Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2023-2024

HA8401H : Calcul Différentiel et Intégral en Plusieurs Variables
Chapitre 2 : Courbes paramétrées

Philippe Castillon ([1])

Exercice 1. Courbes paramétrées et fonctions d'une variable

1. Soit $\phi(t) = (x(t), y(t))$ la courbe paramétrée définie par $x(t) = \cos^2 t - 2$ et $y(t) = \sin^4 t + 4\sin^2 t + 4$. Déterminer le domaine de définition de ϕ. Montrer que le support de ϕ est le graphe d'une fonction d'une variable $f : D \to \mathbb{R}$ que l'on précisera (ainsi que son domaine de définition).
2. Soit $\phi(t) = (x(t), y(t))$ la courbe paramétrée définie par $x(t) = \cos t + 3$ et $y(t) = \sin t$. Déterminer le domaine de définition de ϕ et montrer que le support de ϕ n'est pas le graphe d'une fonction d'une variable.

Exercice 2. Soit $\phi(t) = (x(t), y(t))$ la courbe paramétrée définie par $x(t) = \frac{1}{t^2-t}$ et $y(t) = \frac{t}{t^2-1}$.
Montrer que ϕ possède un point double (si $M = \phi(t) = \phi(s)$ avec $t \neq s$, on pourra chercher à déterminer $t+s$ et ts pour en déduire t et s). Montrer que les tangentes en ce point sont orthogonales.

Exercice 3. Pour chacune des courbes paramétrées suivantes déterminer leurs points singuliers, étudier leurs natures et tracer l'allure de la courbe au voisinage de ces points.

1. $\phi(t) = \Big(2t^3 + 3t^2\,,\, 3t^2 + 6t\Big)$
2. $\phi(t) = \Big((1+\cos t)\sin 2t\,,\, \cos 2t\Big)$

Exercice 4. Pour chacune des courbes paramétrées suivantes, déterminer l'ensemble de définition et étudier les branches infinies

1. $\phi(t) = \left(\dfrac{t^3}{t^2-9}\,,\, \dfrac{t(t-2)}{t-3}\right)$
2. $\phi(t) = \Big((t-1)\ln|t|\,,\, (t+1)\ln|t|\Big)$

Exercice 5. On considère la courbe paramétrée $\phi : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x(t) = t - \tanh t \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{1}{\cosh t}$$

1. Étudier la parité des fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$. Quelle(s) symétrie(s) cela implique-t-il sur le support de ϕ ? Peut on réduire le domaine d'étude ?
2. Calculer ϕ', ϕ'' (on donne $\phi'''(t) = \big(2\frac{1-2\sinh^2 t}{\cosh^4 t}\,,\, \frac{5\tanh t - 6\tanh^3 t}{\cosh t}\big)$) et déterminer si ϕ à un/des point(s) stationnaire(s).
3. On se place en $t = 0$: donner la nature du point $\phi(0)$ ainsi que le comportement local de la courbe (faire un petit dessin).
4. On se place au voisinage de $t = +\infty$. Étudier la branche infinie (asymptote et position relative).
5. Faire le tableau de variations de ϕ. On pourra ajouter les limites à l'infini et les valeurs $x(0)$ et $y(0)$.
6. Tracer le support de ϕ ainsi que les tangentes et asymptotes étudiées aux questions précédentes.

1. Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5. Mèl : `philippe.castillon@umontpellier.fr`

Exercice 6. Tracer les courbes du plan suivantes, décrites en coordonnées polaires par

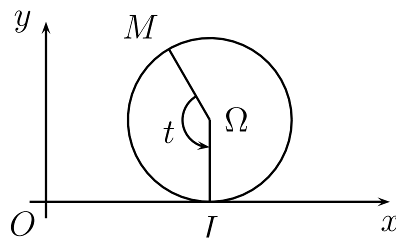
1. $r(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$,
2. $r(\theta) = \cos(\frac{\theta}{2})$.

Exercice 7. Tracer le support et calculer la longueur L des courbes paramétrées ϕ dans chacun des cas suivants :

1. L'astroïde définie par $\phi : t \mapsto \big(a\cos^3 t\,,\, a\sin^3 t\big)$ où $t \in [-\pi, \pi]$ et $a > 0$ donné.
2. La cardioïde d'équation polaire $r(\theta) = a(1 + \cos(\theta))$ où $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $a > 0$ donné.

Exercice 8. La cycloïde.

Un cercle $\mathscr{C}$, de rayon $R > 0$, roule sans glisser sur l'axe (Ox). On note I le point de contact entre $\mathscr{C}$ et (Ox) et on note Ω le centre de $\mathscr{C}$ (Ω et I sont mobiles). M est un point donné de $\mathscr{C}$ (M est mobile dans le plan, mais solidaire de $\mathscr{C}$). On suppose qu'au démarrage le point de contact I est l'origine de l'axe (Ox), et on pose $t = \widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}}$.



1. On utilise t comme paramètre. Montrer que la trajectoire décrite par le point M est donnée par la courbe paramétrée $\phi(t) = (x(t), y(t))$ où

$$\begin{cases} x(t) &= R(t - \sin t) \\ y(t) &= R(1 - \cos t) \end{cases}$$

2. Étudier et représenter la courbe paramétrée ϕ.
3. Calculer la longueur de la trajectoire entre deux points de contact.

Pour s'entrainer

Exercice 9. Pour chacune des courbes paramétrées suivantes déterminer leurs points singuliers, étudier leurs natures et tracer l'allure de la courbe au voisinage de ces points.

1. $\phi(t) = \Big(t^3 - 3t\,,\, t^3 - t^2 - t + 1\Big)$
2. $\phi(t) = \Big(\dfrac{t^3}{1+3t}\,,\, \dfrac{3t^2}{1+3t}\Big)$
3. $\phi(t) = \Big(\sin t\,,\, \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t}\Big)$
4. $\phi(t) = \Big(\dfrac{4t-3}{t^2+1}\,,\, \dfrac{2t-1}{t^2+2}\Big)$

Exercice 10. Pour chacune des courbes paramétrées suivantes, déterminer l'ensemble de définition et étudier les branches infinies

1. $\phi(t) = \Big(\dfrac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}\,,\, \dfrac{t^2}{(t+1)(t-1)}\Big)$
2. $\phi(t) = \Big((t+2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\,,\, (t-2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\Big)$
3. $\phi(t) = \Big(\dfrac{t}{t^2-1}\,,\, \dfrac{t+2}{(t-1)^2}\Big)$
4. $\phi(t) = \Big(\dfrac{6t^3}{1+3t}\,,\, \dfrac{3t^2}{1+3t}\Big)$

Exercice 11. On considère la courbe paramétrée $\phi : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$x(t) = 2\cos t + \cos 2t \qquad \text{et} \qquad y(t) = 2\sin t - \sin 2t$$

1. Étudier la parité des fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$. Quelle(s) symétrie(s) cela implique-t-il sur le support de ϕ ?
2. Calculer ϕ', ϕ'' et ϕ'''.
3. Soit $t \in [-\pi, \pi[$. Montrer que $\cos(t) - \cos(2t) = 0$ a trois solutions : $t = 0$, $t = 2\pi/3$ et $t = -2\pi/3$.

4. Calculer la position des points stationnaires. Donner leur nature ainsi que le comportement local de la courbe en leur voisinage (faire un petit dessin à chaque fois).
5. Calculer les tangentes aux points stationnaires et montrer qu'elles s'intersectent toutes en un même et unique point.
6. Faire le tableau de variations associé à ϕ.
7. La courbe ϕ est-elle paramétrée par l'abscisse curviligne ?
8. Montrer que la longueur de ϕ est 16.

Exercice 12. Tracer les courbes du plan suivantes, décrites en coordonnées polaires par

1. $r(\theta) = 4\cos(\theta)$.
2. $r(\theta) = \cos(\theta) + \frac{1}{\cos(\theta)}$,

Exercice 13. Étant donné un réel $\alpha > 0$, on considère la courbe paramétrée $\phi_\alpha : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi_\alpha(t) = \big(1 + \alpha \cos t\,,\ \tan t + \alpha \sin t\big)$$

1. Étude des points stationnaires :
   (a) Dans le cas $\alpha = 1$, étudier les points stationnaires éventuels de ϕ_α et, pour chacun, donner (en justifiant les calculs) sa nature et l'allure locale du support de ϕ.
   (b) Montrer qu'il n'y a pas de point stationnaire pour $\alpha \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.
2. Tangentes : discuter, suivant α, le nombre (et la position) des points du support de ϕ admettant une tangente horizontale ou verticale.
3. Un cas particulier : Dans le cas où $\alpha = 8$, étudier la courbe Γ (symétries, variations, étude asymptotique, représentation graphique. . .).
4. Donner l'allure de Γ dans les cas où $\alpha \in]0,1[$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$.