Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2023-2024

HA8401H : Calcul Différentiel et Intégral en Plusieurs Variables
Chapitre 4 : Calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$.

Philippe Castillon ([1])

Dérivées partielles, différentielle

Exercice 1. Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables et calculer leurs gradients (si elles sont à valeurs dans $\mathbb{R}$) ou leur matrice jacobienne (si elles sont à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$).

1. $f(x,y,z) = z\,e^{\sin(2x)+xy}$
2. $f(x,y) = \big(y^3 \ln x, x^y\big)$
3. $f(x,y,z) = \big(x^2 - z^2, \sin x \sin y\big)$
4. $f(x,y) = \big(xy, \frac{1}{2}x^2 + y, \ln(1+x^2)\big)$

Exercice 2. Les fonctions suivantes sont-elles continues en $(0,0)$? Admettent-elles des dérivées partielles en 0 ? Des dérivées directionnelles ? Sont-elles différentiables ? Sont-elles $\mathscr{C}^1$?

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Exercice 3. On considère les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = (\cos(xy), y, x\exp(y^2)), \quad g(u,v,w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(u,v,w)$ de f et de g.
4. Retrouver le résultat de la question 2. en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$.
1. Déterminer et représenter ses courbes de niveau.
2. Calculer les dérivées partielles premières.
3. Écrire l'équation du plan tangent à f en $(0,0)$

Exercice 5. On considère l'équation $xe^y + ye^x = 0$:
1. Vérifier qu'elle définit une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.

1. Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5. Mèl : `philippe.castillon@umontpellier.fr`

2. Calculer le développement de Taylor de φ à l'ordre 2 centré en $x = 0$.

Exercice 6. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ solutions du système suivant : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^x + 2y \end{cases}$

Exercice 7. (Fonctions invariantes par translation) On cherche à déterminer les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(x + t, y + t) = f(x, y)$ pour tout $x, y, t \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.
2. On pose $u = x + y$ et $v = x - y$ et $F(u, v) = f(x, y)$. Exprimer x et y en fonction de u et v et montrer que $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = 0$.
3. Conclure.

Exercice 8. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. La divergence d'un champ de vecteurs $X = (X_1, \cdots, X_n) : U \to \mathbb{R}^n$ (de classe $\mathscr{C}^1$) est la fonction $\operatorname{div}(X) : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$\operatorname{div}(X)(x) = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}(x).$$

1. Soit $V \in \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On note $X : U \to \mathbb{R}^n$ le champ de vecteurs défini par $X(x) = f(x)V$. Calculer $\operatorname{div}(X)$ en fonction de V et ∇f.
2. Soit $X : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteur de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, et $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Calculer $\operatorname{div}(gX)$.

Ordres supérieurs

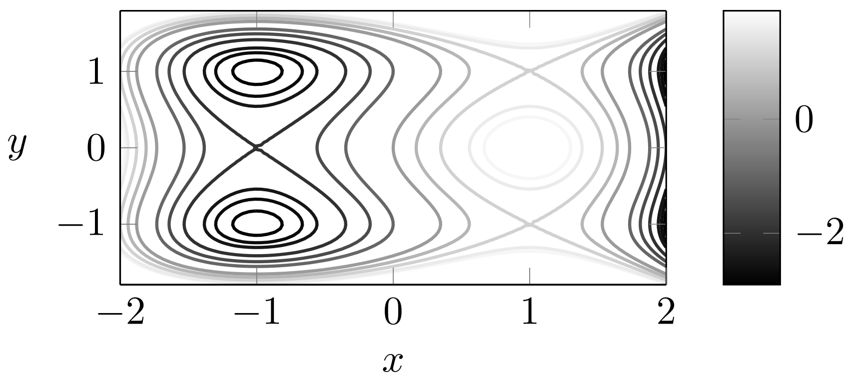
Exercice 9. Calculer un développement limité en l'origine et à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^2(x + y)$.
2. $f(x, y, z) = ze^{xy}$.

Exercice 10. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Un commentaire ?

Exercice 11. Voici les courbes de niveau de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$.



1. À partir de la figure : identifier les points critiques de f et préciser leur nature.
2. Retrouver les résultats de la question 1. par le calcul.

Exercice 12. Étudier les points critiques des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$.
2. $f(x,y) = x\big((\ln x)^2 + y^2\big)$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
3. $f(x,y) = (x-y)\,\mathrm{e}^{xy}$

Exercice 13. (Fonctions harmoniques) Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Le laplacien d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ est la fonction $\Delta f : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

La fonction f est harmonique sur U si $\Delta f = 0$.

1. Montrer que $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$ et en déduire $\Delta(fg)$ pour deux fonctions $f, g : U \to \mathbb{R}^2$.
2. On suppose que $f : U \to \mathbb{R}$ est harmonique et de classe $\mathscr{C}^3$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $g : (x,y) \mapsto x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont harmoniques.
3. On suppose désormais que $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ est radiale, c'est-à-dire qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$.
   (a) On suppose que f est harmonique, montrer que φ' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
   (b) En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et sur $\mathbb{R}^2$.

Pour s'entrainer

Exercice 14. Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables et calculer leurs gradients (si elles sont à valeurs dans $\mathbb{R}$) ou leur matrice jacobienne (si elles sont à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$).

1. $f(x,y,z) = (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-xz}$
2. $f(x,y) = (y^5 - 3xy, x\cos(e^{xy}))$
3. $f(x,y,z) = (\ln(x^2+z^2), x\cos(yz))$
4. $f(x,y) = (xy, \mathrm{e}^x \cos y, x\cos(x-y))$

Exercice 15. Les fonctions suivantes sont-elles continues en $(0,0)$? Admettent-elles des dérivées partielles en 0 ? Des dérivées directionnelles ? Sont-elles différentiables ? Sont-elles $\mathscr{C}^1$?

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2+x^2y^2+x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Exercice 16. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(x,y,z) = (x^2-y^2, y^2-z^2, z^2-x^2)$$

et une application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Écrire les matrices jacobiennes de φ et de l'application $g = f \circ \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(t,t,t) + \frac{\partial g}{\partial y}(t,t,t) + \frac{\partial g}{\partial z}(t,t,t)$ pour tout réel t.

Exercice 17. Soit $f : (u,v) \mapsto f(u,v)$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On définit des fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(x,y) = f(y,x)$ et $h(x) = f(x,-x)$.

Montrer que g et f sont différentiables et exprimer leur différentielles en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 18. On considère la fonction définie par $f(x,y) = x^2y + \ln(1+y^2)$ dont voici le graphe :

1. Vérifier que le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas à l'origine.
2. Montrer que, au voisinage de l'origine, l'ensemble $L_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = 0\right\}$ est constitué de l'axe des abscisses et d'une courbe dont on déterminera une expression.
3. Déterminer des fonctions $x \mapsto \varphi(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I contenant 0 et telles que $f(x,\varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exercice 19. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ solutions des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 \end{cases}$
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2$

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(tx,ty)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. On suppose maintenant que $f(tx,ty) = tf(x,y)$ pour tout x, y et t.
   (a) Montrer que pour tout $x,y,t \in \mathbb{R}$ on a
   $$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)y.$$
   (b) En déduire qu'il existe deux réel a et b tels que $f(x,y) = ax + by$.

Exercice 21. Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

Exercice 22. (Équation de transport) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et telles que $\frac{\partial f}{\partial x} + 2x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Exercice 23. Calculer un développement limité en l'origine et à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = e^{xy}$.
2. $f(x,y,z) = x^2(y-z)$.

Exercice 24. Étudier les points critiques des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
2. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$
3. $f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{x-y}$

Exercice 25. (Équation des cordes vibrantes) Soit c un réel non nul. On cherche à caractériser les solutions de classe $\mathscr{C}^2$ de l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) \tag{$\star$}$$

1. Soient $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On pose $f(x,t) = A(x-ct) + B(x+ct)$. Montrer que w est solution de l'équation $(\star)$
2. On suppose que f est solution de $(\star)$, et on pose $F(u,v) = f(x,y)$ avec $u = x - ct$ et $v = x + ct$. Exprimer x et y en fonction de u et v, calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ et montrer que qu'il existe deux fonctions $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que $f(x,y) = A(x-ct) + B(x+ct)$.