,x) = u_0(x-ct)$, la forme initiale se propage à droite (resp. à gauche) si $c > 0$ (resp. $c < 0$).

Question → Les EDPs admettent-elles toujours une solution analytique bien définie et suffisamment régulière?

Un exemple plus compliqué (de 1871)

Équation de Barré de Saint-Venant (vagues en eaux peu profondes)

$$\begin{cases} \partial_t \eta + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \mathbf{q} = S_1[\tau](\mathbf{v}), \\ \partial_t \mathbf{q} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \left(\mathbf{u} \otimes \mathbf{q} + \frac{g\eta}{2}(\eta - 2b)\mathbb{I}_2 \right) = \mathbf{S}_2[\tau](\mathbf{v}), \end{cases}$$

- $\mathbf{v} := (\eta, \mathbf{q}) : (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbf{v}(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3$
  $\hookrightarrow$ représente l'état des vagues (hauteur d'eau η et débit horizontal $\mathbf{q}$),
- $\mathbf{u} := (u_x, u_y) : (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbf{u}(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2$
  $\hookrightarrow$ décrit les vitesses horizontales des vagues,
- $b : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mapsto b(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$
  $\hookrightarrow$ paramétrise la topographie du fond marin,
- $\mathbf{S} := (S_1[\tau], \mathbf{S}_2[\tau])$
  $\hookrightarrow$ termes source modélisant des effets physiques (dispersion, friction...).

Complexité de la résolution des EDPs

Pas de solution analytique en général

Les EDPs ne peuvent généralement pas être résolues **analytiquement** :

- parfois seuls des **résultats théoriques partiels** sont disponibles (p.ex. existence ou unicité sous des hypothèses restrictives),
- dans certains cas, on connaît certaines solutions explicites, mais elles sont **rares** et valables **uniquement** pour des situations très spécifiques (p.ex. conditions initiales simples, géométries particulières).

$\hookrightarrow$ Pour obtenir des solutions exploitables, on utilise l'**analyse numérique**.

Analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Construire une approximation **rigoureuse** et **cohérente** du problème continu. En effet, nous voulons assurer :

- **Précision** $\rightarrow$ capturer la solution et ses potentielles singularités,
- **Stabilité/Robustesse** $\rightarrow$ prévenir les comportements non physiques provoqués par le passage au discret, tout en étant capable de gérer des situations physique réalistes.

Exemple simple : résoudre l'équation de transport par différences finies

Discrétiser l'espace et le temps

Au lieu de résoudre l'EDP sur $[a, b]$, on la résout sur une **version discrète** :

- Découper les domaines spatial et temporel en **petits intervalles**
  $\hookrightarrow \{x_i\}_{i\in[\![0,N_x]\!]}$ avec $x_i = a + i\Delta x$, $\{t_n\}_{n\in[\![0,N_t]\!]}$ avec $t_n = n\Delta t$,
- Approcher les dérivées par un **taux d'accroissement discret**
  $\hookrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}$, $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^n-u_i^n}{\Delta x}$, où $u_i^n \approx u(t_n, x_i)$,

Schéma numérique

Pour l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, on peut obtenir le schéma suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$$

1. On a remplacé les dérivées par leurs analogues discrètes,
2. On obtient alors la **formule explicite** $u_i^{n+1} = u_i^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n)$,
3. Ainsi, en connaissant u_i^0, on peut donc calculer u_i^1, puis u_i^2, etc.

Différences finies : évolution temporelle

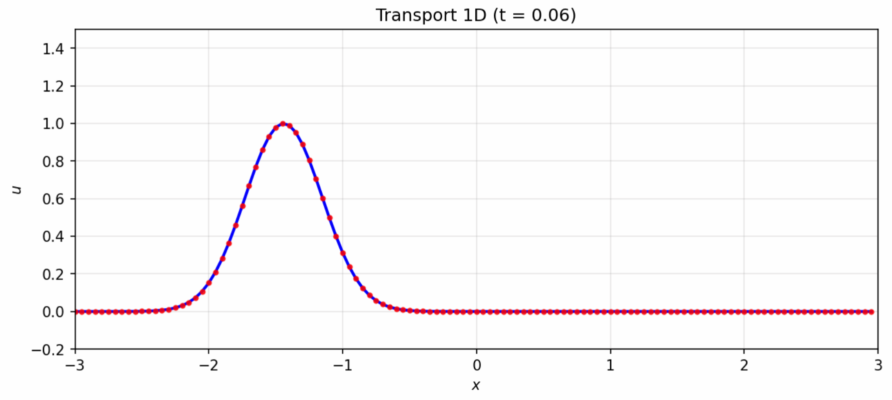


Figure: Simulation numérique de l'équation de transport 1D avec différences finies
Paramètres : $c = 1$, $x \in [-3, 3]$, Condition initiale : $u_0(x) = \exp(-6(x + 1.5)^2)$.

Plan d'aujourd'hui

Slides disponibles sur sachacardonna.github.io

Motivation physique et écologique : les énergies marines renouvelables

Figure: Conversion d'énergie houlomotrice via des structures flottantes (YouTube)

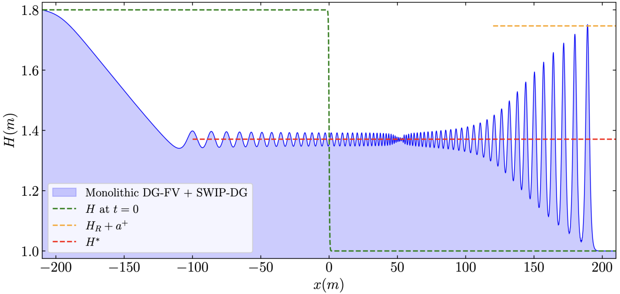
Motivation mathématique : développer de nouvelles méthodes numériques

Figure: Barrage hydraulique présent dans le jeu *Outer Wilds* (YouTube)

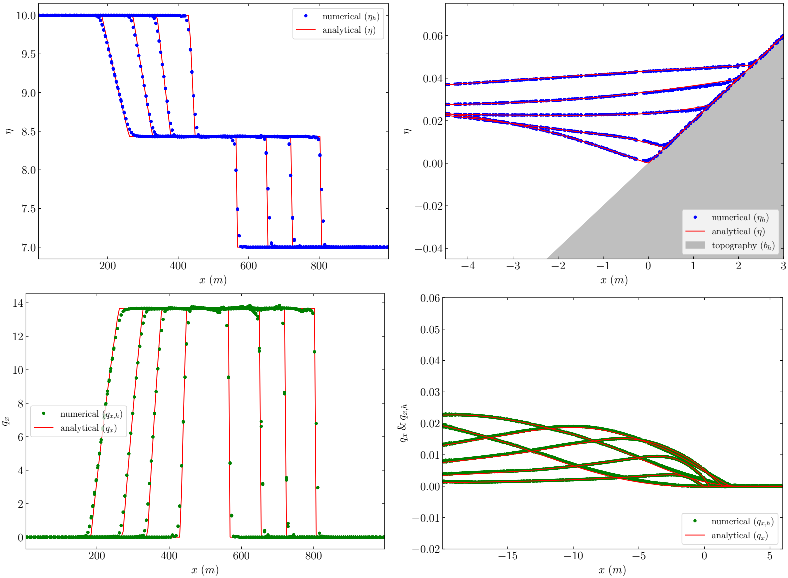
Ma thèse en trois points

Les objectifs principaux de ma thèse sont :

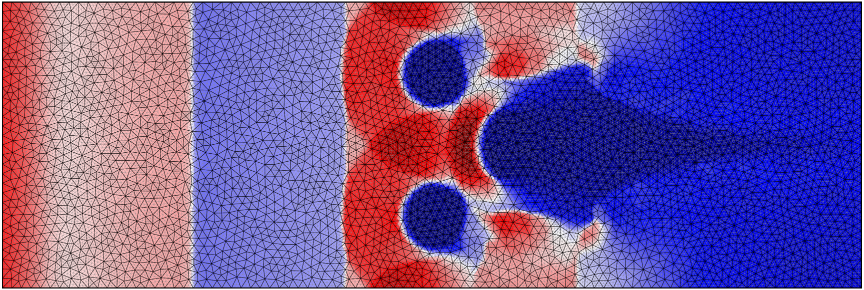
- **Modéliser** rigoureusement les interactions entre vagues et structures flottantes en eaux peu profondes sous forme de systèmes d'EDPs,
- **Développer** des méthodes numériques de résolutions de ces équations, à la fois robustes et (arbitrairement) précises,
- **Implémenter** des outils de simulation numériques efficaces pour étudier divers scénarios physiques et aider à la conception de structures flottantes optimisées.



Quelques résultats numériques avec solutions analytiques



Quelques simulations numériques



1. Rupture d'un barrage (MP4),
2. Interaction entre une vague et une île (MP4),
3. Tsunami sur des îles coniques (MP4),
4. Vague s'écrasant sur un obstacle statique immergé (MP4),
5. Flotteur avec mouvement vertical prescrit (MP4).

↪ Plus de simulations sur ma page !

Missions annexes de la thèse

Enseignement et transmission

- **Monitorat** : TD et TP auprès d'étudiants de Licence et Master,
- **Médiation scientifique** : expliquer la recherche au-delà du cercle académique (missions dans les lycées, conférences de vulgarisation, etc.).

Communication scientifique

- **Publications** : articles scientifiques dans des revues à comité de lecture,
- **Conférences** : présenter ses travaux à la communauté scientifique.

Développement professionnel

- **Formations complémentaires** : workshops, écoles thématiques, formations doctorales,
- **Réseautage** : construire des liens avec les collègues,
- **Préparation carrière** : apprendre à se "vendre", anticiper la suite ...

Plan d'aujourd'hui

1. Parcours en mathématiques
2. Introduction aux EDPs et à la modélisation numérique
3. Travail de thèse
4. **Mot de la fin**

Slides disponibles sur sachacardonna.github.io

Quelques conseils

Au travail et en études

- Étudier et pratiquer régulièrement,
- Rester humble et ouvert aux critiques constructives,
- *Trust the process*, même quand ça paraît difficile.

Dans la vie en général

- Garder un équilibre, ne pas s'enfermer dans le travail,
- Prendre soin de sa santé (physique et mentale),
- Ne pas suivre le chemin qu'on attend de vous, trouver le vôtre.

Gratitude

Merci pour votre attention et bon courage pour la suite!

Au travail et en études

- Étudier et pratiquer régulièrement,
- Rester humble et ouvert aux critiques constructives,
- *Trust the process*, même quand ça paraît difficile.

Dans la vie en général

- Garder un équilibre, ne pas s'enfermer dans le travail,
- Prendre soin de sa santé (physique et mentale),
- Ne pas suivre le chemin qu'on attend de vous, trouvez le vôtre!

Contact: *sacha.cardonna@umontpellier.fr*
Website: *sachacardonna.github.io*