Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2023-2024

# HA8401H : Calcul Différentiel et Intégral en Plusieurs Variables
# Chapitre 3 : Topologie de $\mathbb{R}^n$

Philippe Castillon (1)

## Normes et topologie

**Exercice 1. Équivalence des normes usuelles.** Démontrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

**Exercice 2. Une norme plus exotique.** Soit $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels fixés avec $a \neq 0$. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$N_{a,b}(x, y) = \max\{|bx + y|, |(a+b)x + y|\}.$$

1. Montrer que l'application $N_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule unité dans le cas où $(a, b) = (1, 0)$.
   *Indication : montrer que $N_{1,0}(x, y) \leq 1$ si et seulement si $-1 \leq y \leq 1$ et $-1 \leq x + y \leq 1$.*

**Exercice 3. Convexité et inégalité triangulaire.** Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Montrer que la boule $B_r(a)$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$.
*Rappel : une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si pour tout $x, y \in A$ on a $\big\{(1-t)x + ty \;\big|\; t \in [0,1]\big\} \subset A$.*

**Exercice 4. Inégalités de Hölder et de Minkowski, norme $\|\cdot\|_p$.** Soit $p, q \in [1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}_+$ on a $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$. *On pourra étudier la fonction $x \mapsto \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - yx$.*
2. En déduire que pour tout $(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ on a
$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q}$$
*On pourra noter $A = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q}$, et considérer la somme $\left|\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{A}\frac{b_k}{B}\right|$*
3. En déduire que pour tout $(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ on a
$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{1/p}.$$
*On pourra écrire $\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p = \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|\,|a_k + b_k|^{p-1}$, et utiliser l'inégalité triangulaire.*
4. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ et que $\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$. *On pourra considérer la limite du quotient $\frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty}$*

1. Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5. Mèl : `philippe.castillon@umontpellier.fr`

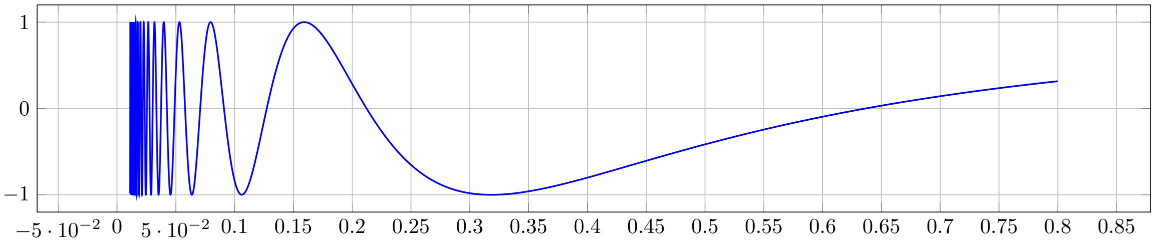
**Exercice 5. Intersection ou union d'ouverts.** Montrer qu'une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'une intersection infinie d'ouvert de $\mathbb{R}^n$ n'est pas nécessairement un ouvert. Qu'en est-il pour un union (finie ou infinie) d'ouverts ? Qu'en est-il pour les parties fermées de $\mathbb{R}^n$ ?

**Exercice 6.** Dessiner et déterminer la nature (ouvert ou fermé) du domaine de définition des fonctions de deux variables suivantes :

1. $f(x,y) = \frac{\ln(xy)}{x-y}$.
2. $g(x,y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$
3. $h(x,y) = \ln\left(\frac{x^2+y^2-16}{4-x^2-y^2}\right)$

**Exercice 7.** (Adhérence) Dessiner l'adhérence des ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

1. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 < 1\right\}$
2. $B = \left\{(t, \cos(1/t)) \in \mathbb{R}^2 | t > 0\right\}$




## Limites et continuité

**Exercice 8.** Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous et déterminer des sous-suites convergentes en fonction des paramètres réels $a$, $b$ et $c$

1. $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a^k, \sum_{k=1}^{n} b^{2k}, \sum_{k=1}^{n} c^{3k}\right)$
2. $u_n = \left(a^n, n^b, \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{n^c}\right)$

**Exercice 9.** Donner le domaine de définition et étudier la limite en l'origine des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y,z) = \frac{|x+y+z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
3. $f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
4. $f(x,y) = \frac{\cos(xy)-1}{x^2+y^2}$

**Exercice 10.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4-2x^2y+4y^2}$.

1. Étudier la limite à l'origine de la restriction de $f$ à la droite d'équation $y = ax$.
2. Calculer la limite à l'origine de de la restriction de $f$ à la parabole d'équation $y = x^2$
3. La fonction $f$ admet-elle une limite à l'origine ?

**Exercice 11.** Les fonctions suivantes (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$) sont-elles prolongeables par continuité en $(0,0)$ ?

1. $f(x,y) = \frac{xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
2. $f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{\cos x - \sqrt{1+y^2}}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x}\sin x\,,\ \frac{|x+y|^3}{x^2+y^2}\right)$.

**Exercice 12.** Soit $f$ la fonction définie par la formule $f(x,y) = \frac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y}$.

Déterminer le domaine de définition $D$, son adhérence $\bar{D}$, et étudier le prolongement par continuité de $f$ en chaque point de $\bar{D} \setminus D$.

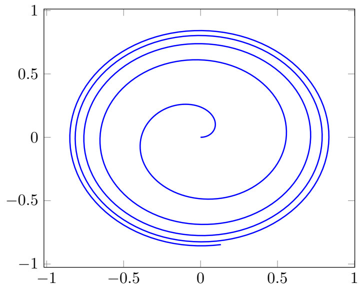
## Pour s'entrainer

**Exercice 13.** (Ouvert ou fermé) Dessiner et déterminer la nature (ouvert ou fermé) du domaine de définition des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2-y}}$
2. $g(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x^2-y^2}$
3. $h(x,y) = \frac{\ln(x-y^2)}{\ln(x+y)}$

**Exercice 14.** (Adhérence) Dessiner l'adhérence des ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y \leq x\}$
2. $C = \{\frac{t}{t+5}(\cos(t), \sin(t)), t \geq 0\}$




**Exercice 15.** Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous et déterminer des sous-suites convergentes en fonction des paramètres réels $a$, $b$ et $c$

1. $u_n = \left(\frac{(-1)^n}{n^a}, \frac{1}{n^b}, c^n\right)$
2. $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}, \sum_{k=1}^{n} \frac{b^k}{k!}, c\right)$

**Exercice 16.** Donner le domaine de définition et étudier la limite en l'origine des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$
4. $f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

**Exercice 17.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$.

1. Étudier la limite à l'origine de la restriction de $f$ à la droite d'équation $y = ax$.
2. Calculer la limite à l'origine de de la restriction de $f$ à la parabole d'équation $x + y = x^2$.
3. La fonction $f$ admet-elle une limite à l'origine ?

**Exercice 18.** Les fonctions suivantes (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$) sont-elles prolongeables par continuité en $(0,0)$ ?

1. $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \frac{e^{x^2}-e^{-y^2}}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = (x+y)\sin(\frac{e^{xy}}{x^2+y^2})$.
4. $f(x,y) = \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \frac{\sin(x^2)+\ln(1+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

**Exercice 19.** Pour chacune des fonctions $f$ suivantes, déterminer le domaine de définition $D$, son adhérence $\bar{D}$, et étudier le prolongement par continuité de $f$ en chaque point de $\bar{D} \setminus D$.

1. $f(x,y) = \frac{e^{2x}-e^{-2y}}{x+y}$
2. $f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$