



HA8401H : Calcul Différentiel et Intégral en Plusieurs Variables

Chapitre 5 : Intégrales multiples

Philippe Castillon (¹)

Exercice 1. Soit $0 < a < b$ et $0 < h$ des nombres réels, et soit T le triangle de \mathbb{R}^2 de sommets $(0, 0)$, (a, h) et $(b, 0)$. Calculer l'aire et le centre de gravité de T .

Exercice 2. Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $I_1 = \iint_D \frac{dx dy}{(x+y+1)^2}$ où $D = [0, 1]^2$.
2. $I_2 = \iint_D \cos(\pi(x-y)) dx dy$ où $D = [0, 1] \times [1, 2]$.
3. $I_3 = \iint_D e^{x^2} dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.
4. $I_4 = \iint_D (x+y)e^{-x}e^{-y} dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.
5. $I_5 = \iint_D x \sin y dx dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \cos y\}$. Dessiner !
6. $I_6 = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy$ où $D = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x^2+y^2 \geq 1\}$.

Exercice 3. Le simplexe est la partie $E \subset \mathbb{R}^3$ définie par $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$.

1. Montrer que E admet des descriptions en piles et en tranches, et calculer $\text{Vol}(E)$ de deux façons différentes.
2. Calculer $\iiint_E \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$.

Exercice 4. Pour tout $a > 0$ on note $I(a) = \int_{-a}^a e^{-t^2} dt$. Le but de l'exercice est de calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a)$.

Dans la suite, on note $K_a = [-a, a]^2$ le carré de côté $2a$ centré en l'origine et $B_R(0)$ la boule de rayon R centrée en l'origine.

1. Montrer que $I(a)^2 = \iint_{K_a} e^{-x^2-y^2} dx dy$
2. Montrer que $\iint_{B_a(0)} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{K_a} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{B_{a\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dx dy$
3. Pour tout $R > 0$, calculer $\iint_{B_R(0)} e^{-x^2-y^2} dx dy$ en faisant un changement de variables.
4. Conclure.

¹. Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5.
Mél : philippe.castillon@umontpellier.fr