



Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2023-2024



HA8401H - PEIP Semestre 4

—

Calcul Différentiel et Intégral en Plusieurs Variables

—

Philippe Castillon, Benjamin Charlier, Matthieu Hillairet (¹)

—

Version du 12 mars 2024.

1. Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5.
Mèl : philippe.castillon@umontpellier.fr

Table des matières

1 Motivations, premières notions	5
1.1 Motivations	5
1.2 Fonctions de plusieurs variables	6
1.2.1 Définitions, exemples	6
1.2.2 Représentation	6
1.2.3 Ensembles de niveaux	8
1.2.4 Fonctions partielles	10
1.3 Fonctions vectorielles	11
1.3.1 Courbes paramétrées	11
1.3.2 Fonctions vectorielle de plusieurs variables, champ de vecteurs	13
2 Courbes paramétrées	15
2.1 Fonctions vectorielles d'une variable réelle	15
2.1.1 Limite et continuité	15
2.1.2 Dérivabilité	17
2.2 Courbes paramétrées	19
2.2.1 Définition, exemples	19
2.2.2 Interprétation cinématique et paramétrage	20
2.2.3 Longueur, abscisse curviligne	23
2.3 Étude d'un arc paramétré	24
2.3.1 Étude locale	24
2.3.2 Branches infinies	25
2.3.3 Courbes en coordonnées polaires	26
2.3.4 Plan d'étude d'un arc paramétré	27
3 Topologie de \mathbb{R}^n	29
3.1 Normes et distances sur \mathbb{R}^n	29
3.1.1 Définition, exemples	29
3.1.2 Boules ouvertes, fermées	32
3.1.3 Normes équivalentes	33
3.2 limites et continuité	34
3.2.1 Limites de suites	34
3.2.2 Limites de fonctions	35
3.2.3 Continuité	37
3.3 Notions élémentaires de topologie	38
3.3.1 Ouverts et fermés	38
3.3.2 Intérieur et adhérence	40
3.3.3 Compacité	41
3.3.4 Pour aller un peu plus loin : distance sur un ensemble	41

4	Calcul différentiel sur \mathbb{R}^n	43
4.1	Différentiabilité	43
4.1.1	Dérivées directionnelles, dérivées partielles	43
4.1.2	Différentiabilité	44
4.1.3	Le cas des fonctions à valeurs réelles	47
4.2	Fonctions de classe \mathcal{C}^1	49
4.2.1	Définition, propriétés	49
4.2.2	Difféomorphismes	50
4.2.3	Fonctions implicites	51
4.3	Dérivées d'ordres supérieurs	52
4.3.1	Définitions et propriétés	52
4.3.2	Formule de Taylor et matrice hessienne	53
4.3.3	Étude des extréma locaux	54
5	Intégrales multiples	57
5.1	Rappel sur les intégrales simples	57
5.1.1	Construction de l'intégrale de Riemann	57
5.1.2	Intégrales à paramètres	57
5.2	Intégrales doubles	58
5.2.1	Intégrales double sur un rectangle	59
5.2.2	Parties élémentaires, parties simples	60
5.2.3	Intégrales doubles sur une partie simple	61
5.2.4	Propriétés des intégrales doubles	61
5.3	Intégrales triples	62
5.3.1	Intégrales triples sur un pavé	62
5.3.2	Sommation par piles, sommations par tranches	62
5.4	Formule de changement de variables	63
5.4.1	Cas des intégrales doubles	63
5.4.2	Cas des intégrales triples	64
5.5	Circulation d'un champ de vecteurs	64
5.5.1	Définitions et propriétés	64
5.5.2	Champs de gradient	66
5.5.3	Formule de Green-Riemann	66

Chapitre 1

Motivations, premières notions

1.1 Motivations

L'étude des fonctions d'une variable réelle peut être vue comme l'étude d'une seule quantité (la valeur prise par la fonction) dépendant d'un seul paramètre (la variable). Cependant, les phénomènes physiques sont généralement décrits par plusieurs quantités qui dépendent de plusieurs paramètres. On peut citer par exemple

- en thermodynamiques, les quantités appelées fonctions d'état (comme l'entropie, l'enthalpie, l'énergie interne...) dépendent de paramètres appelés variables d'états (généralement la pression, le volume et la température). Cette dépendance est donnée par la nature du système considéré (gaz parfait, gaz de Van der Waals, ...)
- En cinématique, on s'intéresse à la position et/ou à la vitesse d'un solide ponctuel en fonction du temps. On a une seule variable (le temps) et plusieurs quantités (les coordonnées de la position du point, celles de son vecteur vitesse). Là encore, la relation entre ces quantités et la variable est donnée par la nature du système physique (solide pesant dans un champ gravitationnel, solide chargé dans un champ électromagnétique, ...)
- Si on s'intéresse à la dynamique du solide, les quantités précédentes décrivent la position de son centre de gravité, et il faut rajouter les quantités décrivant le mouvement du solide autour de son centre de gravité.
- En météorologie, on va par exemple considérer la température (une quantité), la pression (une quantité) et les vent (deux quantités : direction et vitesse) en fonction de la position (latitude et longitude deux variables)

Pour donner un cadre mathématique permettant la description des ces phénomènes physiques, il faut s'intéresser à des "fonctions" de la forme

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$$

Pour ces fonctions, la "variable" est un n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et les "valeurs prises" sont des p -uplets $(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^p$.

Le but de ce cours est de d'étendre pour ces fonctions les notions connues pour les fonctions d'une seule variable à valeurs réelles :

- Limite
- continuité
- dérivabilité
- intégration

1.2 Fonctions de plusieurs variables

1.2.1 Définitions, exemples

Définition 1.2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une fonction f de n variables et à valeurs réelles (aussi appelé champ scalaire) est une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Elle fait correspondre à tout point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ un unique point $y = f(x)$ de \mathbb{R} . On la note

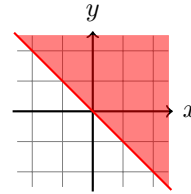
$$f : \begin{cases} D & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Dans la suite de ce chapitre nous donnerons principalement des exemples où $n = 2$ et $n = 3$.

Exemple. Le domaine de définition la fonction $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ est l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, | x + y \geq 0\}.$$

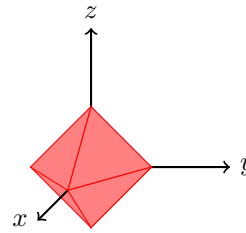
C'est la partie du plan représentée à droite. Les valeurs prises par la fonction parcourent tout l'ensemble des réels positifs ou nul : $f(D) = \mathbb{R}^+$.



Exemple. Le domaine de définition de la fonction $f(x, y, z) = \ln(1 - |x| - |y| - |z|)$ est l'ensemble

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | |x| + |y| + |z| < 1\}$$

qui est représenté à droite. Les valeurs prises par la fonction parcourent tout l'ensemble des réels positifs ou nul : $f(D) = \mathbb{R}$.



1.2.2 Représentation

Définition 1.2.2. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n variables définie sur D . Le graphe de f est le sous-ensemble $\mathcal{G}(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ défini par

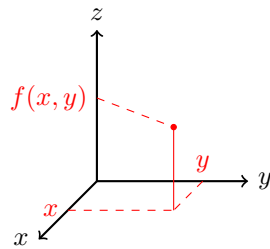
$$\mathcal{G}(f) = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) | (x_1, \dots, x_n) \in D\}$$

Si $n = 1$ et $D \subset \mathbb{R}$, on retrouve la définition usuelle du graphe d'une fonction d'une variable. On peut représenter $\mathcal{G}(f)$ par une courbe dans le plan.

Lorsque $n \geq 3$, le graphe de f est un sous-ensemble d'un espace à $n + 1 \geq 4$ dimensions, qu'il est donc difficile de représenter.

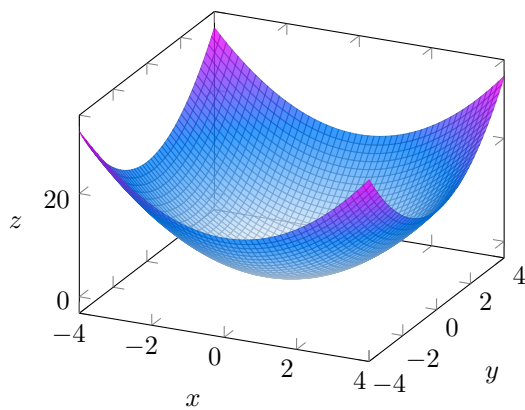
Dans le cas où $n = 2$, le graphe $\mathcal{G}(f) = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}$ est un sous ensemble de \mathbb{R}^3 . Lorsque la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est régulière on peut représenter ce graphe comme une surface (on peut penser à un "drap qui flotte") dans \mathbb{R}^3 .

Les axes Ox et Oy (qui forment le plus souvent le plan horizontal dans les représentations graphiques) sont réservés aux variables x et y tandis que l'axe Oz (le plus souvent l'axe vertical) représente la valeur de $z = f(x, y)$. Ainsi, pour tout $(x, y) \in D$ on a le point $(x, y, f(x, y)) \in \mathcal{G}(f)$.

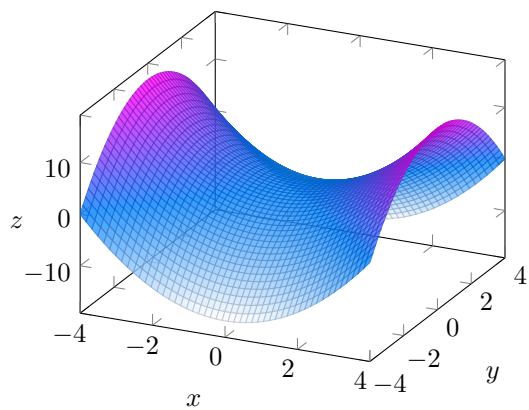


Pour visualiser ces surfaces dans l'espace, on peut utiliser une représentation en perspective

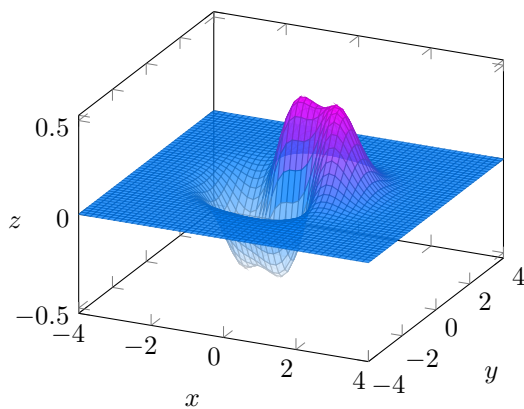
Exemple. Voici quelques exemples de graphes de fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Les couleurs ne servent qu'à améliorer la lisibilité.



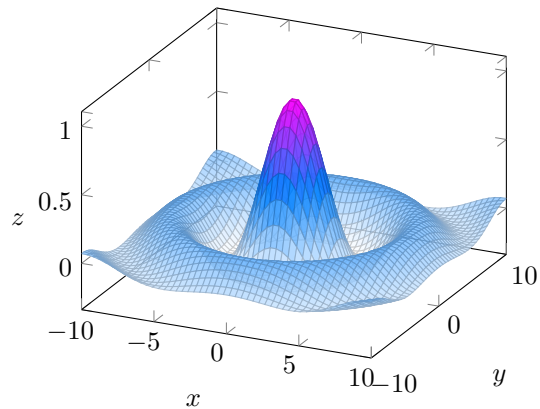
Paraboloïde : $f(x, y) = x^2 + y^2$



Selle de cheval : $f(x, y) = x^2 - y^2$



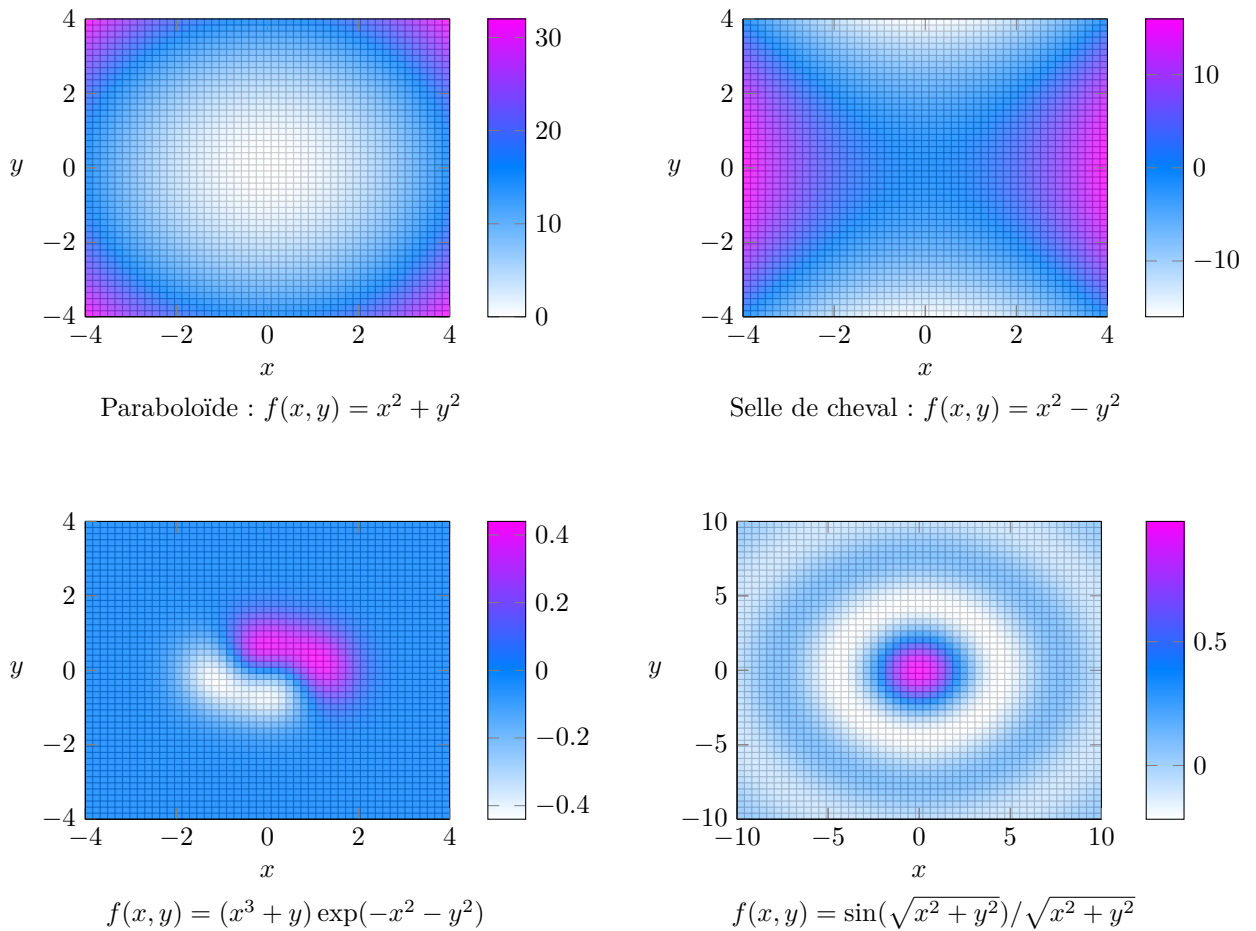
$f(x, y) = (x^3 + y) \exp(-x^2 - y^2)$



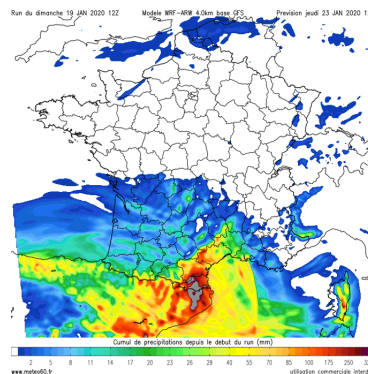
$f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) / \sqrt{x^2 + y^2}$

Une autre méthode de visualisation consiste à utiliser un code couleur pour représenter les différentes valeurs prises par la fonction : la façon dont les couleurs codent l'intensité du signal est indiqué par une échelle de couleurs présente à côté du graphique.

Exemple. Voici par exemple les fonctions du paragraphe précédent.



Exemple. Un exemple issu des prévisions météo donnant les cumuls de pluie prévu par un modèle :



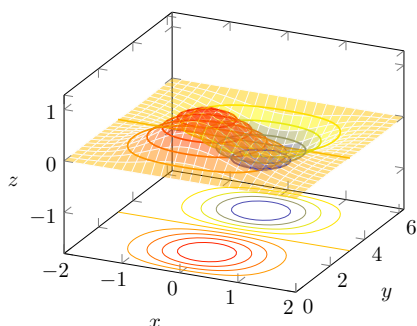
1.2.3 Ensembles de niveaux

Définition 1.2.3. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n variables définie sur D . L'ensemble de niveau λ de f est

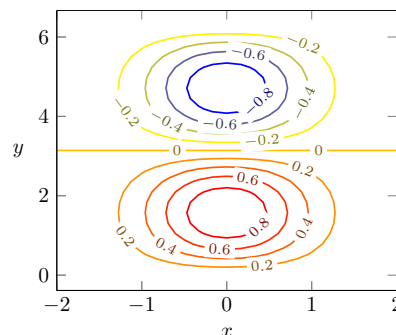
$$\mathcal{L}_\lambda(f) = \{x \in D \mid f(x) = \lambda\}.$$

Dans le cas des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , on parle de lignes de niveau. Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}_\lambda(f)$, alors $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda$ et $(x_1, \dots, x_n, \lambda) \in \mathcal{G}(f)$. Réciproquement, si un point $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{G}(f)$ a

pour dernière coordonnée $x_{n+1} = \lambda$, alors $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}_\lambda(f)$. On peut donc tracer les lignes de niveau en projetant sur le plan horizontal $z = 0$ la courbe donnée par l'intersection du plan horizontal de hauteur λ (ie. le plan d'équation $z = \lambda$) et le graphe de la fonction f .



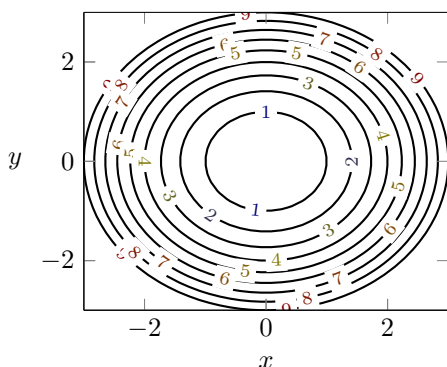
Graphe de $f(x, y) = \sin(y)e^{-x^2}$



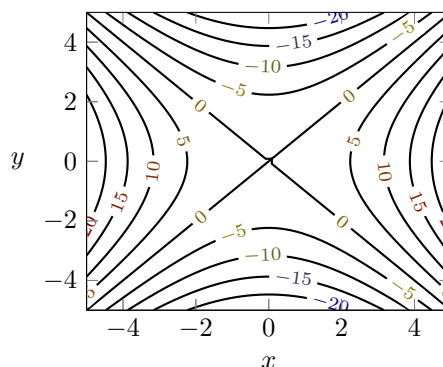
Lignes de niveau de $f(x, y) = \sin(y)e^{-x^2}$

En pratique, on représente simultanément différentes courbes de niveau pour visualiser les différents niveaux du graphe. Cette représentation s'apparente aux cartes géographiques où le niveau correspond à l'altitude. En bref, les courbes de niveau d'une fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ fournissent une représentation géométrique de f dans le plan, alors que son graphe en donne une dans l'espace.

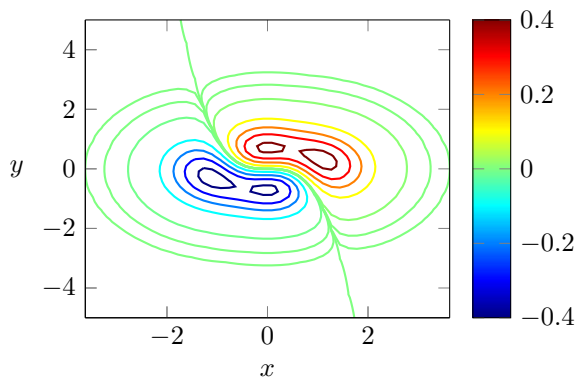
Exemple. Voici les lignes de niveau des fonctions du paragraphe précédent représentées en couleur ou avec des labels.



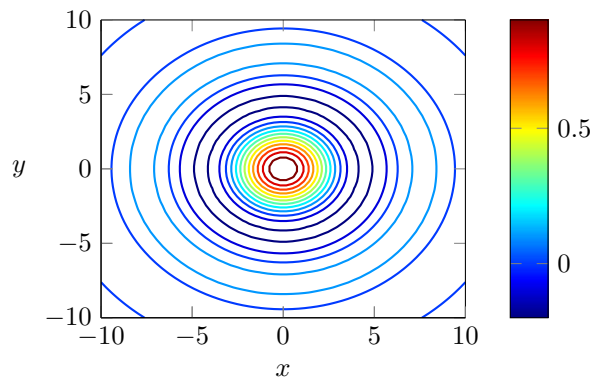
Paraboloïde : $f(x, y) = x^2 + y^2$



Selle de cheval : $f(x, y) = x^2 - y^2$

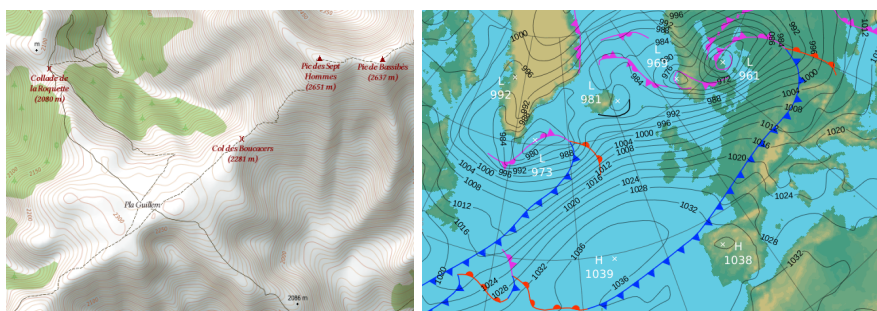


$f(x, y) = (x^3 + y) \exp(-x^2 - y^2)$



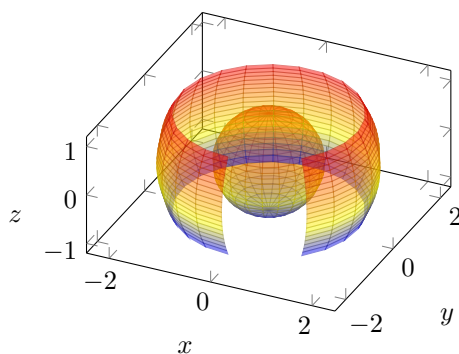
$f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})/\sqrt{x^2 + y^2}$

Quelques exemples de la vie courante :

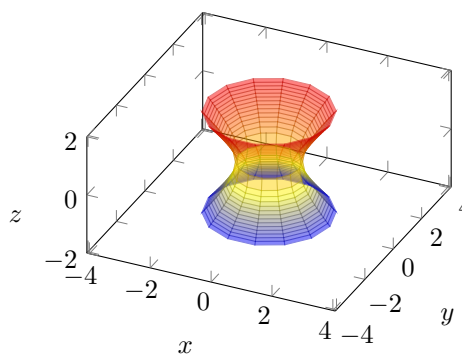


Pour les fonctions de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} , les ensembles de niveau sont appelés surfaces de niveau. Ces surfaces sont des sous-ensembles de \mathbb{R}^3 et cela permet de représenter la fonction alors qu'il serait délicat de représenter son graphe, qui est un sous-ensemble de \mathbb{R}^4 .

Exemple. Lorsque la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale, on parle de surfaces algébriques. En voici deux exemples classiques :



Sphère : surfaces de niveau 1 et 4 (tronquée) de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$



Paraboloïde : Surface de niveau 1 de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

1.2.4 Fonctions partielles

Une façon d'étudier les fonctions de n variables est de se ramener à des fonctions d'une seule variable en "gelant" $n - 1$ variables.

Définition 1.2.4. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n variables définie sur D . Pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$, et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la $i^{\text{ème}}$ fonction partielle en a de f est la fonction d'une variable

$$f_a^i : \begin{cases} D_a^i & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{cases}$$

où $D_a^i = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \in D\}$.

Une fonction partielle de f étant une fonction d'une seule variable, son graphe est une courbe du plan. Cette courbe s'obtient en intersectant le graphe $\mathcal{G}(f)$ par un plan affine de dimension 2 dans \mathbb{R}^{n+1} .

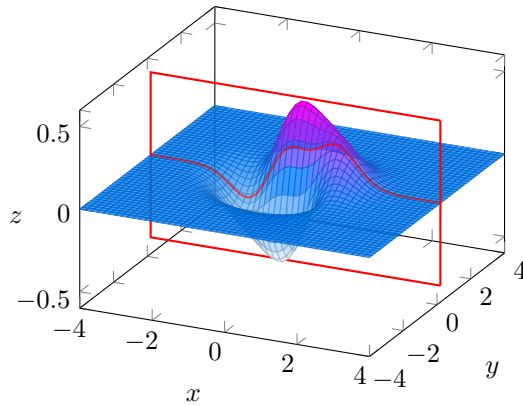
Dans le cas où $n = 2$, si $(a, b) \in D$ les fonctions partielles de f en (a, b) sont

$$f_{(a,b)}^1 : x \mapsto f(x, b) \quad \text{et} \quad f_{(a,b)}^2 : y \mapsto f(a, y).$$

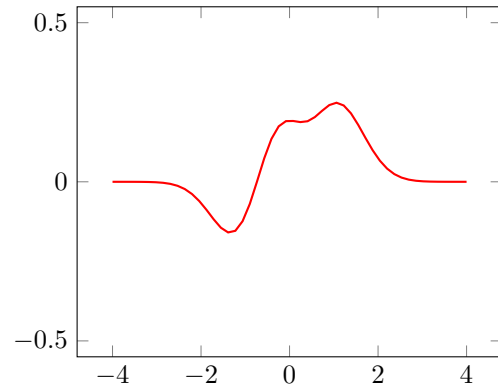
L'intersection du graphe $\mathcal{G}(f)$ avec le plan affine d'équation $y = b$ donne $\{(x, b, f(x, b)) \mid (x, b) \in D\}$ et en projetant cet ensemble sur le plan des (x, z) on obtient $\{(x, f(x, b)) \mid x \in D_{(a,b)}^1\}$ qui est le graphe de la fonction $f_{(a,b)}^1$.

De même, l'intersection de $\mathcal{G}(f)$ avec le plan d'équation $x = a$ donne $\{(a, y, f(a, y)) \mid (a, y) \in D\}$ et en projetant cet ensemble sur le plan des (y, z) on obtient $\{(y, f(a, y)) \mid y \in D_{(a,b)}^2\}$ qui est le graphe de la fonction $f_{(a,b)}^2$.

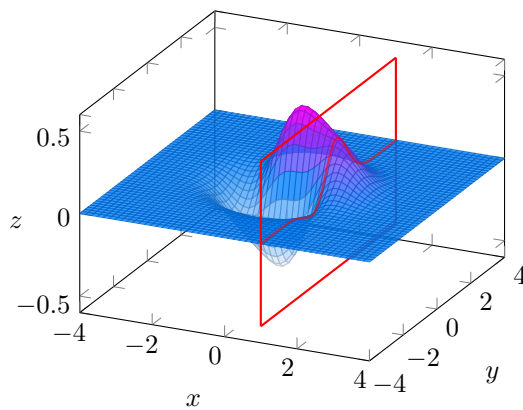
Exemple. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (\frac{1}{2}x^3 + y)e^{-x^2 - y^2}$, et soit $(a, b) = (1, \frac{1}{5})$. Les fonctions partielles de f en (a, b) sont $f_{(1, \frac{1}{5})}^1 : x \mapsto f(x, \frac{1}{5}) = (\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{5})e^{-x^2 - \frac{1}{25}}$ et $f_{(1, \frac{1}{5})}^2 : y \mapsto f(1, y) = (\frac{1}{2} + y)e^{-1 - y^2}$. On en a les représentations suivantes :



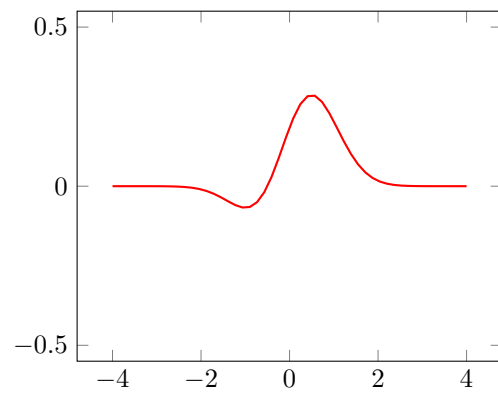
$$f(x, y) = (\frac{1}{2}x^3 + y)e^{-x^2 - y^2}$$



Fonction partielle $f_{(1, \frac{1}{5})}^1 : x \mapsto f(x, \frac{1}{5})$



$$f(x, y) = (\frac{1}{2}x^3 + y)e^{-x^2 - y^2}$$



Fonction partielle $f_{(1, \frac{1}{5})}^2 : y \mapsto f(1, y)$

On reviendra sur cette notion de fonctions partielles dans le chapitre sur la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables.

1.3 Fonctions vectorielles

1.3.1 Courbes paramétrées

Définition 1.3.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une fonction vectorielle d'une variable réelle est une application f définie sur un sous ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R}^n . On la note

$$f : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & f(t) \end{cases}$$

L'ensemble des applications de I dans \mathbb{R}^n se notera $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Alors toute $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ est définie par ses fonctions coordonnées $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f : t \mapsto f(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + \dots + f_n(t)e_n = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)).$$

En pratique, on considèrera pratiquement toujours les cas $n = 2$ ou $n = 3$. En munissant \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 de leurs bases canoniques respective, on peut alors identifier un vecteur à la matrice de ses coordonnées. On pourra donc noter également

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad f : t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$$

En résumé, considérer une fonction vectorielle d'une variable réelle, c'est simplement considérer n fonctions réelles de la variable réelle, ces fonctions étant "regroupée" sous la forme d'une fonction vectorielle.

Représentation

Le graphe d'une courbe paramétrée peut se définir de façon analogue aux graphes considérés précédemment. Ainsi, le graphe de $f : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto f(t) \end{cases}$ est donné par

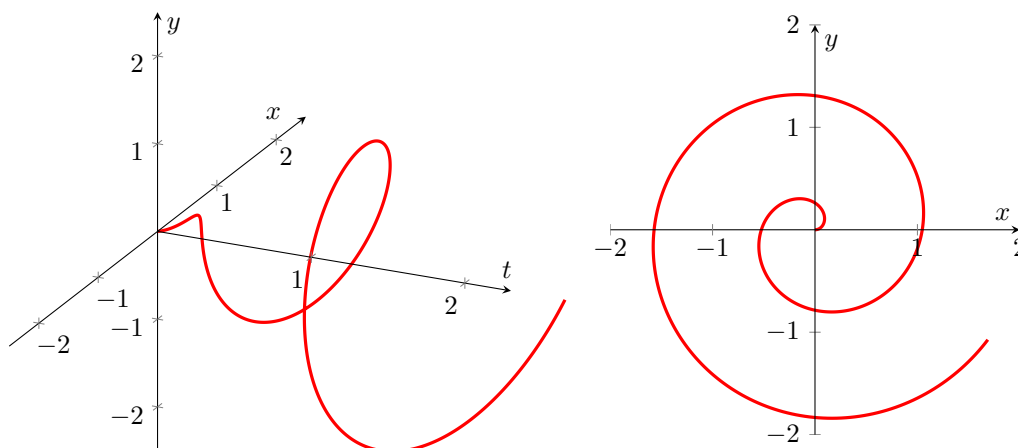
$$\mathcal{G}(f) = \left\{ (t, f_1(t), \dots, f_n(t)) \mid t \in I \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dans la pratique on représente uniquement les valeurs prises par la fonction dans \mathbb{R}^n , et on l'appelle le support de la courbe paramétrée.

$$\mathcal{C}(f) = \left\{ (f_1(t), \dots, f_n(t)) \mid t \in I \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Si un point est sur le support, on sait que c'est une valeur prise par la fonction, mais on ne sait pas pour quelle valeur de la variable t elle est atteinte.

Exemple. Considérons la fonction $f : \begin{cases} [0, 2] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (t \cos(6t), t \sin(6t)) \end{cases}$. Son graphe et son support sont représentés ci-dessous. Son support et la projection de son graphe sur le plan des (x, y) , on oublie la première coordonnée t .



1.3.2 Fonctions vectorielle de plusieurs variables, champ de vecteurs

Définition 1.3.2. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $D \subset \mathbb{R}^n$. Une fonction vectorielle de n variables réelle est une application f définie sur D et à valeurs dans \mathbb{R}^p . On la note

$$f : \begin{cases} D & \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{cases}$$

L'ensemble des applications de D dans \mathbb{R}^n se notera $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^n)$.

Ici, $x \in D$ est un vecteur de \mathbb{R}^n , il s'écrit donc $x = (x_1, \dots, x_n)$, et pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ la fonction f_i est une fonction de n variables.

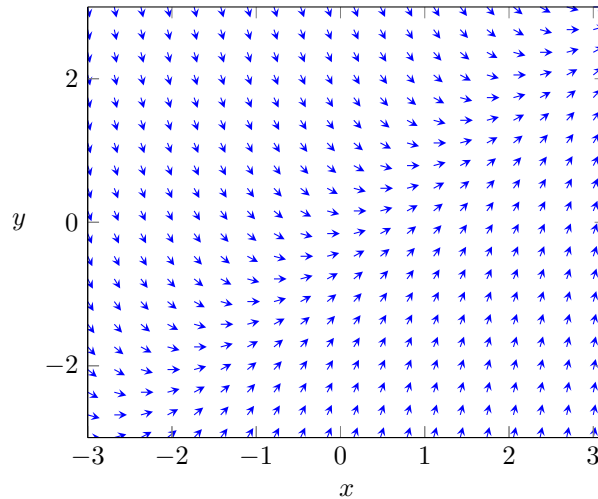
Comme pour les courbes paramétrées, la donnée d'une fonction vectorielle $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ est la donnée de p fonctions réelle de n variables réelles. On peut encore définir le graphe d'une telle fonction qui est un sous ensemble de \mathbb{R}^{n+p} , mais en général, on ne cherchera pas à les représenter.

Le seul cas où on peut représenter une telle fonction est celui des "champs de vecteurs".

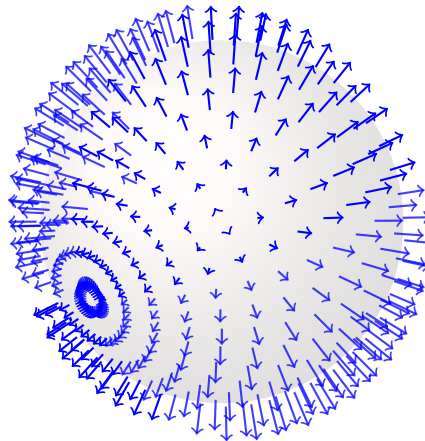
Définition 1.3.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $D \subset \mathbb{R}^n$. Un champ de vecteurs sur D est une application vectorielle $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Lorsque $n = 2$ ou 3 , on peut représenter un champ de vecteurs $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ par une collection de flèches : en chaque point $x \in D$ est représenté le vecteur $f(x) \in \mathbb{R}^n$. La terminologie "champ de vecteurs" est donc appropriée.

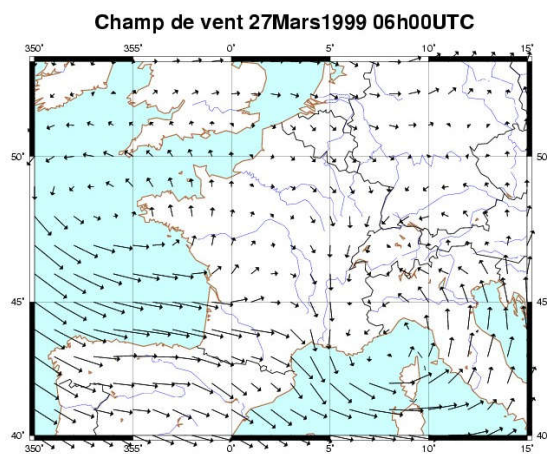
Exemple. Le champ de vecteurs $f(x, y) = \frac{0.15}{\sqrt{1+(x-y)^2}} (1, x - y)$ défini sur $D = \mathbb{R}^2$:



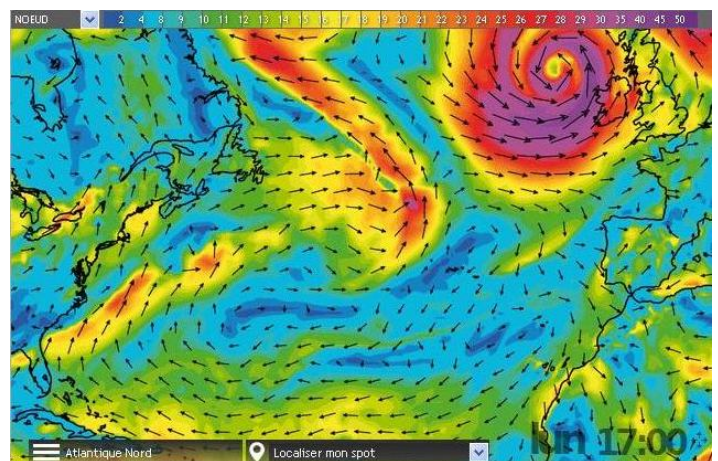
Exemple. Un champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini sur $D = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. On a $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. En chaque point du domaine de définition on a donc un vecteur ("une flèche") représenté :



Exemple. Exemples de la vie courante : cartes des vents.



Un représentation classique



l'intensité est donnée par un code couleur

Chapitre 2

Courbes paramétrées

2.1 Fonctions vectorielles d'une variable réelle

Définition 2.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une fonction vectorielle d'une variable réelle est une application f définie sur un sous ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R}^n . On la note

$$f : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto f(t) \end{cases}$$

L'ensemble des applications de I dans \mathbb{R}^n se notera $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$.

Comme vu au chapitre précédent, une fonction vectorielle à valeur dans \mathbb{R}^n est la donnée de n fonctions réelles.

Comme pour les fonctions réelles, les opérations usuelles sur \mathbb{R}^n définissent des opérations sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$:

— l'addition $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ définie par $(f, g) \mapsto f + g$ avec

$$\forall t \in I \quad (f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

— pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application $(\alpha, f) \mapsto \alpha f$ est une application $\mathbb{R} \times \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ (appelée multiplication externe). Elle est définie par

$$\forall t \in I \quad (\alpha f)(t) = \alpha f(t)$$

Ces opérations ont les propriétés qui font de $\mathcal{F}(I, E)$ un espace vectoriel :

— la somme est associative, commutative, admet un élément neutre (la fonction nulle $t \mapsto 0$) et chaque $f \in \mathcal{F}(I, E)$ admet un opposé $-f$ défini par $(-f)(t) = -f(t)$.

— la multiplication externe est associative et distributive sur la somme.

Proposition 2.1.2. L'espace $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel (de dimension infinie).

Preuve. La démonstration ne pose pas de problème particulier : il faut vérifier un à un les axiomes des \mathbb{R} -espace vectoriel. Noter que c'est le fait que l'espace d'arrivée \mathbb{R}^n soit un \mathbb{R} -espace vectoriel qui fait fonctionner le tout. \square

2.1.1 Limite et continuité

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. On note $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées pour $i = 1, \dots, n$. Avec ces notations on a :

Définition 2.1.3 (limite).

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ admet une limite $\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ quand t tend vers $a \in I$, et on note $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \ell$, si $\lim_{t \rightarrow a} f_i(t) = \ell_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

En bref, f admet une limite en a si toutes ses fonctions coordonnées convergent en a , on a

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow a} f_1(t) \\ \vdots \\ \lim_{t \rightarrow a} f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} = \ell$$

Remarque. Cette notion de limite hérite de plusieurs des propriétés de la limite des fonctions réelles :

- la définition s'adapte sans difficulté aux notions de limites à droite (*i.e.* quand $t \rightarrow a$ avec $t > a$) noté $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$ et limite à gauche (*i.e.* quand $t \rightarrow a$ avec $t < a$) notée $\lim_{t \rightarrow a^-} f(t)$. En particulier, si $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^-} f(t) = \ell$ alors f admet ℓ pour limite en a .
- Si la limite existe, elle est unique.

Par ailleurs, on peut se ramener à la limite d'une fonction réelle en utilisant la norme euclidienne.

Proposition 2.1.4. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, $a \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}^n$. On a $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \ell$ si et seulement si $\lim_{t \rightarrow a} \|f(t) - \ell\| = 0$

On peut donc formaliser la définition de la limite de la façon suivante : soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, $a \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}^n$. On a $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall t \in I \quad |t - a| < \alpha \Rightarrow \|f(t) - \ell\| < \varepsilon.$$

Cette utilisation de la norme pour définir la notion de limite sera généralisée au chapitre suivant pour traiter le cas des fonctions de plusieurs variables.

Limite de suites

On définit de façon analogue la limite d'une suite vectorielle.

Définition 2.1.5. Une suite vectorielle de \mathbb{R}^n est une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n indexée par \mathbb{N} . On la note $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, où $u_k \in \mathbb{R}^n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n , pour tout $k \in \mathbb{N}$, le vecteur u_k s'écrit

$$u_k = u_{k,1}e_1 + \dots + u_{k,n}e_n = (u_{k,1}, \dots, u_{k,n})$$

où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n . Comme pour les fonctions, une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n est la donnée de n suites réelles. La définition de la convergence est aussi similaire :

Définition 2.1.6. On dit que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, et on note $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$, si $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{k,i} = \ell_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Comme pour les fonctions, on passe à la limite coordonnées à coordonnées, et on peut aussi utiliser la norme. Pour une suite vectorielle $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k - \ell\| = 0$, c'est à dire si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \geq N \Rightarrow \|u_k - \ell\| < \varepsilon.$$

Caractérisation séquentielle

De même que dans le cas des fonctions réelles on a la caractérisation séquentielle suivante :

Proposition 2.1.7 (caractérisation séquentielle). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}^n$.

On a $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \ell$ si et seulement si, $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(t_k) = \ell \in \mathbb{R}^n$ pour toute suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = a$

Dans cet énoncé, la suite $(f(t_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite vectorielle. Par conséquent, $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(t_k) = \ell$ signifie que pour tout $i = 1, \dots, n$ on a $f_i(t_k) \rightarrow \ell_i$ quand $k \rightarrow +\infty$.

Ce critère est très utile pour montrer qu'un fonction n'a pas de limite en a : si on trouve deux suites $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que

- $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = a$
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(s_k) = \ell_1$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(t_k) = \ell_2$
- $\ell_1 \neq \ell_2$

alors la fonction f n'a pas de limite en a .

Continuité

Comme pour les fonctions réelles, la notion de limite permet de définir la notion de continuité. Plus précisément on a :

Définition 2.1.8. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. On dit que f est continue en $a \in I$ si

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$$

La fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point $a \in I$.

Compte tenu de la définition de la limite, une fonction vectorielle est dite continue en a si toutes ses fonctions coordonnées sont continues en a . Si l'intervalle I est minoré (resp. majoré), on peut étendre facilement la définition de continuité à droite (resp. à gauche) pour le réel a situé à l'extrémité inférieure (resp. supérieure) de I .

On rappelle que la continuité est une notion locale : la continuité au point a de la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dépend des valeurs prises par la fonction au voisinage de a . En particulier, elle ne dépend pas des valeurs prises sur tout l'intervalle I (ce n'est pas une notion globale), et elle ne dépend pas uniquement de la valeur de la fonction au point a (ce n'est pas une notion ponctuelle).

Dans la suite, on notera $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^n .

Proposition 2.1.9. L'espace fonctionnel $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Preuve. Même remarque que pour la preuve de la Proposition 2.1.2 □

2.1.2 Dérivabilité

Comme pour la continuité, la dérivabilité se définit coordonnée à coordonnée.

Définition 2.1.10 (dérivabilité). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. On dit que f est dérivable en $a \in I$ si toutes les fonctions coordonnées de f sont dérivables en a . La dérivée de f en a est alors

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ \vdots \\ f'_n(a) \end{pmatrix}$$

La fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $f'_i(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(a+h) - f_i(a)}{h}$ et par conséquent

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ \vdots \\ f'_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(a+h) - f_1(a)}{h} \\ \vdots \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} \end{pmatrix} = \lim_{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{f_1(a+h) - f_1(a)}{h} \\ \vdots \\ \frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} \end{pmatrix} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a))$$

La définition de la dérivée est donc la même que pour les fonction réelles, c'est la limite du "taux d'accroissement" qui se définit avec les opérations d'espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Soient $f : t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t))$ une fonction vectorielle dérivable, et $a \in I$:

Pour tout i , la fonction f_i admet un DL à l'ordre 1 en a :

$$f_i(t) = f_i(a) + (t - a)f'_i(a) + (t - a)\varepsilon_i(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow a} \varepsilon_i(t) = 0$$

On obtient alors pour la fonction vectorielle f le développement suivant

$$f(t) = f(a) + (t - a)f'(a) + (t - a)\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow a} 0$$

Si $f'(a) \neq 0$, le support de la fonction $\delta : t \mapsto f(a) + (t - a)f'(a)$ est la droite passant par $f(a)$ de vecteur directeur $f'(a)$, c'est la droite tangente au support de f .

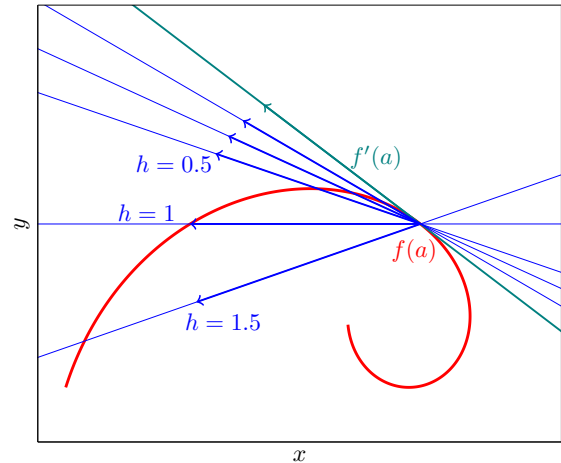
L'égalité $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a))$ permet de voir la tangente comme la limite des droites sécantes.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(t) = (t \cos t, t \sin t)$$

Sur la figure on a représenté

- le support de la fonction f
- les droites passant par $f(a)$ et $f(a+h)$ pour différentes valeurs de h
- les vecteurs $\frac{1}{h} (f(a+h) - f(a))$ pour ces mêmes valeurs de h
- la droite tangente au support de f en $f(a)$ et le vecteur $f'(a)$.



Bien sûr, si les fonctions coordonnées sont suffisamment régulières, on peut généraliser la définition aux dérivées d'ordres supérieurs. On alors $f'' = \begin{pmatrix} f''_1 \\ \vdots \\ f''_n \end{pmatrix}$ et plus généralement on note $f^{(k)} = \begin{pmatrix} f^{(k)}_1 \\ \vdots \\ f^{(k)}_n \end{pmatrix}$ le vecteurs des dérivées k -ème. On notera enfin $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions vectorielles admettant une dérivée d'ordre k continue (*i.e.* dont les fonctions coordonnées sont $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$).

Accroissements finis

On rappelle que le théorème des accroissements finis (TAF) pour une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Sous cette forme, le théorème ne se généralise pas aux fonctions vectorielles.

Exemple. On considère la fonction vectorielle $t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$.

On a le résultat plus faible suivant mais qui est valable pour les fonctions vectorielles et numériques :

Théorème 2.1.11 (Inégalité des accroissements finis). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\|f'(x)\| \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors $\|f(a) - f(b)\| \leq M(b - a)$.

2.2 Courbes paramétrées

2.2.1 Définition, exemples

Définition 2.2.1. Une courbe paramétrée (on dit aussi un arc paramétrée) de \mathbb{R}^n , est la donnée d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et d'une application $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 sur I .

L'image $\phi(I) \subset \mathbb{R}^n$ de ϕ est le support de la courbe paramétrée ϕ .

Lorsque ϕ est de classe \mathcal{C}^k on dit que la courbe paramétrée est de classe \mathcal{C}^k .

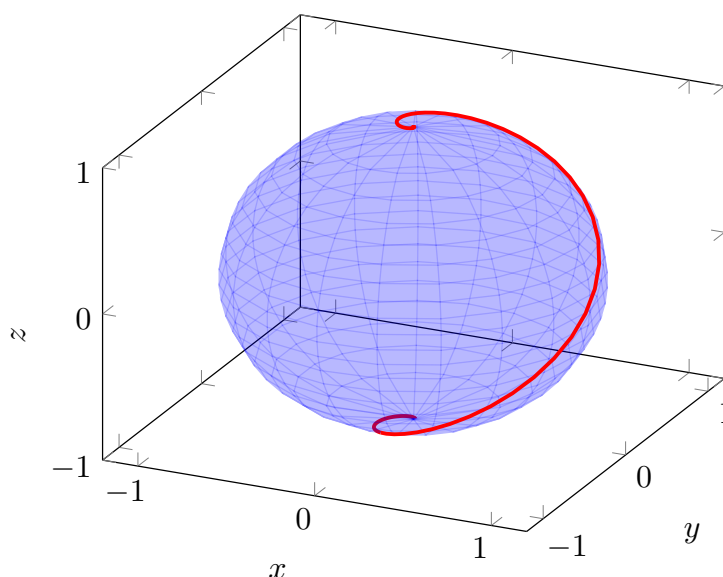
Exemple.

1. Soient $a \in \mathbb{R}^3$ un point et $v \in \mathbb{R}^3$ un vecteur. L'application $\phi : t \mapsto a + tv$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est une courbe paramétrée dont le support est une droite affine passant par a et de direction v .
2. Soit $I = [0, 2\pi]$ et $a, b > 0$. Alors $\phi : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto (a \cos(t), b \sin(t)) \end{cases}$ est une courbe paramétrée dont le support est une ellipse.

Exemple. $\phi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto \frac{1}{\cosh t} (\cos t, \sin t, \sinh t) \end{cases}$ est une courbe paramétrée de \mathbb{R}^3 .
Les calcul (du carré) de la norme euclidienne de $\phi(t)$ donne

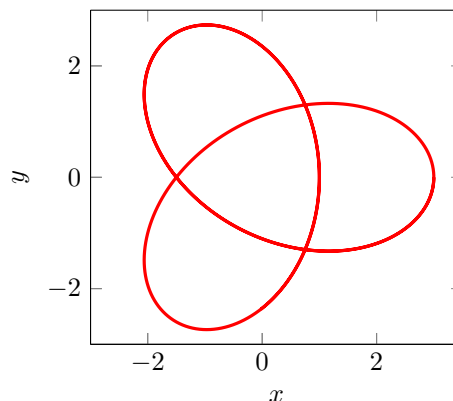
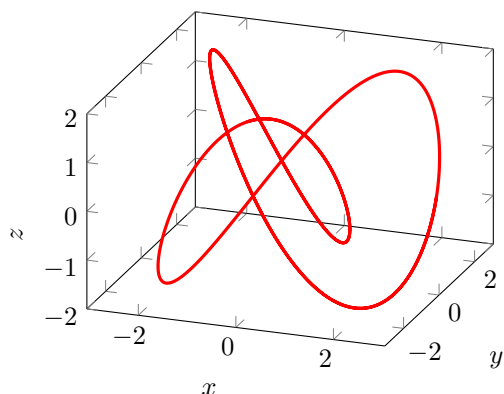
$$\begin{aligned} \|\phi(t)\|^2 &= \frac{1}{\cosh^2 t} (\cos^2 t + \sin^2 t + \sinh^2 t) \\ &= \frac{1}{\cosh^2 t} (1 + \sinh^2 t) \\ &= \frac{1}{\cosh^2 t} \cosh^2 t \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit que le support de ϕ est contenu dans la sphère de rayon 1 centrée à l'origine.



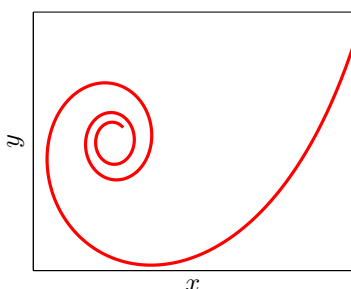
Exemple. Le trèfle gauche : $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t)+2\cos(2t) \\ \sin(t)-2\sin(2t) \\ -2\sin(3t) \end{pmatrix}$ est une courbe paramétrée de \mathbb{R}^3 .

Sa projection sur le plan $z = 0$ donne la trèfle $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t)+2\cos(2t) \\ \sin(t)-2\sin(2t) \end{pmatrix}$

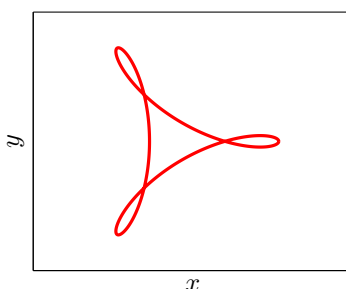


Définition 2.2.2. Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. Un point $M \in \mathbb{R}^n$ est un point multiple de ϕ si $M \in \phi(I)$ et M possède plusieurs antécédents par ϕ .

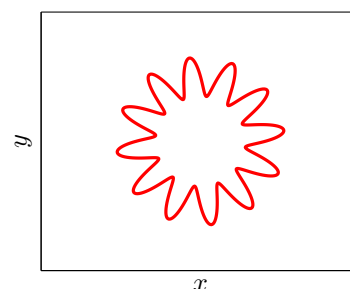
1. La courbe paramétrée ϕ est simple si tout point $M \in \phi(I)$ possède un unique antécédents par ϕ (i.e. ϕ n'a aucun point multiple).
2. La courbe paramétrée ϕ est fermé si $I = [a, b]$ et $\phi(a) = \phi(b)$
3. La courbe paramétrée ϕ est fermé simple si $I = [a, b]$, $\phi(a) = \phi(b)$ et ϕ est simple sur $]a, b[$ (i.e. $M = \phi(a) = \phi(b)$ est l'unique point multiple de ϕ).



Une courbe simple



Une courbe fermée



Une courbe fermée simple

2.2.2 Interprétation cinématique et paramétrage

Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^2 . On considère que la variable $t \in I$ désigne le temps et on interprète les valeurs prises par ϕ et ses dérivées de la façon suivante :

1. $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ est la position dans l'espace \mathbb{R}^n d'un mobile ponctuel à l'instant $t \in I$.
2. $\phi'(t)$ est la vitesse du mobile.
3. $\phi''(t)$ est l'accélération du mobile.
4. le support de $\phi(I)$ correspond à la trajectoire du mobile.

Une courbe paramétrée ne décrit pas simplement la trajectoire parcourue, mais aussi la façon dont elle est parcourue, en donnant la position à chaque instant t . Le chemin parcouru par le mobile ne change pas si on modifie la façon dont il est parcouru.

Pour formaliser cela on introduit la définition suivante :

Définition 2.2.3. Soient I et J deux intervalles ouverts de \mathbb{R} . Une fonction $\theta : I \rightarrow J$ est un \mathcal{C}^k difféomorphisme si

1. θ une fonction bijective (on note θ^{-1} son inverse);
2. θ est de classe \mathcal{C}^k ;
3. $\theta^{-1} : J \rightarrow I$ est aussi de classe \mathcal{C}^k .

Remarque. La définition d'un difféomorphisme θ implique que les dérivées θ' et $(\theta^{-1})' = \frac{1}{\theta' \circ \theta^{-1}}$ ne s'annulent pas sur leur intervalle de définition respectif.

Exemple. L'application $\theta : t \mapsto t^3$ n'est pas un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} car sa fonction réciproque n'est pas dérivable en 0. Mais l'application $t \mapsto t^3 + t$ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (Exercice : le montrer).

Les \mathcal{C}^k difféomorphismes sont les changements de variables ayant une régularité suffisante pour reparamétriser les courbes de classe \mathcal{C}^k tout en conservant cette régularité. Plus précisément on a :

Définition 2.2.4. Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k (où $k \geq 1$) et J un intervalle de \mathbb{R} .

On dit que $\theta : J \rightarrow I$ est un reparamétrage (ou un changement de paramètre) si θ est une bijection \mathcal{C}^k .

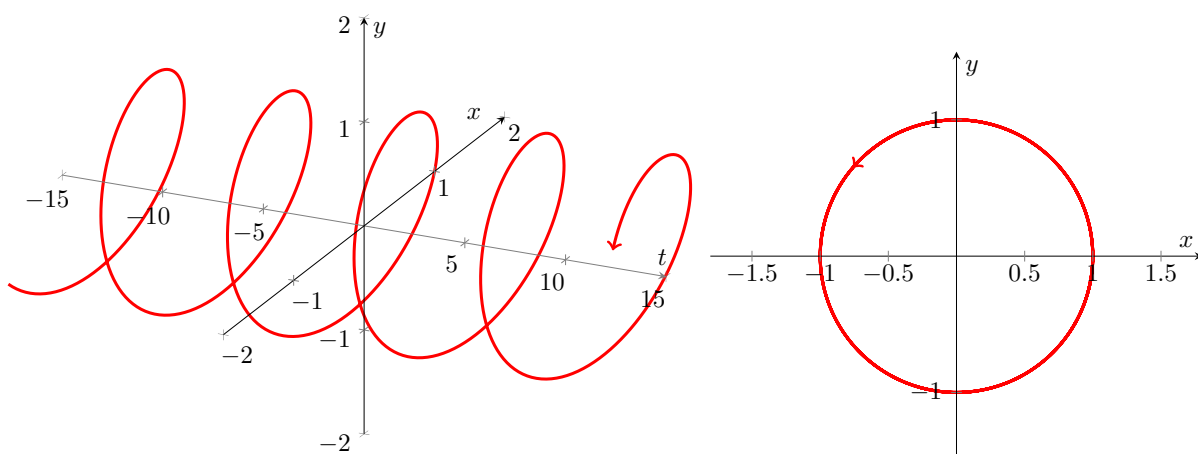
Si de plus θ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme de J sur I , on dit alors que θ est un reparamétrage admissible. Le reparamétrage de ϕ par θ est la (nouvelle) courbe paramétrée $\phi \circ \theta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Remarque. La courbe paramétrée $\phi \circ \theta$ est encore de classe \mathcal{C}^k , par composition d'applications \mathcal{C}^k .

Comme $\theta : J \rightarrow I$ est une bijection, le reparamétrage ne change pas le support de la courbe. Si on note $\Gamma_0 = \phi(I)$ et $\Gamma_1 = \phi \circ \theta(J) = \phi(\theta(J))$, on a $\Gamma_0 = \Gamma_1$.

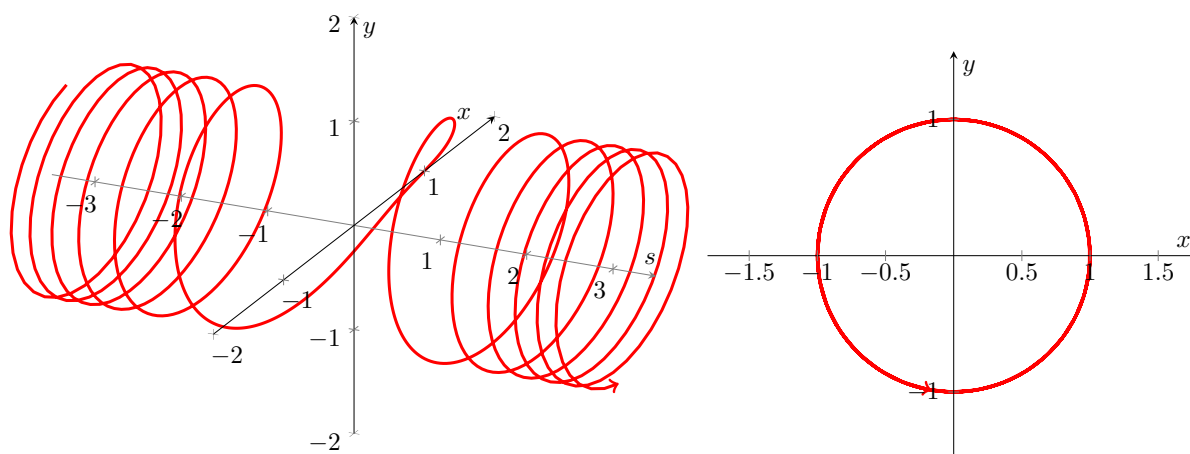
Par contre, ce qui change est la façon dont le support est parcouru par la courbe.

Exemple. Considérons $\phi_0 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{cases}$. Le support $\Gamma_0 = \phi_0(\mathbb{R})$ est le cercle unité (parcouru une infinité de fois...), et on peut représenter le graphe et le support de ϕ_0 .



Considérons maintenant le difféomorphisme $\theta : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & s^3 + s \end{cases}$, le reparamétrage de la courbe ϕ_0 par θ donne $\phi_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \longmapsto & (\cos(s^3 + s), \sin(s^3 + s)) \end{cases}$.

Le tracé du graphe de ϕ_1 montre que ces deux courbes paramétrées sont différentes, alors que le support est toujours le cercle unité.



Les deux courbes Γ_0 et Γ_1 ont le même support et décrivent toutes deux le cercle unité du plan. Mais les vitesses de parcours sont différentes.

Vitesse et reparamétrage

Définition 2.2.5. Une courbe paramétrée $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 est régulière si $\phi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Remarque. Soit $\phi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière, et $\phi_1 = \phi_0 \circ \theta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ cette courbe reparamétrée par $\theta : J \rightarrow I$. La dérivation des fonctions composées donne, pour tout $s \in J$,

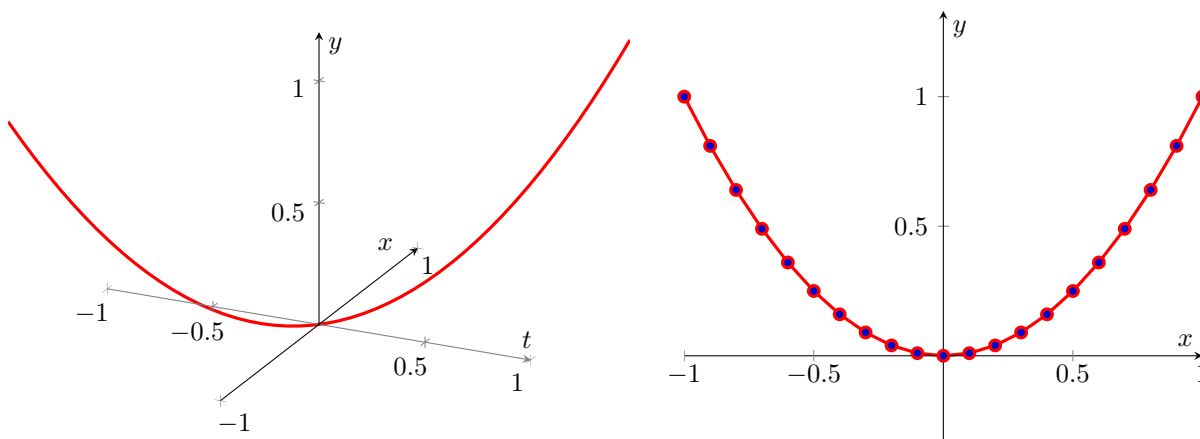
$$\phi_1'(s) = \phi_0'(\theta(s))\theta'(s)$$

Comme ϕ_0 est régulière, on a $\phi_0'(\theta(s)) \neq 0$ pour tout $s \in J$. Si de plus θ est un reparamétrage admissible, alors on a également $\theta'(s) \neq 0$ pour tout $s \in J$ et par conséquent $\phi_1'(s) \neq 0$ pour tout $s \in J$. Le reparamétrage d'une courbe régulière par un reparamétrage admissible donne une courbe paramétrée régulière.

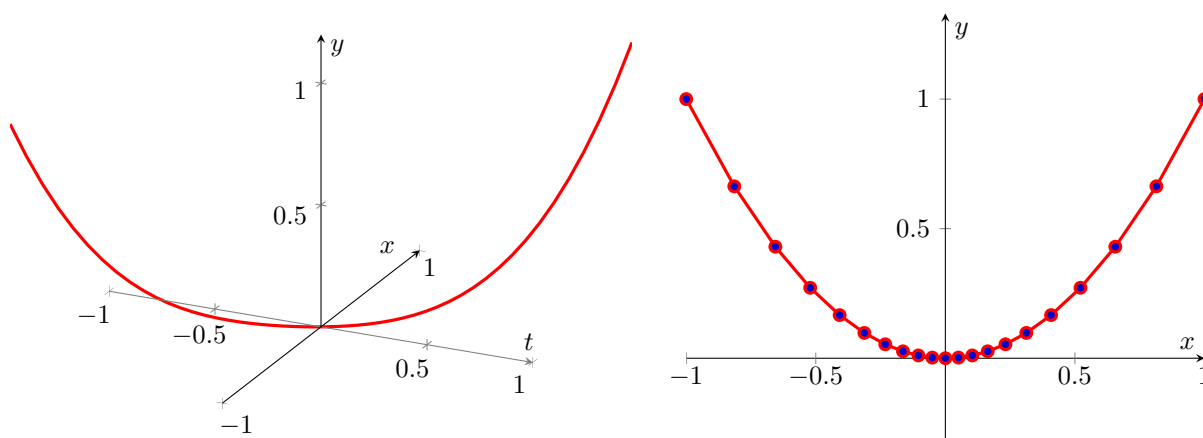
Par contre, si θ n'est pas admissible, il existe $s_0 \in J$ tel que $\theta'(s_0) = 0$ et on a alors $\phi_1'(s_0) = 0$. Donc ϕ_1 n'est pas régulière.

En résumé : les reparamétrages admissibles sont les reparamétrages qui préservent le caractère régulier des courbes paramétrées.

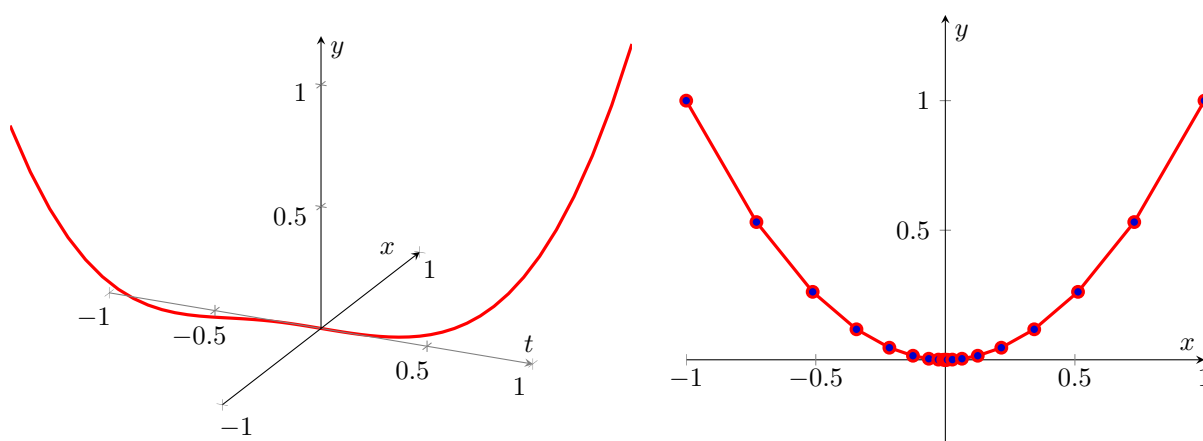
Exemple. Considérons la courbe paramétrée définie par $\phi_0(t) = (t, t^2)$ pour $t \in \mathbb{R}$:



La courbe paramétrée définie par $\phi_1(t) = (t^3 + t, (t^3 + t)^2)$ avec $t \in \mathbb{R}$ est un reparamétrage admissible de ϕ_0 :



La courbe paramétrée définie par $\phi_2(t) = (t^3, t^6)$ avec $t \in \mathbb{R}$ n'est pas un reparamétrage admissible de ϕ_0 :



La courbe géométrique associée est toujours la parabole d'équation $y = x^2$ mais on a "créé un arrêt" car $\phi_2'(0)$ est nul.

2.2.3 Longueur, abscisse curviligne

Définition 2.2.6. Soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 . La longueur de ϕ est le nombre réel

$$L(\phi) = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt.$$

Remarque. A priori, la longueur pourrait dépendre du paramétrage, mais ce n'est pas le cas : si $\phi_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée et $\phi_1 = \phi_0 \circ \theta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un reparamétrage de ϕ_0 alors $L(\phi_1) = L(\phi_0)$.

La longueur devient donc une caractéristique du support $\Gamma = \phi(I)$ de la courbe paramétrée ϕ , et pour calculer la longueur de ce support, on peut choisir n'importe quel paramétrage (mais il faut bien en choisir un pour faire les calculs...)

Remarque. On définit généralement la longueur d'une courbe Γ comme suit : si l'ensemble des longueurs $L_\sigma > 0$ des lignes polygonales inscrites dans Γ où σ décrit les subdivisions de $[a, b]$ admet une borne

supérieure $L = \sup_{\sigma} L_{\sigma}$, on dit que l'arc Γ est rectifiable (noter que l'ensemble des courbes rectifiables est plus grand que l'ensemble des courbes \mathcal{C}^1). Le réel L est appelé longueur de Γ . Les deux définitions coïncident dans le cas des courbes \mathcal{C}^1 .

Définition 2.2.7 (Abscisse curviligne). Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 et soit réel $t_0 \in I$. L'abscisse curviligne d'origine t_0 est la fonction

$$\sigma : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \int_{t_0}^t \|\phi'(u)\| du \end{cases}$$

Proposition 2.2.8. Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arc paramétré régulier de classe \mathcal{C}^1 . L'abscisse curviligne sur ϕ permet de définir un nouveau paramétrage admissible de cet arc.

Preuve.

□

Utiliser l'abscisse curviligne de ϕ comme nouveau paramètre, c'est décider de parcourir le support de ϕ à une vitesse de norme constante égale à 1.

2.3 Étude d'un arc paramétré

2.3.1 Étude locale

Soit $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k (où $k \in \mathbb{N}^*$ est suffisamment grand), et soit $t_0 \in D$. La formule de Taylor-Young en $t_0 \in D$ s'écrit

$$\phi(t_0 + h) = \phi(t_0) + h\phi'(t_0) + \frac{h^2}{2}\phi''(t_0) + \cdots + \frac{h^k}{k!}\phi^{(k)}(t_0) + |h|^k\varepsilon(h).$$

où $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Si les vecteurs dérivées de ϕ ne sont pas tous nul en t_0 , on note :

1. p le plus petit entier non nul tel que $\phi^{(p)}(t_0) \neq 0$.
2. q le premier entier supérieur à p tel que $\phi^{(q)}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $\phi^{(p)}(t_0)$. Autrement dit, pour tout entier $i \in \{p, \dots, q-1\}$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que : $\phi^{(i)}(t_0) = \lambda_i \phi^{(p)}(t_0)$.

La formule de Taylor-Young devient :

$$\phi(t_0 + h) = \phi(t_0) + \left(\sum_{i=p}^{q-1} \lambda_i \frac{h^i}{i!} \right) \phi^{(p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!} \phi^{(q)}(t_0) + |h|^q \varepsilon(h).$$

où $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$, $\phi^{(p)}(t_0) \neq 0$ et $(\phi^{(p)}(t_0), \phi^{(q)}(t_0))$ est une famille libre.

Définition 2.3.1. Avec les notations ci-dessus, le point $M_0 = \phi(t_0)$ est un point :

1. stationnaire si $\phi'(t_0) = 0$ (c'est à dire si $p > 1$).
2. régulier si $\phi'(t_0) \neq 0$ (c'est à dire si $p = 1$).
3. birégulier si $\phi'(t_0)$ et $\phi''(t_0)$ ne sont pas colinéaires (c'est à dire si $p = 1$ et $q = 2$).

Par ailleurs, la tangente à ϕ au point M_0 est la droite affine passant par M_0 et dirigée par le vecteur $\phi^{(p)}(t_0)$.

Remarque. L'entier p et la droite tangente $M_0 + \mathbb{R}\phi^{(p)}(t_0)$ sont invariants par changement de paramétrage admissible.

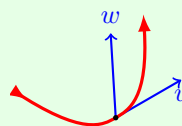
En dimension $n = 2$, les entiers p et q définis plus haut permettent de décrire le comportement de la courbe au voisinage de t_0 , et il y a 4 situations possibles suivant les parités de p et q .

Définition 2.3.2. Soit $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k (où $k \in \mathbb{N}^*$ est suffisamment grand), et soit $t_0 \in D$. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que le développement de Taylor-Young en t_0 s'écrive

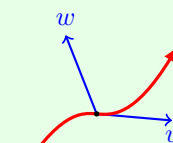
$$\phi(t_0 + h) = \phi(t_0) + \left(\sum_{i=p}^{q-1} \lambda_i \frac{h^i}{i!} \right) \phi^{(p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!} \phi^{(q)}(t_0) + |h|^q \varepsilon(h).$$

On pose $M_0 = \phi(t_0)$, les vecteurs $v = \phi^{(p)}(t_0)$ et $w = \phi^{(q)}(t_0)$ forment une base de \mathbb{R}^2 et (M_0, v, w) est un repère du plan. Suivant les parités de p et q , on distingue 4 types de points pour M_0 :

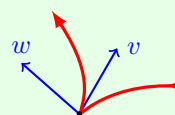
1. Si p est impair et q est pair, alors M_0 est un point ordinaire.



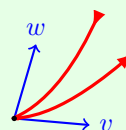
2. Si p est impair et q est impair, alors M_0 est point d'inflexion.



3. Si p est pair et q est impair, alors M_0 est point rebroussement de première espèce.



4. Si p est pair et q est pair, alors M_0 est point rebroussement de deuxième espèce.



Dans cette définition, le vecteur v donne la direction de la tangente, la parité de p indique si la courbe traverse l'axe dirigé par w et la parité de q indique si la courbe traverse la tangente.

2.3.2 Branches infinies

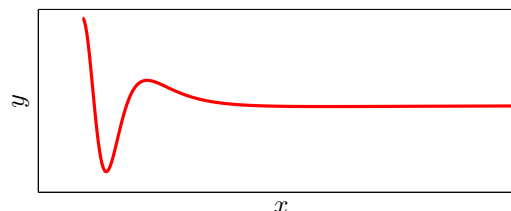
L'étude locale renseigne le comportement de la courbe au voisinage d'un point de D . Reste à voir ce qu'il se passe aux bornes du domaine de définition.

Soit $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée du plan \mathbb{R}^2 . Pour $t \in D$, on pose $\phi(t) = (x(t), y(t))$ et $\|\phi(t)\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$. Dans ce qui suit, a désigne une borne de D (éventuellement infinie).

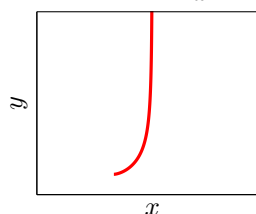
Définition 2.3.3. On dit que ϕ admet une branche infinie en a si $\lim_{t \rightarrow a} \|\phi(t)\| = +\infty$

Plusieurs cas se présentent

1. Si $\lim_{t \rightarrow a} |x(t)| = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow a} |y(t)| = y_0$, alors la courbe ϕ admet la droite horizontale d'équation $y = y_0$ pour asymptote.

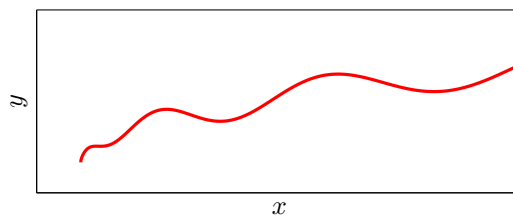


2. Si $\lim_{t \rightarrow a} |x(t)| = x_0$ et $\lim_{t \rightarrow a} |y(t)| = +\infty$, alors la courbe ϕ admet la droite verticale d'équation $x = x_0$ pour asymptote.



3. On suppose que $\lim_{t \rightarrow a} |x(t)| = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow a} |y(t)| = +\infty$, alors

- (a) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, on dit que ϕ admet une branche parabolique de direction $\mathbb{R}(1, 0)$.

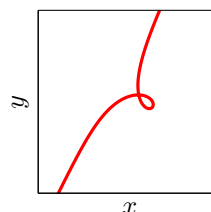


- (b) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, on dit que ϕ admet une branche parabolique de direction $\mathbb{R}(0, 1)$.

- (c) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha$, deux cas se présentent

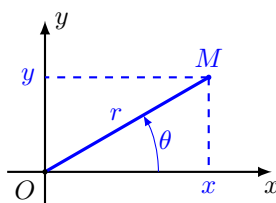
- i. Si $\lim_{t \rightarrow a} y(t) - \alpha x(t) = \pm\infty$, on dit que ϕ admet une branche parabolique de direction $\mathbb{R}(1, \alpha)$.

- ii. Si $\lim_{t \rightarrow a} y(t) - \alpha x(t) = \beta$, on dit que ϕ admet la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ pour asymptote. Dans ce cas, on étudie la position de la courbe ϕ par rapport à l'asymptote. Pour cela, on étudie le signe de $(y(t) - \alpha x(t) - \beta)$ au voisinage de a .



2.3.3 Courbes en coordonnées polaires

Les coordonnées polaires (r, θ) d'un point $M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sont l'angle orienté θ entre l'axe des abscisses et la demi-droite $[O, M)$ et la distance à l'origine r . Les coordonnées cartésiennes du point M sont alors $(r \cos \theta, r \sin \theta)$.



L'équation d'une courbe en coordonnées polaires est la donnée d'une fonction $r : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta \mapsto r(\theta) \end{cases}$ où $D \subset \mathbb{R}$. Le support de cette courbe est l'ensemble des points du plan \mathbb{R}^2 dont les coordonnées polaires sont $(r(\theta), \theta)$.

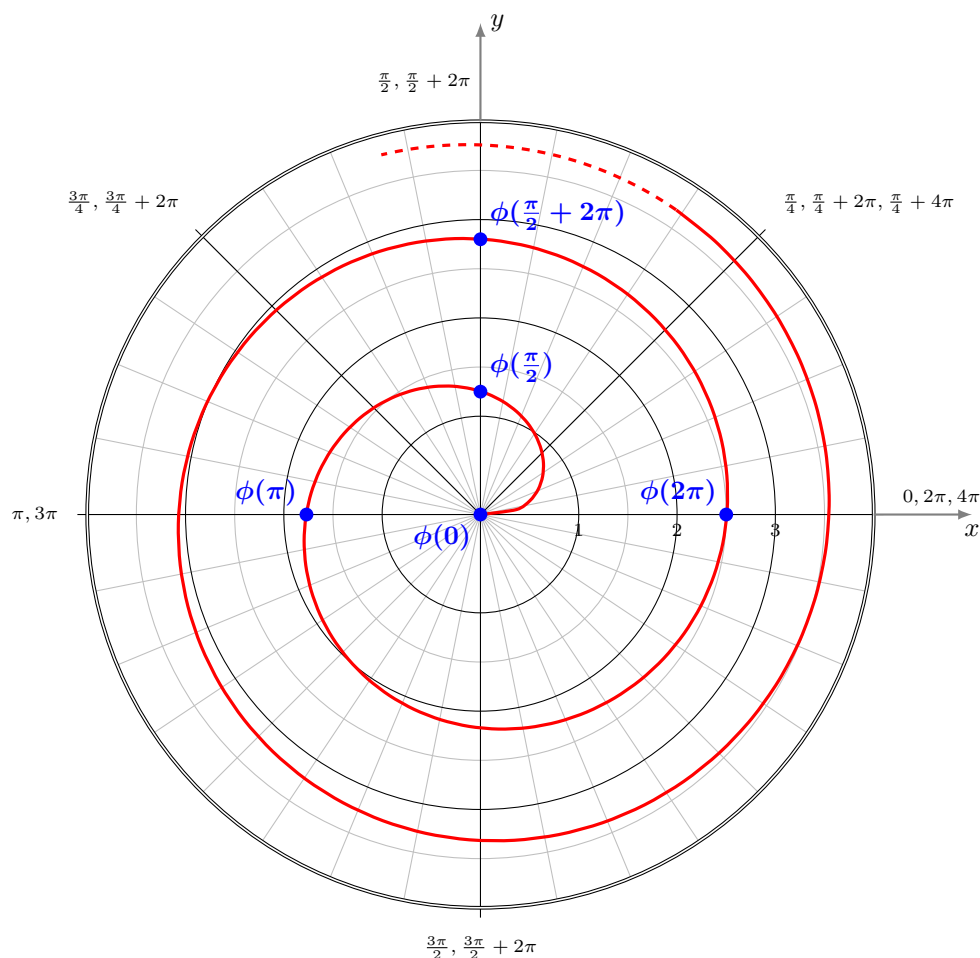
Étant donné les relations entre coordonnées polaires et cartésiennes, cela revient à utiliser θ comme paramètre et à considérer le support de la courbe paramétrée $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta).$$

Remarque.

- Une fois écrite sous cette forme, on voit que la fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ n'a aucune raison d'être strictement positive. Dans la pratique, on pourra donc considérer des équations en polaires pour lesquelles la fonction r prend des valeurs négatives.
- La fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ n'a aucune raison d'être périodique et la demi-droite d'angle θ peut couper la courbe en plusieurs points si $\dots, r(\theta - 4\pi), r(\theta - 2\pi), r(\theta), r(\theta + 2\pi), r(\theta + 4\pi), \dots$ prennent des valeurs différentes.

Exemple. Ci dessous la courbe d'équation polaire $r(\theta) = \sqrt{\theta}$ définie pour $\theta \in \mathbb{R}_+$.



Les propriétés des coordonnées polaires permettent de déduire des symétries de la courbe à partir de propriétés de parité de la fonction $\theta \mapsto r(\theta)$:

- Si $r(-\theta) = r(\theta)$ alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
- Si $r(-\theta) = -r(\theta)$ alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si $r(\pi - \theta) = r(\theta)$ alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si $r(\theta + \pi) = r(\theta)$ alors la courbe est symétrique par rapport à l'origine.

2.3.4 Plan d'étude d'un arc paramétré

Voici comment peut s'organiser l'étude d'une courbe paramétrée $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$. On suppose ici que ϕ est dans \mathbb{R}^2 (c'est donc une courbe du plan) et on note $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ les fonctions coordonnées.

Domaine de définition de la courbe.

Si le domaine de définition de ϕ n'est pas donné, il faut le déterminer à partir des expressions de $x(t)$ et $y(t)$. La position du point $\phi(t)$ est définie si et seulement si ses coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont définies, le domaine de définition de ϕ est donc l'intersection des domaines de définition des fonctions x et y .

Il faut ensuite déterminer un domaine d'étude (plus petit que le domaine de définition) grâce aux symétries, périodicités...

Vecteur dérivé.

Calcul des dérivées des coordonnées de $t \mapsto \phi(t)$.

Les valeurs de t pour lesquelles $x'(t) = 0$ (et $y'(t) \neq 0$) fournissent les points à tangente verticale et les valeurs de t pour lesquelles $y'(t) = 0$ (et $x'(t) \neq 0$) fournissent les points à tangente horizontale.

Enfin, les valeurs de t pour lesquelles $x'(t) = y'(t) = 0$ fournissent les points singuliers, en lesquels on n'a encore aucun renseignement sur la tangente.

Tableau de variations conjointes.

L'étude de x' et y' permet de connaître les variations de x et y . On reporte les résultats obtenus des variations conjointes des fonctions x et y dans un tableau. Cela donne alors un tableau à compléter :

t	
$x'(t)$	
x	
y	
$y'(t)$	

Ce tableau est le tableau des variations des deux fonctions x et y ensemble. Il nous montre l'évolution du point $\phi(t)$.

Étude des points singuliers.

À l'aide de la partie précédente, on peut facilement déterminer les points stationnaires (les temps t où l'on a $x'(t) = y'(t) = 0$). On peut alors étudier le comportement local de la courbe en ces points (rebroussement, inflexion, *etc.*...).

Étude des branches infinies.

À l'aide de l'étude précédente, si $\|\phi(t)\|$ tend vers $+\infty$ à une borne du domaine de définition.

Construction méticuleuse de la courbe.

On place dans l'ordre

- les deux axes et les unités.
- les droites asymptotes s'il y en a
- les points importants avec leur tangente (points à tangente verticale, horizontale, points singuliers, points d'intersection avec une droite asymptote, ...)

Points multiples.

On cherche les points multiples s'il y a lieu. On attend souvent de commencer la construction de la courbe pour voir s'il y a des points multiples et si on doit les chercher.

Chapitre 3

Topologie de \mathbb{R}^n

3.1 Normes et distances sur \mathbb{R}^n

3.1.1 Définition, exemples

Le but de ce chapitre est de formaliser les notions de limite et continuité pour des fonctions de plusieurs variables. Pour cela, on doit donner un sens précis à l’assertion “ x est proche de y ” quand $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Dans le cas des fonctions d’une variable, c’est à dire pour $x, y \in \mathbb{R}$, on dit qu’ils sont proches lorsque la distance de x à y est petite, c’est à dire lorsque $|x - y|$ est petit.

En dimension plus grande, on cherche donc un moyen de mesurer des distances. On en a déjà un avec la norme euclidienne : si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ alors la distance euclidienne de x à y est donnée par

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}.$$

On pourrait se contenter de cette notion de distance et reprendre les définitions de limite et continuité des fonctions d’une variable en remplaçant la valeur absolue $|\cdot|$ par la norme euclidienne. Il se trouve qu’il y a beaucoup d’autres moyens de mesurer des distances qui sont équivalents à la norme euclidienne et qui peuvent être utiles dans certaines situations.

Définition 3.1.1. Une norme sur \mathbb{R}^n est une application $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Séparation : $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. Homogénéité : $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,
3. Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Dans la suite, on notera le plus souvent $N(\cdot) = \|\cdot\|$. L’espace E muni d’une norme $\|\cdot\|$ est appelé un espace normé et est noté $(E, \|\cdot\|)$.

Exemple. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit les normes usuelles suivantes :

1. la norme 1 est $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$
2. la norme 2 est $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ dispose de propriétés particulières (norme euclidienne).
3. la norme infinie est $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

Ces trois normes seront essentiellement les seules normes que nous utiliserons sur \mathbb{R}^n , mais c’est très loin d’être les seules.

Proposition 3.1.2. Les trois applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies ci-dessus sont bien des normes.

Preuve. 1. Il est clair que $\|x\|_1 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\|x\|_1 = 0$, on a alors $|x_1| + \dots + |x_n| = 0$. Comme tous les termes de la somme sont positifs, la seule possibilité pour que cette somme soit nulle est que $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. On a donc $x = 0$ et la propriété de séparation est vérifiée.

On a $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$, d'où

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_1 &= |\lambda x_1| + \dots + |\lambda x_n| \\ &= |\lambda| |x_1| + \dots + |\lambda| |x_n| \\ &= |\lambda| (|x_1| + \dots + |x_n|) \\ &= |\lambda| \|x\|_1\end{aligned}$$

et l'axiome d'homogénéité est vérifié.

On a $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ et l'inégalité triangulaire de la valeur absolue donne

$$\begin{aligned}\|x + y\|_1 &= |x_1 + y_1| + \dots + |x_n + y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + \dots + |x_n| + |y_n| \\ &\leq (|x_1| + \dots + |x_n|) + (|y_1| + \dots + |y_n|) \\ &\leq \|x\|_1 + \|y\|_1\end{aligned}$$

et l'inégalité triangulaire est vérifiée.

2. Il est clair que $\|x\|_2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\|x\|_2 = 0$, on a alors $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = 0$ d'où $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$. Comme tous les termes de la somme sont positifs, la seule possibilité pour que cette somme soit nulle est que $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. On a donc $x = 0$ et la propriété de séparation est vérifiée.

On a $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$, d'où

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_2 &= \sqrt{(\lambda x_1)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2(x_1^2 + \dots + x_n^2)} \\ &= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \\ &= |\lambda| \|x\|_2\end{aligned}$$

et l'axiome d'homogénéité est vérifié.

On a $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ et l'inégalité triangulaire de la valeur absolue donne

$$\begin{aligned}\|x + y\|_1^2 &= (x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2 \\ &\leq x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2 \\ &\leq x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2(x_1y_1 + \dots + x_ny_n) + y_1^2 + \dots + y_n^2 \\ &\leq \|x\|_2^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|_2^2\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\langle x, y \rangle \leq \|x\|_2 \|y\|_2$, d'où

$$\|x + y\|_1^2 \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

d'où $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ et l'inégalité triangulaire est vérifiée.

3. Il est clair que $\|x\|_1 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\|x\|_\infty = 0$, on a alors pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$

$$0 \leq |x_k| \leq \max \{ |x_1|, \dots, |x_n| \} = 0,$$

d'où $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. On a donc $x = 0$ et la propriété de séparation est vérifiée.

On a $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$, d'où

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_\infty &= \max \{ |\lambda x_1|, \dots, |\lambda x_n| \} \\ &= \max \{ |\lambda| |x_1|, \dots, |\lambda| |x_n| \} \\ &= |\lambda| \max \{ |x_1|, \dots, |x_n| \} \\ &= |\lambda| \|x\|_\infty\end{aligned}$$

et l'axiome d'homogénéité est vérifié.

On a $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ et l'inégalité triangulaire de la valeur absolue donne

$$\begin{aligned}\|x + y\|_\infty &= \max \{ |x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n| \} \\ &\leq \max \{ |x_1| + |y_1|, \dots, |x_n| + |y_n| \} \\ &\leq \max \{ |x_1|, \dots, |x_n| \} + \max \{ |y_1|, \dots, |y_n| \} \\ &\leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty\end{aligned}$$

et l'inégalité triangulaire est vérifiée. □

Comme pour la valeur absolue, on a une seconde inégalité triangulaire :

Proposition 3.1.3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n , pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Preuve. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$. Ainsi $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

De même $\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$ et donc $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$. Mis bout à bout on a bien

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

□

Remarque. Cette dernière inégalité nous apprend que si x et y sont proches au sens de la norme $\|\cdot\|$ alors leurs normes $\|x\|$ et $\|y\|$ sont aussi proches. C'est une propriété de continuité de la norme.

Pour avoir notre notion de distance sur \mathbb{R}^n , on a utilisé une norme et l'addition des vecteurs. On ne peut pas étendre cette façon de faire sur des ensembles qui ne sont pas des espaces vectoriels. Pour cela, on a une notion plus générale de distance qui ne fait pas appel à une norme :

Définition 3.1.4. Soit E un ensemble, une distance sur E est une application $d : E \times E \rightarrow [0, +\infty[$ telle que

1. Symétrie : $\forall x, y \in E \quad d(x, y) = d(y, x)$
2. Séparabilité : $\forall x, y \in E \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. Inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in E \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Un espace E muni d'une distance d est appelé espace métrique, et un espace vectoriel normé est un espace métrique particulier :

Proposition 3.1.5. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^n , alors l'application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur \mathbb{R}^n .

Preuve. Laissé en exercice. □

Remarque. Il existe des distances sur \mathbb{R}^n qui ne sont pas issues de normes. Par exemple, l'application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

est une distance sur \mathbb{R}^n .

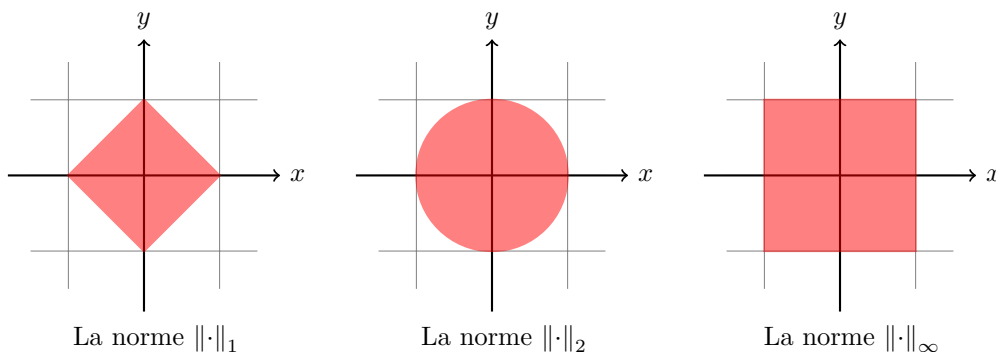
3.1.2 Boules ouvertes, fermées

La notion de norme généralise la notion de valeur absolue dans \mathbb{R} aux espaces vectoriels. La définition suivante généralise la notion d'intervalle ouvert et fermé dans \mathbb{R} aux espaces vectoriels :

Définition 3.1.6. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n . Pour $a \in E$ et $r > 0$ un nombre réel,

- la boule ouverte de centre a et de rayon r est $B_r(a) = \{u \in E \mid \|u - a\| < r\}$.
- la boule fermée de centre a et de rayon r est $\overline{B}_r(a) = \{u \in E \mid \|u - a\| \leq r\}$

Exemple. Voici les boules unités fermées dans $E = \mathbb{R}^2$ pour :



Toutes les parties de \mathbb{R}^n ne sont pas des boules pour une norme.

Proposition 3.1.7. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n . La boule unité $B_1(0)$ a les propriétés suivantes :

1. *symétrie par rapport à 0* : $x \in B_1(0) \Leftrightarrow -x \in B_1(0)$
2. *bornée* : pour tout $x \neq 0$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda x \notin B_1(0)$
3. *convexité* : pour tout $x, y \in B_1(0)$ et tout $t \in [0, 1]$ on a $(1-t)x + ty \in B_1(0)$

Preuve. 1. Comme $\|-x\| = \|x\|$, on a $\|-x\| < 1 \Leftrightarrow \|x\| < 1$.

2. Soit $x \neq 0$, on a $\|x\| \neq 0$ et pour tout $\lambda > \frac{1}{\|x\|}$ on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| > 1$, donc $\lambda x \notin B_1(0)$.

3. Soient $x, y \in B_1(0)$ et $t \in [0, 1]$. On a alors

$$\|(1-t)x + ty\| \leq \|(1-t)x\| + \|ty\| = |1-t| \|x\| + |t| \|y\|.$$

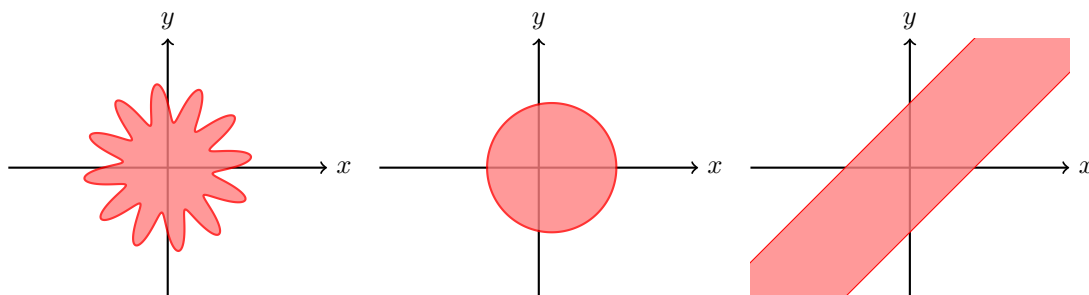
Comme $1-t \geq 0$, $t \geq 0$, $\|x\| < 1$ et $\|y\| < 1$ on obtient

$$\|(1-t)x + ty\| \leq (1-t) \|x\| + t \|y\| < (1-t) + t = 1$$

donc $(1-t)x + ty \in B_1(0)$. □

Il se trouve que les trois conditions énoncées dans la propositions précédentes caractérise les boules unités de normes : si $A \subset \mathbb{R}^n$ vérifie ces trois propriétés, alors il existe une norme sur \mathbb{R}^n dont la boule unité est égale à A .

Exemple. Existe-t-il une norme dont la boule est l'un des ensembles suivants :



3.1.3 Normes équivalentes

Comme il y a beaucoup de normes sur \mathbb{R}^n , laquelle choisir définir les notions de limites et continuité ? Réponse : peu importe. Les définitions de limite et continuité vont s'énoncer à l'aide d'une norme, mais l'utilisation de normes différentes donneront des définitions équivalentes. Ce résultat va reposer sur la notion de "normes équivalentes"

Définition 3.1.8 (Normes équivalentes). On dit que deux normes $N_1, N_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont équivalentes (et on note $N_1 \sim N_2$) s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

La relation \sim définit une relation d'équivalence sur les normes : elle est

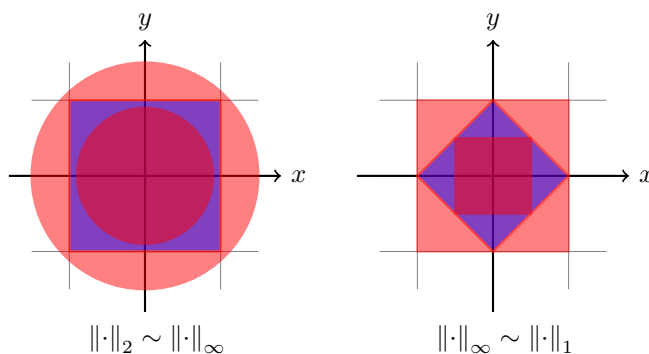
- réflexive : pour toute norme N on a $N \sim N$
- symétrique : pour toutes normes N_1 et N_2 on a $N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow N_2 \sim N_1$
- transitive : pour toutes normes N_1, N_2 et N_3 on a $(N_1 \sim N_2 \text{ et } N_2 \sim N_3) \Rightarrow N_1 \sim N_3$.

Par ailleurs, on a l'interprétation géométrique suivante en termes de boules :

Proposition 3.1.9. Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur \mathbb{R}^n , et soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$ on a alors

$$B^{N_1}(a, \frac{r}{\beta}) \subset B^{N_2}(a, r) \subset B^{N_1}(a, \frac{r}{\alpha})$$

Preuve. Application directe de la définition des boules. Laissée en exercice. □



On va traduire la notion de proximité avec un point $a \in \mathbb{R}^n$ en utilisant la norme. Donc, être proche de a , ça sera être dans une boule de petit rayon centrée en a . Si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes, être dans une boule de petit rayon pour N_1 , c'est aussi être dans une boule de petit rayon pour N_2 , et vice versa.

La question est maintenant : quelle norme utiliser dans \mathbb{R}^n ? Réponse : n'importe laquelle.

Théorème 3.1.10. Dans un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, toute les normes sont équivalentes.

Preuve. Admis dans ce cours. □

Remarque. Le théorème précédent est vrai dans tout espace vectoriel de dimension finie, mais il est faux en dimension infinie.

3.2 limites et continuité

3.2.1 Limites de suites

Au chapitre précédent, on a déjà défini la notion de limite d'une suite de vecteurs en considérant la convergence coordonnée à coordonnée, et on avait remarqué que cette notion de convergence peut s'exprimer de façon équivalente avec la norme euclidienne (cf. définition 2.1.6 et discussion qui suit). En considère maintenant une norme arbitraire sur \mathbb{R}^n .

Définition 3.2.1 (Limite d'une suite). Soit $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ une norme sur \mathbb{R}^n , $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points dans \mathbb{R}^n et $\ell \in \mathbb{R}^n$. On dit que la suite u converge vers ℓ au sens de la norme N si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \geq k_0 \Rightarrow N(u_k - \ell) < \varepsilon$$

En reprenant la définition de la convergence d'une suite réelle, on remarque que cette définition est équivalente au fait que la suite réelle $(N(u_k - \ell))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 (i.e. $\lim_{k \rightarrow \infty} N(u_k - \ell) = 0$).

Par ailleurs, deux normes équivalentes ont les mêmes suites convergentes :

Proposition 3.2.2. Soient $N_1, N_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux normes sur \mathbb{R}^n (qui sont nécessairement équivalentes). Pour toutes suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de \mathbb{R}^n et $\ell \in \mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ au sens de la norme N_1 ,
2. $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ au sens de la norme N_2 .

Preuve. Comme les normes sont équivalentes, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$N_2(u_k - \ell) \leq \beta N_1(u_k - \ell) \quad \text{et} \quad N_1(u_k - \ell) \leq \frac{1}{\alpha} N_2(u_k - \ell).$$

Si $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ au sens de la norme N_1 , alors $\lim_{k \rightarrow \infty} N_1(u_k - \ell) = 0$ et la première inégalité donne $\lim_{k \rightarrow \infty} N_2(u_k - \ell) = 0$. Donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ au sens de la norme N_2 .

Si $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ au sens de la norme N_2 , alors un raisonnement similaire avec la seconde inégalité montre que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ au sens de la norme N_1 . \square

Dans la suite, on pourra donc dire qu'une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , sans préciser la norme utilisée pour définir cette convergence.

On rappelle le résultat vu au chapitre précédent : dans \mathbb{R}^n une suite converge si toutes les suites de ses coordonnées convergent :

Proposition 3.2.3.

Soit $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\begin{array}{c} u_{k,1} \\ \vdots \\ u_{k,n} \end{array} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}^n et $\ell = \left(\begin{array}{c} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{array} \right) \in \mathbb{R}^n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ dans \mathbb{R}^n
2. Pour tout $i = 1, \dots, n$ on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{k,i} = \ell_i$ dans \mathbb{R}

Preuve.

\square

On rappelle également que la limite, si elle existe, est unique.

3.2.2 Limites de fonctions

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application. On peut définir la continuité de f en munissant \mathbb{R}^n d'une norme N et \mathbb{R}^p d'une norme M .

Définition 3.2.4 (Limite de fonction). On suppose que \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p sont munis respectivement de normes N et M . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in D$. On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^p$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \quad N(x - a) < \eta \Rightarrow M(f(x) - \ell) < \varepsilon$$

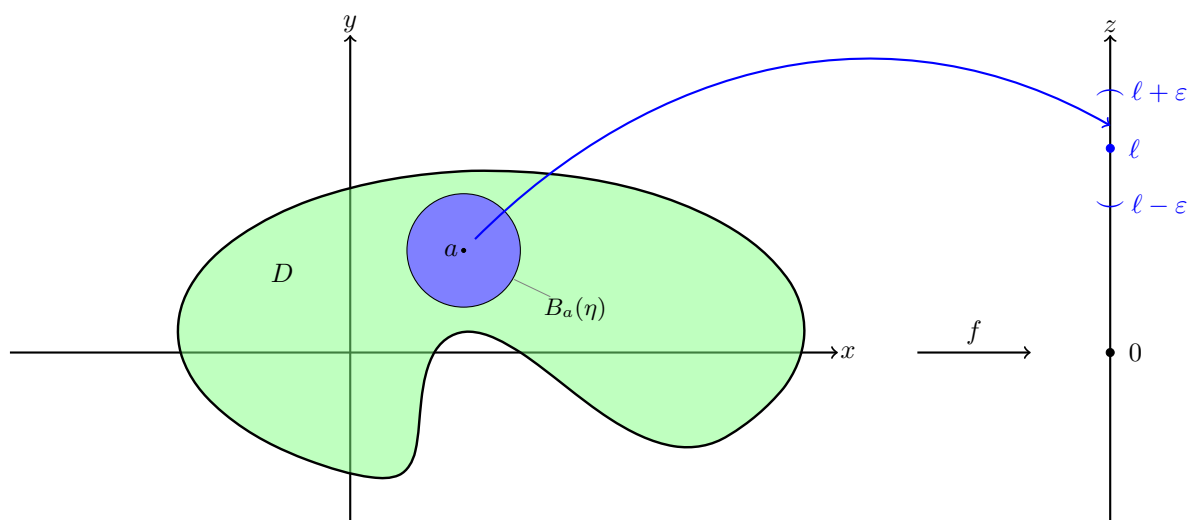


Illustration de la limite $\ell \in \mathbb{R}$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en a .

Proposition 3.2.5. Soient N_1, N_2 deux normes sur \mathbb{R}^n et M_1, M_2 deux normes sur \mathbb{R}^p . On a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ pour les normes N_1 et M_1 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ pour les normes N_2 et M_2 . Par ailleurs, si elle existe, la limite d'une fonction est unique.

Preuve. Vue en cours. □

Remarque. Comme en dimension finie les normes sont équivalentes, la définition précédente ne dépend pas du choix des normes sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p . Dans tout ce qui suit

- on parlera de limite sans préciser la norme si ce n'est pas nécessaire
- on notera $\|\cdot\|$ toutes les normes que nous rencontrerons si elle n'ont pas besoin d'être précisées
- dans la pratique, si on a besoin d'utiliser une norme particulière, on choisira celle qui nous arrange le mieux, et on le précisera par la notation. Par exemple, si on choisit d'utiliser la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n , on le précisera par la notation $\|\cdot\|_2$.

Quelques propriétés des limites

Proposition 3.2.6 (Caractérisation séquentielle de la limite). Soit $f : D \rightarrow F$ une fonction définie sur $D \subset E$ et $a \in E$ un point adhérent à D (i.e. $a \in \bar{D}$). Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f a pour limite ℓ en a
2. pour toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de D qui converge vers a , la suite $f(u_k)$ tend vers ℓ .

Preuve. Vue en cours. □

Proposition 3.2.7 (limite et opérations). *La notion de limite a les propriétés suivantes :*

- Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $a \in D$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \ell + \mu m$.
- Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in D$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \ell m$.
- Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in D$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \neq 0$ alors f ne s'annule pas au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\ell}$.

Preuve. Vue en cours. □

Proposition 3.2.8 (limite et composition de fonctions). *Soit $f : D \rightarrow E$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}^p$, et soit $g : E \rightarrow \mathbb{R}^q$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f(x)) = \ell$.*

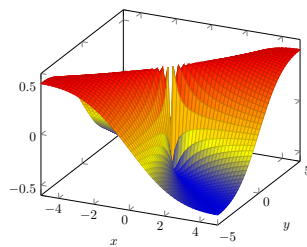
Preuve. Vue en cours. □

Calculer des limites en pratique

Les propositions 3.2.8 et 3.2.6 sont utiles pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in D$. Pour montrer que f n'a pas de limite en a , on a deux possibilités :

- en utilisant la caractérisation séquentielle, il suffit de trouver deux suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de même limite $a \in D$ et telles que $(f(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(f(v_k))_{k \in \mathbb{N}}$ ne possèdent pas la même limite.
- en utilisant la composition des limites, il suffit de trouver deux fonctions $g_1, g_2 : I \rightarrow D$ telles que $\lim_{t \rightarrow t_0} g_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} g_2(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} f(g_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow t_0} f(g_2(t))$.

Exemple. Étude de la limite en 0 de $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.



Montrer qu'une fonction admet une limite en un point

Proposition 3.2.9. *Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, et $\ell \in \mathbb{R}^p$. S'il existe une fonction $s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = 0$ et pour tout $x \in D$*

$$\|f(x) - \ell\| \leq s(\|x - a\|)$$

alors on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Preuve. Vue en cours. □

Remarque. Pour les fonctions de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cette dernière proposition suggère de passer en coordonnées polaires centrées en a , comme dans l'exemple ci dessous. En effet, la coordonnée r du point (x, y) est alors la norme euclidienne $\|x - a\|_2$, et il faut alors majorer $\|f(x) - \ell\|$ par une expression de la forme $s(r)$ avec $\lim_{r \rightarrow 0} s(r) = 0$.

Exemple. Calcul de limite en pratique : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$. Montrons de plusieurs manières que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

1. Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ on a $x^2 + y^2 \geq x^2$ et donc

$$\left| \frac{6x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| = 6|y| \leq 6\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

2. Pour démontrer l'existence d'une limite pour une fonction de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ il est souvent utile de passer en coordonnées polaires pour ramener le calcul d'une limite de fonction de deux variables à celui d'une limite d'une fonction d'une seule variable. Ainsi, pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ on a :

$$\left| \frac{6x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| \frac{6r^2 \cos^2(\theta)r \sin(\theta)}{r^2} \right| \leq 6r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

3.2.3 Continuité

Comme en dimension 1, la continuité des fonctions se définit à partir de la limite :

Définition 3.2.10. Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in D$. On dit que f est continue en a si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D}} f(x) = f(a).$$

La fonction f est continue sur D si f est continue en tout point de D .

En reprenant la définition de la limite, on obtient que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ est continue en $a \in D$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \quad \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

La continuité est une notion locale.

Exemple. Si $E = \mathbb{R}^n$ les fonctions polynomiales sont continues. En particulier les fonctions $s, p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $s(x, y) = x + y$ et $p(x, y) = xy$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .

La continuité étant définie à partir de la notion de limite, elle hérite des propriétés de cette dernière. En particulier, il résulte des propositions 3.2.7 et 3.2.8 que la notion de continuité est stable par les opérations algébriques usuelles :

Proposition 3.2.11. La notion de continuité est stable pour les opérations suivantes :

- Combinaison linéaire : soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $a \in D$. Si f et g sont continues en a , alors $\lambda f + \mu g$ est continue en a .
- Produit : soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in D$. Si f et g sont continues en a , alors fg est continue en a .
- Inverse : soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in D$. Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a et continue en a .
- Composition : soit $f : D \rightarrow E$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}^p$, et soit $g : E \rightarrow \mathbb{R}^q$. Si f est continue en $a \in D$ et g est continue en $f(a) \in E$, alors $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ est continue en a .

Preuve. C'est une conséquence directe des propriétés des limites. □

Par ailleurs, on a également une caractérisation séquentielle de la continuité, et on peut utiliser les mêmes méthodes pour montrer qu'une fonction est ou n'est pas continue en un point.

Exemple. L'application $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, mais elle n'est pas continue en $(0, 0)$.

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ elle est le quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc continue comme quotient de fonction continue.

En $(0, 0)$, on a $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$, et $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$, donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Proposition 3.2.12. Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ alors chacune de ses applications partielles f_a^i est continue en $a_i \in \mathbb{R}$, pour tout $i = 1, \dots, n$.

Preuve. Vue en cours. □

Remarque. La réciproque est fautive : la fonction $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3.3 Notions élémentaires de topologie

3.3.1 Ouverts et fermés

Définition 3.3.1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n . On dit que

1. une partie U de \mathbb{R}^n est un ouvert pour la norme $\|\cdot\|$ si pour tout $a \in U$, il existe un réel $r > 0$ tel que $B_r(a) \subset U$.
2. une partie F de \mathbb{R}^n est un fermé pour la norme $\|\cdot\|$ si son complémentaire $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin F\}$ est une partie ouverte.

Exemple.

- Le demi plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 0\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- Le demi plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 0\}$ est un fermé de \mathbb{R}^2 .
- la partie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y > 0\}$ n'est ni ouverte, ni fermée.

Par ailleurs, on montre facilement qu'une intersection (resp. une union) de deux ouverts est un ouvert. De même, une intersection (resp. une union) de deux fermés est un fermé.

Les parties ouvertes et fermées sont définies à l'aide d'une norme. Donc, à priori, les notions d'ouvert et de fermé dépendent de la norme utilisée. Mais pour deux normes équivalentes, les parties ouvertes (et fermées) sont les mêmes :

Proposition 3.3.2. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ une partie de \mathbb{R}^n , et N_1, N_2 deux normes sur \mathbb{R}^n (en particulier, elles sont équivalentes). La partie U est un ouvert pour N_1 si et seulement si U est un ouvert pour N_2 .

Preuve. □

Dans la suite, on pourra parler d'ouverts et/ou de fermés sans préciser la norme à priori.

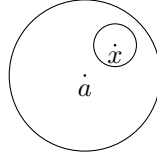
Proposition 3.3.3. Dans \mathbb{R}^n , une boule ouverte pour la norme $\|\cdot\|$ est un ouvert et une boule fermée est un fermé.

Preuve. Soit $B_r(a)$ la boule ouverte de \mathbb{R}^n de centre a et de rayon r . Pour $x \in B_r(a)$, notons $\varepsilon = \frac{r - \|x - a\|}{2}$. Comme $x \in B_r(a)$, on a $\|x - a\| < r$ et $\varepsilon > 0$. Montrons que $B_\varepsilon(x) \subset B_r(a)$.

Pour tout $y \in B_\varepsilon(x)$ on a $\|y - x\| < \varepsilon$, et par inégalité triangulaire on obtient

$$\|y - a\| = \|(y - x) + (x - a)\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < \varepsilon + \|x - a\| = \frac{r + \|a - x\|}{2}.$$

Comme $x \in B_r(a)$, on a $\|x - a\| < r$ d'où $\frac{r + \|a - x\|}{2} < r$. On en déduit que $\|y - a\| < r$ et $y \in B_r(a)$, d'où $B_\varepsilon(x) \subset B_r(a)$.



□

Proposition 3.3.4. Soient $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

- Si A et B sont des ouverts, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont des ouverts.
- Si A et B sont des fermés, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont des fermés.

Preuve. Vue en cours.

□

C'est encore vrai pour des réunions ou des intersections finies. Mais c'est faux pour des intersections infinies d'ouverts et des réunions infinies de fermés.

Proposition 3.3.5 (Caractérisation séquentielle des fermés). Soit F une partie non vide de \mathbb{R}^n . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. La partie F est fermée.
2. Pour toute suite convergente $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de points de F on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \in F$.

Preuve. Supposons que F soit un fermé, et soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de F telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$. Montrons par l'absurde que $\ell \in F$.

Supposons que $\ell \notin F$. On a alors $\ell \in F^c$ et F^c est un ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B_r(\ell) \subset F^c$. On en déduit que pour tout $x \in F$, on a $x \notin B_r(\ell)$ et $\|x - \ell\| \geq r$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $u_k \in F$, donc $\|u_k - \ell\| \geq r$. Or $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$, donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k - \ell\| = 0$, d'où, par passage à la limite dans l'inégalité précédente on obtient $0 \geq r > 0$. C'est une contradiction, donc $\ell \in F$.

La partie 2. \Rightarrow 1. est admise.

□

Cette proposition est très utile pour montrer qu'une partie est fermée quand elle est définie par des inégalités larges. Par exemple, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^x \leq y \leq 3 - x^2\}$ est une partie fermée de \mathbb{R}^2 .

Les notions d'ouverts et de fermés sont reliées à la continuité des fonctions par le résultat suivant :

Théorème 3.3.6. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction continue.

1. si $U \subset \mathbb{R}^p$ un ensemble ouvert, alors $f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in U\} \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert.
2. si $F \subset \mathbb{R}^p$ un ensemble fermé, alors $f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in F\} \subset \mathbb{R}^n$ est un fermé.

Preuve. 1. Soit $x \in f^{-1}(U)$. Par définition, on a $f(x) \in U$ et comme U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_r(f(x)) \subset U$. Par ailleurs, f est continue en x :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \|y - x\| < \eta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$$

Comme $r > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \|y - x\| < \eta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < r$. Soit $y \in B_\eta(x)$, on a alors $\|y - x\| < \eta$ et ce qui précède implique donc que $\|f(y) - f(x)\| < r$. On en déduit que $f(y) \in B_r(f(x)) \subset U$. Pour tout $y \in B_\eta(x)$ on a donc $f(y) \in U$, c'est à dire $y \in f^{-1}(U)$. On a montré l'existence de $\eta > 0$ tel que $B_\eta(x) \subset f^{-1}(U)$, donc $f^{-1}(U)$ est un ouvert. □

Remarque. Les propriétés précédentes sont en fait des caractérisations de la continuité : $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. un fermé).

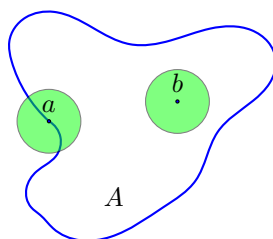
Le résultat précédent peut aussi être utilisé pour montrer qu'une partie est ouverte ou fermée. Par exemple, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < e^{x^2-y^2} < 3\}$ est un ouvert. En effet, la fonction $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$ est continue sur \mathbb{R}^2 et $A = f^{-1}(]1, 3[)$. Comme $]1, 3[$ est un ouvert de \mathbb{R} , son image réciproque par f est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

3.3.2 Intérieur et adhérence

Il existe des parties qui ne sont ni ouvertes, ni fermées, mais à toute partie $A \subset \mathbb{R}^n$ on peut associer naturellement une partie ouverte et une partie fermée qui lui sont "proches".

Définition 3.3.7. Soit A une partie de \mathbb{R}^n et $a \in \mathbb{R}^n$. On dit que a est un point

1. intérieur à A si on peut trouver un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que $a \in U$ et $U \subset A$. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et est noté $\overset{\circ}{A}$.
2. adhérent à A si tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ qui contient a satisfait $U \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et est noté \bar{A} .



Le point a est adhérent à A et b est intérieur à A .

Remarque. L'intérieur et l'adhérence d'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ ont les propriétés suivantes :

- on a $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$.
- la partie $\overset{\circ}{A}$ est ouverte et la partie \bar{A} est fermée.
- si $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouverte et $U \subset A$, alors $U \subset \overset{\circ}{A}$: l'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A .
- si $F \subset \mathbb{R}^n$ est fermée et $A \subset F$, alors $\bar{A} \subset F$: l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A .
- $a \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = a$.

Exemple.

Le dernier point de la remarque précédente nous dit que les points adhérent à A sont exactement les points qu'on peut atteindre comme limite de points de A .

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in \bar{D}$. Comme a est limite de points de D , on peut alors donner un sens à la limite de $f(x)$ quand x tend vers a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D \quad \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

Tout ce qui a été dit sur la limite de f en un point de D est encore valable pour la limite en un point de \bar{D} .

En particulier, si une fonction f est définie sur D , alors $\bar{D} \setminus D$ est l'ensemble des points où on peut espérer prolonger f par continuité.

Proposition-Définition 3.3.8. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$, et soit $a \in \bar{D} \setminus D$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, la fonction \tilde{f} définie sur $D \cup \{a\}$ par $\tilde{f}(a) = \ell$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in D$ est l'unique fonction continue en a dont la restriction à D est égale à f . On appelle \tilde{f} le prolongement par continuité de f à $\{a\}$.

Preuve. Vue en cours. □

3.3.3 Compacité

Parmi les théorèmes associés à la continuité pour les fonctions d'une variable, il y a les propriétés des fonctions continues sur un segment : Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors elle est bornée et atteint ses bornes. Dit autrement, $f([a, b])$ est un intervalle borné (car f est bornée) et fermé (car les bornes sont atteintes). La preuve utilise une propriété des suites bornées : de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Ces résultats s'étendent de \mathbb{R} à \mathbb{R}^n .

Définition 3.3.9. Une partie K de \mathbb{R}^n est compacte si de toute suite de points de K on peut extraire une sous suite convergente dont la limite est dans K .

Cette définition peut sembler ad-hoc pour ce qu'on veut démontrer ensuite, mais on a une caractérisation simple des parties compactes. Dans ce qui suit, une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est dite bornée s'il existe $R > 0$ tel que $A \subset B_R(0)$.

Théorème 3.3.10 (Bolzano-Weierstrass). Les parties compactes de \mathbb{R}^n sont les parties fermées et bornées.

Preuve. Admise dans ce cours... mais identique à la preuve dans le cas réel. □

On a alors l'analogie dans \mathbb{R}^n de la propriété des fonctions continues sur un segment :

Théorème 3.3.11. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction continue définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$. Si $K \subset D$ un ensemble compact, alors $f(K) \subset \mathbb{R}^p$ est une partie compacte de \mathbb{R}^p .

Preuve. Vue en cours. □

En reprenant les notations de l'énoncé, comme $f(K)$ est compacte, elle est aussi bornée, et la fonction f est bornée sur tout compact.

Parmi les autres théorèmes liés à la continuité, le théorème de valeurs intermédiaires a aussi un analogue pour les fonctions de plusieurs variables. Il faut faire appel pour cela à des notions qui dépassent le cadre de ce cours.

3.3.4 Pour aller un peu plus loin : distance sur un ensemble

Tout ce qui précède a été fait sur \mathbb{R}^n muni d'une norme, mais il y a une notion plus générale qui permet de faire de la topologie sur des ensembles qui ne sont pas des espaces vectoriels.

Définition 3.3.12. Soit X un ensemble. Une distance sur X est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- pour tout $x, y \in X$ on a $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- pour tout $x, y \in X$ on a $d(x, y) = d(y, x)$.
- pour tout $x, y, z \in X$ on a $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un ensemble X muni d'une distance d s'appelle un espace métrique et se note (X, d) .

Exemple. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^n , alors $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur \mathbb{R}^n .

À l'aide de distances, on peut définir une notion de limite pour une fonction entre deux espaces

métriques. Soit $f : (X, d) \rightarrow (Y, \delta)$ et $a \in X$, on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in Y$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in X \quad d(x, a) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), \ell) < \varepsilon$$

Avec cette notion de limite, on a une notion de continuité,... tout ce qui précède peut être généralisé aux espaces métriques et aux application entre eux.

Remarque. Il existe des distances qui ne sont pas associées à une norme sur un espace vectoriel. Par exemple la fonction $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

est une distance sur \mathbb{R}^n

Chapitre 4

Calcul différentiel sur \mathbb{R}^n

4.1 Différentiabilité

4.1.1 Dérivées directionnelles, dérivées partielles

La différence principale entre \mathbb{R} (où on sait dériver) et \mathbb{R}^n (où on voudrait le faire) est la dimension, c'est à dire le nombre de degrés de liberté pour se déplacer. Étant donnée une fonction de plusieurs variables, pour se ramener à des dérivées de fonctions d'une seule variable, on se fixe une direction et on dérive uniquement dans cette direction.

Définition 4.1.1 (Dérivée suivant un vecteur). Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$. Pour $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$ avec $v \neq 0$, on dit que f admet une dérivée en a suivant la direction v si l'application $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en $t = 0$. Dans ce cas on note :

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

$D_v f$ s'appelle la dérivée directionnelle de f suivant v .

Remarque. Il est important que U soit un ouvert pour que la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ soit bien définie au voisinage de 0. Par ailleurs, cette fonction est à valeurs dans \mathbb{R}^p , donc elle se dérive coordonnées à coordonnées, comme une courbe paramétrée.

Si on note $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$, alors la limite dans la définition précédente est égale à

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \begin{pmatrix} f_1(a + tv) - f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a + tv) - f_p(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(a + tv) - f_1(a)}{t} \\ \vdots \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_p(a + tv) - f_p(a)}{t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

En particulier, on a

$$D_v f(a) = \begin{pmatrix} D_v f_1(a) \\ \vdots \\ D_v f_p(a) \end{pmatrix}$$

On dérive donc coordonnées à coordonnées et on se ramène toujours à dériver des fonctions à valeurs réelles.

Parmi les vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n , il y a les vecteurs de la base canonique. Les dérivées directionnelles associées à ces vecteurs sont les dérivées partielles de f .

Dans la suite, on notera (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n .

Définition 4.1.2 (Dérivées partielles). Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$. Étant donné $a \in U$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, la $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f en a est, lorsqu'elle existe, la dérivée directionnelle de f en a suivant le vecteur e_j . On la note $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n)}{t}$$

Si, de plus, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ existe en tout point $a \in U$, on définit la $j^{\text{ème}}$ fonction dérivée partielle de f par

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ a & \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \end{cases} .$$

Remarque. Comme pour les dérivées directionnelles, on dérive coordonnées à coordonnées.

Par ailleurs, on se rappelle de la définition de la $j^{\text{ème}}$ fonction partielle en a :

$$f_a^j : \begin{cases} U_a^j & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) \end{cases}$$

où $U_a^j = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) \in U\}$. La définition des dérivées partielles donne donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_a^j(a_j + t) - f_a^j(a_j)}{t} = (f_a^j)'(a_j).$$

La $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle est la dérivée de la $j^{\text{ème}}$ fonction partielle. Le calcul de la $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle se fait donc en “gelant” toutes les variables sauf la $j^{\text{ème}}$, c’est à dire en les considérant comme des constantes.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Cette fonction admet des dérivées partielles en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les calculer. Admet-elle des dérivées directionnelles en $(0, 0)$?

On remarque cependant que f n’est pas continue en $(0, 0)$. La propriété d’admettre des dérivées partielles n’implique pas la continuité, elle est donc très faible.

4.1.2 Différentiabilité

Pour une fonction d’une variable réelle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, être dérivable en $a \in I$ est équivalent à admettre une DL à l’ordre 1 en a : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(a + h) = f(a) + \alpha h + h\varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. De plus, si f est effectivement dérivable, alors on a nécessairement $\beta = f'(a)$. Cela revient à dire que parmi toutes les fonctions affines, il en existe une qui approche f mieux que toute les autres.

En dimension plus grande, une application affine $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application de la forme $A(h) = A_0 + \Lambda(h)$ où $A_0 \in \mathbb{R}^p$ et $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est linéaire. En particulier, comme $\Lambda(0) = 0$, on a $A_0 = A(0)$. On peut maintenant utiliser cette approche pour définir une notion de “dérivabilité” pour les fonctions de plusieurs variables :

Définition 4.1.3 (Différentiabilité en a). Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$. Étant donné $a \in U$, on dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + \Lambda(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

Proposition-Définition 4.1.4. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in U$, l'application linéaire $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ donnée par la définition précédente est définie de manière unique.

Elle est appelée la différentielle de f en a et est notée $df(a)$.

Preuve.

□

En résumé, dire que f est différentiable en a , c'est dire que f admet un DL à l'ordre 1 en a , où le terme constant est $f(a)$ et le terme d'ordre 1 est donné par une application linéaire qui est la différentielle de f en a .

Notation. Pour une application linéaire $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $h \in \mathbb{R}^n$, on pourra noter $\Lambda(h) = \Lambda.h$. Cette notation est cohérente car la linéarité de Λ peut être vue comme la distributivité d'un produit sur la somme des vecteurs :

$$\Lambda.(\alpha h + \beta k) = \alpha \Lambda.h + \beta \Lambda.k$$

Contrairement à l'existence de dérivées partielles ou directionnelles, la notion de différentiabilité implique la continuité :

Proposition 4.1.5. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in U$ alors f est continue en a .

Preuve. Les applications linéaires sont continues sur \mathbb{R}^n , on a donc $\lim_{h \rightarrow 0} df(a).h = 0$ et un passage à la limite dans le DL de f en a donne $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$. Donc f est continue en a . □

Lien avec les dérivées partielles et directionnelles

On a vu précédemment que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

n'est pas continue, donc elle n'est pas différentiable en $(0, 0)$. Cependant, elle admet des dérivées partielles en $(0, 0)$. La notion de différentiabilité n'est donc pas équivalente à l'existence de dérivée partielles. On a pas équivalence, mais quand même une implication.

Proposition 4.1.6. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in U$, alors f admet en a une dérivée directionnelle suivant tout vecteur $v \neq 0$. De plus, cette dérivée directionnelle vérifie $D_v f(a) = df(a).v$.

Preuve.

□

Les dérivées partielles sont des cas particuliers de dérivées directionnelles, donc une fonction différentiable en a admet des dérivées partielles en a . De plus, si on note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n , on a alors $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j} f(a) = df(a).e_j$. En décomposant un vecteur $h \in \mathbb{R}^n$ dans la base canonique, on peut exprimer $df(a).h$ à partir de ses coordonnées et des dérivées partielles de f en a .

Proposition 4.1.7. Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in U$, et $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. On a alors $df(a).h = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$

Preuve.

□

Une fonction de plusieurs variables qui admet des dérivées partielles n'est pas forcément différentiable, mais on verra à la section suivante qu'il suffit d'ajouter une hypothèse de continuité des dérivées partielles pour que la fonction soit différentiable.

Matrice jacobienne et opérations

On sait que toute application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies peut être représentée par une matrice, dès qu'on a choisi une base dans chacun des deux espaces vectoriels.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ avec U ouvert de \mathbb{R}^n . Si f est différentiable en $a \in U$, alors $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est linéaire et on peut la représenter par une matrice en choisissant les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p .

Définition 4.1.8. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p . Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, avec U ouvert de \mathbb{R}^n , est différentiable en $a \in U$, la matrice jacobienne de f en a est la matrice de l'application linéaire $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

La matrice jacobienne de f en a est notée $\text{Jac}_f(a)$.

Remarque. On a donc $\text{Jac}_f(a) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(df(a))$, et compte tenu des dimensions des espaces de départ et d'arrivée, on a $\text{Jac}_f(a) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Par définition de la matrice d'une application linéaire, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\text{Jac}_f(a)$ est donnée par les coordonnées dans \mathcal{B}' du vecteur $df(a).e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. Les coefficients de la matrice jacobienne sont donc donnés par des dérivées partielles de f

Proposition 4.1.9.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^p$. Si f est différentiable en $a \in U$, alors

$$\text{Jac}_f(a) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

Preuve.

□

Proposition 4.1.10 (Linéarité de la différentielle). Soient $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiables en $a \in U$. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a).$$

De même, on a

$$\text{Jac}_{\lambda f + \mu g}(a) = \text{Jac}_f(a) + \text{Jac}_g(a).$$

Preuve.

□

Exemple. Développer un exemple...

Théorème 4.1.11 (Règle de la chaîne). Soient $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^q$ deux fonctions, où $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^p$ sont des ouverts. Si f est différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $f(a) \in V$, alors $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

De même on a

$$\text{Jac}_{g \circ f}(a) = \text{Jac}_g(f(a)) \cdot \text{Jac}_f(a).$$

Preuve. □

Remarque. Il s'agit de la généralisation de la formule de dérivation d'une composée pour $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On a alors pour $x \in \mathbb{R}$ $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Remarque. Compte tenu des dimensions des espaces vectoriels, on peut noter

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)),$$

$$g(y) = (g_1(y), \dots, g_q(y)) = (g_1(y_1, \dots, y_p), \dots, g_q(y_1, \dots, y_p))$$

et

$$g \circ f(x) = (g_1(f(x)), \dots, g_q(f(x))) = (g_1 \circ f(x_1, \dots, x_n), \dots, g_q \circ f(x_1, \dots, x_n))$$

Les matrices jacobiniennes sont donc

$$\text{Jac}_f(a) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \text{Jac}_g(f(a)) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(a)) \right]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$$

et le produit des matrices jacobiniennes est bien défini dans cet ordre. Comme on a par ailleurs

$$\text{Jac}_{g \circ f}(a) = \left[\frac{\partial g_i \circ f}{\partial x_j}(a) \right]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$$

la formule du produit matriciel donne

$$\frac{\partial g_i \circ f}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

Exemple. Coordonnées cylindriques : $\psi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . Calcul de $\frac{\partial f \circ \psi}{\partial x_j}$.

4.1.3 Le cas des fonctions à valeurs réelles

On s'intéresse au cas particulier où $p = 1$: on considère $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Si f est différentiable en $a \in U$, alors

$$\text{Jac}_f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

et pour tout vecteur $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$df(a).h = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n$$

Notation. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Pour tout $i = 1, \dots, n$, on note $dx_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire duale de e_i définie par

$$dx_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors $dx_i(h) = h_i$ (en d'autres termes dx_i renvoie la i -ème coordonnée de $h \in \mathbb{R}^n$ dans la base canonique). On peut alors noter

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n$$

Si $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions à valeurs réelles, on peut considérer la fonction produit fg .

Proposition 4.1.12. *Soit $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur $U \subset \mathbb{R}^n$. Si f et g sont différentiables en a alors fg est aussi différentiable en a et*

$$d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$$

Preuve.

□

Plan tangent

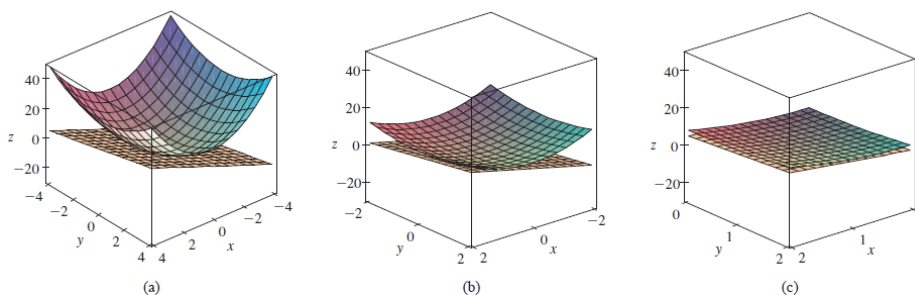
Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. Par définition, la fonction f est différentiable en (a, b) si, au voisinage de (a, b) , elle admet une bonne approximation à l'ordre 1 par une fonction affine. Comme les graphes des fonctions affines de deux variables sont des plans de \mathbb{R}^3 , le graphe de f est une surface qui admet, au voisinage de $(a, b, f(a, b))$ une bonne approximation par un plan, c'est à dire une surface qui admet un plan tangent.

Proposition 4.1.13. *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. Si f est différentiable en $(a, b) \in U$ alors son graphe \mathcal{G}_f admet un plan tangent en $(a, b, f(a, b))$ qui a pour équation :*

$$z = f(a, b) + (x - a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Preuve.

□



Vecteur gradient

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Si f est différentiable en $a \in U$, alors

$$df(a).h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n$$

pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Cette somme peut s'interpréter comme un produit scalaire de h avec

le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$.

Définition 4.1.14. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Si f est différentiable en $a \in U$, on appelle gradient de f en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

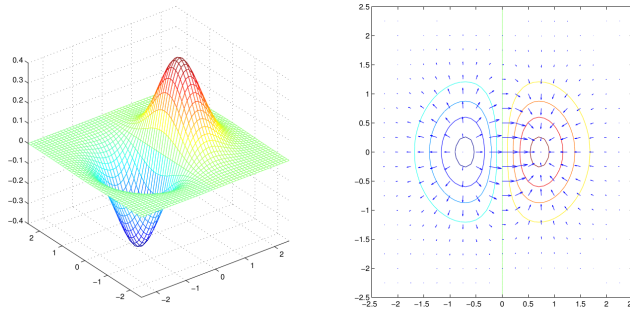
Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Par définitions du gradient et de la différentielle, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$df(a).h = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

Par ailleurs, pour tout $x \in U$, le gradient $\nabla f(x)$ est un vecteur de \mathbb{R}^n , on peut donc voir ∇f comme un champ de vecteurs sur U

$$\nabla f : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto \nabla f(x) \end{cases}$$

Ce champ de vecteur a la propriété d'être orthogonal aux lignes de niveaux de f . La raison heuristique en est la suivante : si $h \in \mathbb{R}^n$ est tangent à la ligne de niveau passant par $a \in U$, alors en se déplaçant dans la direction de h on reste sur la ligne de niveau et f reste constante égale à $f(a)$. On doit donc avoir $df(a).h = 0$, d'où $\langle \nabla f(a), h \rangle = 0$ et $\nabla f(a)$ est orthogonal à h , donc à la ligne de niveau.



4.2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1

4.2.1 Définition, propriétés

On a vu qu'une fonction différentiable admet des dérivées partielles, mais que la réciproque est fautive. Pour qu'une fonction admettant des dérivées partielles soit différentiable, il faut rajouter une hypothèse sur ces dérivées partielles.

Définition 4.2.1 (Fonction de classe \mathcal{C}^1). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert. La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 si elle admet des dérivées partielles en tout point de U , et si pour tout $i = 1, \dots, n$ la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est continue sur U .

Exemple. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, mais n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

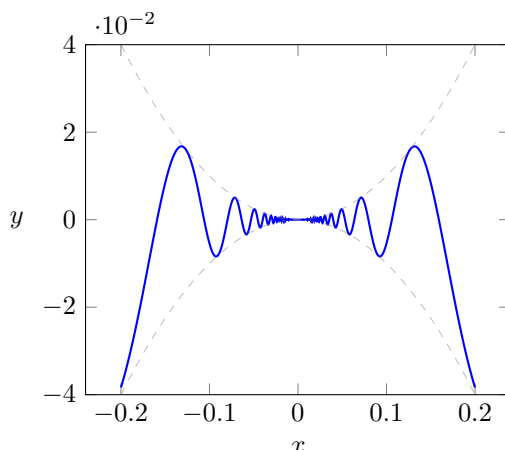
Remarque. Les opérations qui préservent l'existence de dérivées partielles et la continuité préservent aussi le caractère \mathcal{C}^1 des fonctions. Ainsi, les combinaisons linéaires et les compositions de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sont encore des fonctions de classe \mathcal{C}^1 . De même, pour les fonctions à valeurs réelles, les produits et inverses de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sont encore \mathcal{C}^1 .

Relation entre les fonctions \mathcal{C}^1 et les fonctions différentiables

Théorème 4.2.2. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert. Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U alors f est différentiable sur U .

Preuve. □

Remarque. La réciproque est fautive, même en dimension 1 : la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{|x|}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ n'est pas \mathcal{C}^1 mais est différentiable sur \mathbb{R} .



4.2.2 Difféomorphismes

Définition 4.2.3 (Difféomorphismes). Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n . On dit que $f : U \rightarrow V$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur V si f est une bijection de classe \mathcal{C}^1 de U et dont la réciproque $f^{-1} : V \rightarrow U$ est de classe \mathcal{C}^1 sur V .

Exemple. L'application $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Exemple. L'application $f : x \mapsto \text{Sign}(x)x^2$ est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} d'inverse $f^{-1} : x \mapsto \text{Sign}(x)\sqrt{|x|}$. L'application f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} mais f^{-1} n'est pas \mathcal{C}^1 , donc f n'est pas un difféomorphisme.

Proposition 4.2.4. Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n . Si $f : U \rightarrow V$ un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de U sur V alors pour tout $a \in U$, $df(a)$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^n et

$$(df(a))^{-1} = df^{-1}(f(a)).$$

Preuve. □

Remarque. Si $n \neq p$ et $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^p$ alors il n'existe pas de difféomorphisme entre U et V . En effet, la preuve précédente montrerait alors que $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est un isomorphisme, ce qui est impossible si $n \neq p$.

On dispose de la caractérisation suivante des difféomorphismes

Théorème 4.2.5 (Inversion globale). Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application injective de classe \mathcal{C}^1 . Alors f est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si $df(a)$ est un isomorphisme pour tout $a \in U$.

Preuve. Admis. □

Exemple. Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ et $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\psi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Cette fonction vérifie bien que $d\psi(r, \theta)$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^2 pour tout $(r, \theta) \in U$, mais ce n'est pas un difféomorphisme car elle n'est pas injective (on a $\psi(1, 0) = \psi(1, 2\pi)$).

Par contre, si on considère $V = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$, alors $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ est bien injective et c'est un difféomorphisme de V sur $\psi(V) = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$ (\mathbb{R}^2 privé de la demi-droite des réels négatif).

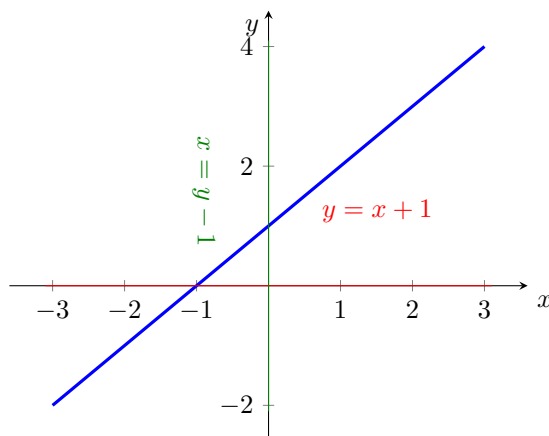
4.2.3 Fonctions implicites

Dans \mathbb{R}^2 , la droite D d'équation

$$ax + by + c = 0$$

est la ligne de niveau 0 de la fonction $(x, y) \mapsto ax + by + c$. Si $b \neq 0$ (i.e. si la droite n'est pas verticale) on peut isoler y , et cette droite peut être vue comme le graphe de la fonction $\varphi(x) = -\frac{ax+c}{b} : (x, \varphi(x)) \in D$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De la même manière, si $a \neq 0$ les points $(\psi(y), y)$ sont sur D , où $\psi(y) = -\frac{by+c}{a}$.



Remarque. En physique, on utilise très souvent cette formulation implicite. Par exemple, la loi d'Ohm, souvent énoncée par $U = RI$, devrait plutôt être comprise comme la formulation implicite de la courbe de niveau 0 de l'application $f(U, R, I) = U - RI$. En effet, on peut, suivant les besoins, exprimer U en fonction de R et de I , ou I en fonction de U et de R , etc...

Question. Étant donnée une équation $f(x, y) = 0$, à quelles conditions sur f existe-t-il une fonction φ telle que $f(x, \varphi(x)) = 0$?

Définition 4.2.6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$. Si T peut être représenté au voisinage de $(x_0, y_0) \in T$ par le graphe d'une fonction $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ où $x_0 \in]a, b[$ (i.e. $(x, \varphi(x)) \in T$ pour tout $x \in]a, b[$), alors on dit que φ est une fonction implicite de l'équation $f(x, y) = 0$.

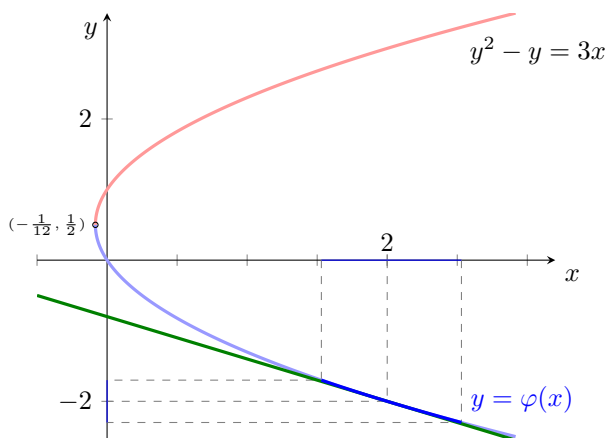
Exemple. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Théorème 4.2.7 (Fonction implicite sur \mathbb{R}^2). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U ouvert de \mathbb{R}^2 et $(x_0, y_0) \in U$. Si $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ alors il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et une unique fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que :

1. $\varphi(x_0) = y_0$.
2. $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.
3. $\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$ pour tout $x \in I$.
4. la droite tangente à la courbe $y = \varphi(x)$ en $x = x_0$ a pour équation $y = \varphi'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Preuve. Admis. □

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^2 - y - 3x$ et le point $(x_0, y_0) = (2, -2)$. On a $f(2, -2) = 0$ et on considère la courbe de niveau 0.



4.3 Dérivées d'ordres supérieurs

4.3.1 Définitions et propriétés

Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel et U un ouvert de E . On suppose que $\dim E = n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

Définition 4.3.1. Soit $f : U \rightarrow F$ et $a \in U$. On suppose que f admet une j -ème dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ pour $j = 1, \dots, n$. Si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ admet en a une k -ème dérivée partielle $\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)}{\partial x_k}$, $1 \leq k \leq n$, on dit que f admet en a une (k, j) -ième dérivée partielle seconde que l'on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$.

Remarque. En itérant le procédé, on définit les dérivées partielles triples, quadruples...

Définition 4.3.2. Une fonction $f : U \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^k sur U si pour tout $j_1, j_2, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_2} \partial x_{j_1}} : U \rightarrow F$ est continue sur U .

On dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ si f est de classe \mathcal{C}^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exemple. Calcul des dérivées partielles secondes de la fonction $f(x, y) = x^2 \cos(y)$.

Le calcul des dérivées secondes de l'exemple précédent semble suggérer que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont égales. C'est le cas pour les fonctions suffisamment régulières :

Théorème 4.3.3 (Schwarz). On suppose que $f : U \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^2 sur U . Alors, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on a sur U

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Preuve. □

Le résultat s'étend aux dérivées partielles d'ordre supérieur :

Proposition 4.3.4. Si $f : E \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^k sur U , alors pour tout $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ et toute permutation σ de $\{1, \dots, k\}$, on a :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \cdots \partial x_{j_1}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\sigma(k)}} \cdots \partial x_{j_{\sigma(1)}}}$$

Preuve. C'est un corollaire du théorème de Schwarz. \square

Notations : Par exemple, si f est de classe \mathcal{C}^4 sur U les calculs de dérivées partielles d'ordres ≤ 4 peuvent se faire dans un ordre arbitraire et on écrit : $\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$ pour $\frac{\partial^4 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_1}$.

Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k

Proposition 4.3.5. Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts :

1. Addition : $f, g : U \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^k sur U alors $f + g$ est de classe \mathcal{C}^k sur U .
2. Multiplication par un scalaire : $f : U \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^k sur U alors λf est de classe \mathcal{C}^k sur U .
3. Multiplication (cas de $F = \mathbb{R}$) : $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k sur U alors fg est de classe \mathcal{C}^k sur U .
4. Inverse (cas de $F = \mathbb{R}$) : $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k sur U et $a \in U$ tel que $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est de classe \mathcal{C}^k sur un voisinage de $a \in U$.
5. Composition : $f : U \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Si f est de classe \mathcal{C}^k sur U et g est de classe \mathcal{C}^k sur $V \supset f(U)$, alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est de classe \mathcal{C}^k sur U .

4.3.2 Formule de Taylor et matrice hessienne

Théorème 4.3.6 (Formule de Taylor-Young). Soit $f : U \rightarrow F$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 et $a \in U$. Alors il existe une fonction $\omega : E \rightarrow F$ définie au voisinage de 0 telle que pour tout $h \in E$ assez petit en norme,

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \frac{1}{2} d_a^2 f(h, h) + \|h\|^2 \omega(h) \text{ avec } \|\omega(h)\| \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$$

où $d_a^2 f(h, h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$.

Preuve. \square

Exemple. Développement limité en $(0, 0)$ et à l'ordre 2 de $(x, y) \mapsto (ye^x, \cos(x+y))$.

On pose $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$:

1. $f_1(x, y) = ye^x$ et $f_1(h_1, h_2) = h_2 + h_1 h_2 + \|h\|^2 \omega_1(h)$ où $\|h\|^2 \omega_1(h) = o(\|h\|^2)$.
2. $f_2(x, y) = \cos(x+y)$ et $f_2(h_1, h_2) = 1 - \frac{1}{2}(h_1 + h_2)^2 + \|h\|^2 \omega_2(h)$ où $\|h\|^2 \omega_2(h) = o(\|h\|^2)$.

Ainsi, on a $f(h_1, h_2) = (0, 1) + (h_2, 0) + \frac{1}{2}(2h_1 h_2, (h_1 + h_2)^2) + \|h\|^2(\omega_1(h), \omega_2(h))$

Dans le cas $F = \mathbb{R}$: Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et $a, h \in \mathbb{R}^n$, la formule de Taylor donne :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2).$$

L'application $Q_a f : h \mapsto d_a^2 f(h, h) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$ est une forme quadratique sur \mathbb{R}^n . On peut donc l'écrire sous forme matricielle :

Définition 4.3.7. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} et $a \in U$. On appelle matrice Hessienne de f en a la matrice

$$\text{Hess}_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

En notations matricielles on a alors :

$$f(a+h) = f(a) + [J_f(a)]h + \frac{1}{2}h^t \text{Hess}_f(a)h + o(\|h\|^2)$$

Exemple. Soit $f_1(x, y) = ye^x$, alors $J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\text{Hess}_f(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a :

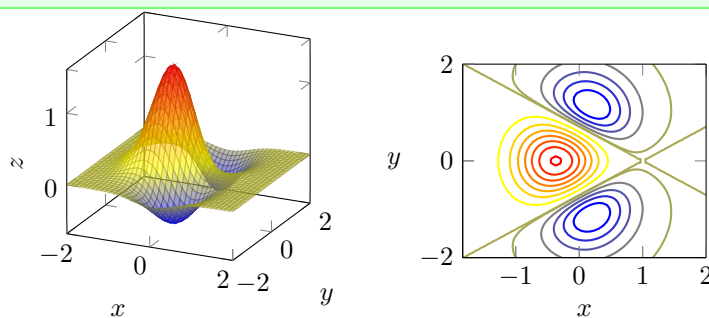
$$f_1(h_1, h_2) = 0 + (h_1, h_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(\|h\|^2) = h_2 + h_1 h_2 + o(\|h\|^2)$$

4.3.3 Étude des extréma locaux

Définition 4.3.8. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $D \subset E$ et $a \in D$. La fonction f admet en a

1. un maximum (resp. minimum) global si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).
2. un maximum (resp. minimum) strict si pour tout $x \in D \setminus \{a\}$ on a $f(x) < f(a)$ (resp. $f(x) > f(a)$).
3. un maximum (resp. minimum) local si il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in D \cap V$ on a $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

On dit que f admet en $a \in D$ un extremum global (resp. strict ou local) si f admet un maximum ou un minimum global (resp. strict, local).



Graphes et lignes de niveau de la fonction $(x, y) \mapsto ((x-1)^2 - 2y^2)e^{-2x^2 - y^2}$.

Condition nécessaire d'ordre 1

Définition 4.3.9. On suppose que $\dim E = n$. On dit que $f : U \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^1 sur U admet un point critique en $a \in U$ si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Théorème 4.3.10. Soit $f : U \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^1 sur U . Si f admet un extremum local en $a \in U$ alors a est un point critique de f .

Preuve.

□

Exemple. La condition n'est pas suffisante : prendre $f(x, y) = xy$ en $(0, 0)$.

Condition suffisante d'ordre 2

On suppose maintenant que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 et que a est un point critique de f . D'après la formule de Taylor-Young on a :

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2}Q_a f(h) + o(\|h\|^2)$$

Le signe de la forme quadratique $Q_a f : h \mapsto d_a^2 f(h, h) = h^t \text{Hess}_f(a)h$ permet dans certains cas de caractériser les extrema :

Proposition 4.3.11. Soit $a \in D$ un point critique de $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Si la forme quadratique $Q_a f$ est :

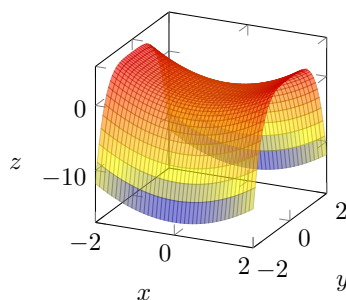
1. définie et positive alors f admet un minimum local strict en a .
2. définie et négative alors f admet un maximum local strict en a .

Preuve.

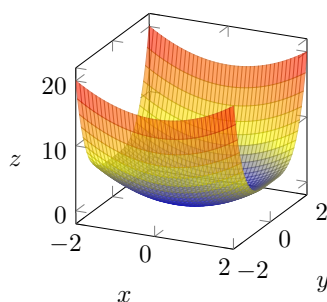
□

Remarque. Ne pas oublier la condition "définie" : soit $f_1 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}x^2 - y^4$ et $f_2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}x^2 + y^4$. On a $J_{f_1}(a) = J_{f_2}(a) = (0, 0)$ et $\text{Hess}_{f_1}(0, 0) = \text{Hess}_{f_2}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, l'origine est un point critique de f_1 et f_2 , les formes quadratiques $Q_a f_1$ et $Q_a f_2$ sont positives non-définies.

1. l'origine n'est pas un extremum de f_1 :



2. l'origine est un minimum (global) de f_2 :



Fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

Notation de Monge : Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur U et $(a, b) \in U \subset \mathbb{R}^2$. On note $p = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$. La formule de Taylor-Young devient :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + o(h^2 + k^2)$$

Proposition-Définition 4.3.12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 sur U et $(a, b) \in U$ un point critique de f :

1. si $rt - s^2 \neq 0$ on dit que (a, b) est un point critique non dégénéré. Dans ce cas :

(a) si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$: (a, b) est un minimum local de f .

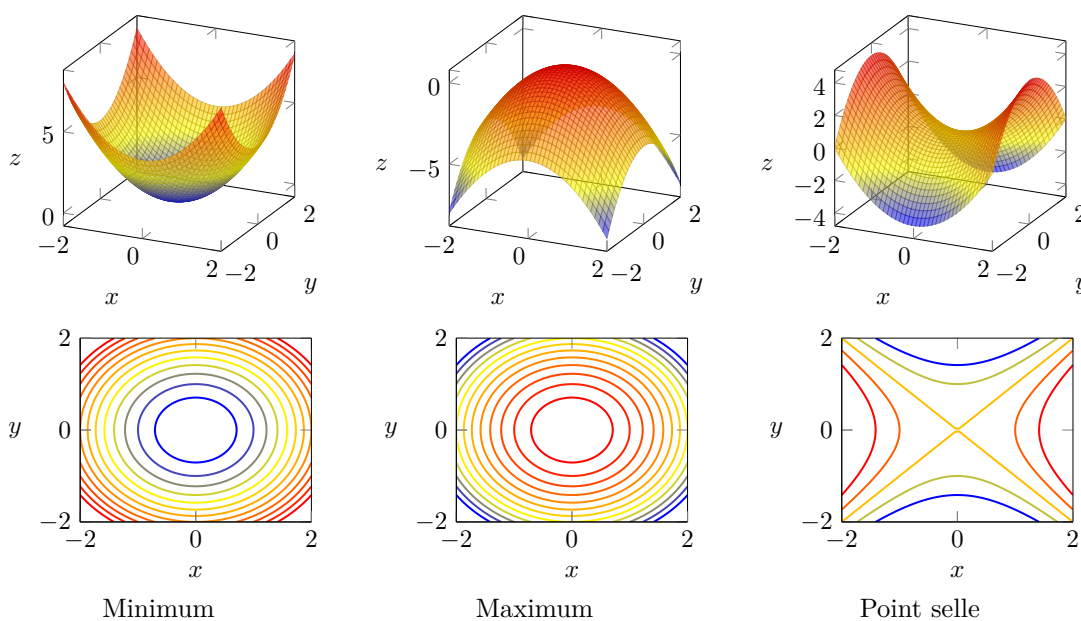
(b) si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$: (a, b) est un maximum local de f .

(c) si $rt - s^2 < 0$: (a, b) est un point selle de f .

2. si $rt - s^2 = 0$ on dit que (a, b) est un point critique dégénéré.

Preuve.

□



Exemple. $f(x, y) = (x - y)^2 + x^3 + y^3$.

Exemple. $f(x, y) = (x - y)^2 + x^4 + y^4$.

Chapitre 5

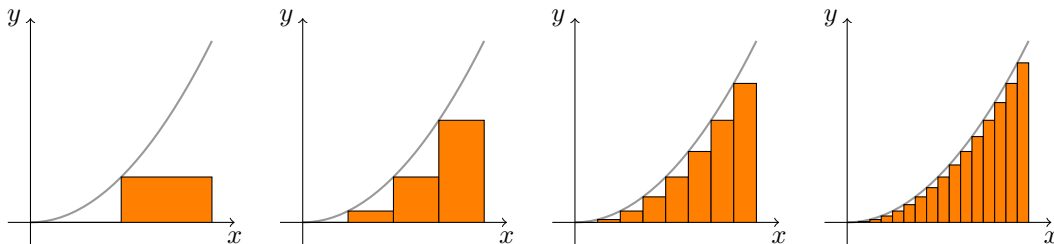
Intégrales multiples

5.1 Rappel sur les intégrales simples

5.1.1 Construction de l'intégrale de Riemann

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On construit l'intégrale de Riemann en plusieurs étapes :

1. l'intégrale des fonctions constantes sur $[a, b]$.
2. on définit par linéarité l'intégrale des fonctions en escalier (constantes par morceaux).
3. Si f est suffisamment régulière ("Riemann intégrable"), on approche f par une suite de fonctions en escalier, puis on définit l'intégrale comme la limite des intégrales des fonctions en escalier.
4. On montre que les fonctions continues sur un fermé borné sont Riemann intégrable.



Enfin, on montre le théorème fondamental de l'analyse (lien entre calcul de primitive et intégration).

5.1.2 Intégrales à paramètres

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et J un intervalle non vide de \mathbb{R} . On considère une fonction f de $[a, b] \times J$ dans \mathbb{R} . On cherche à étudier l'application ϕ définie sur J par

$$\phi(y) = \int_a^b f(t, y) dt.$$

Proposition 5.1.1. *On suppose que f est continue sur $[a, b] \times J$. Alors ϕ est définie et continue sur J .*

Preuve. Admis. Mais on peut aller Voir [?] page 229. □

Proposition 5.1.2. *On suppose que J est un intervalle ouvert. On suppose que f est continue sur $[a, b] \times J$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue sur $[a, b] \times J$. Alors l'application ϕ est définie et de classe \mathcal{C}^1 et*

$$\phi'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dt$$

Preuve. Admis. Mais on peut aller Voir [?] page 230. □

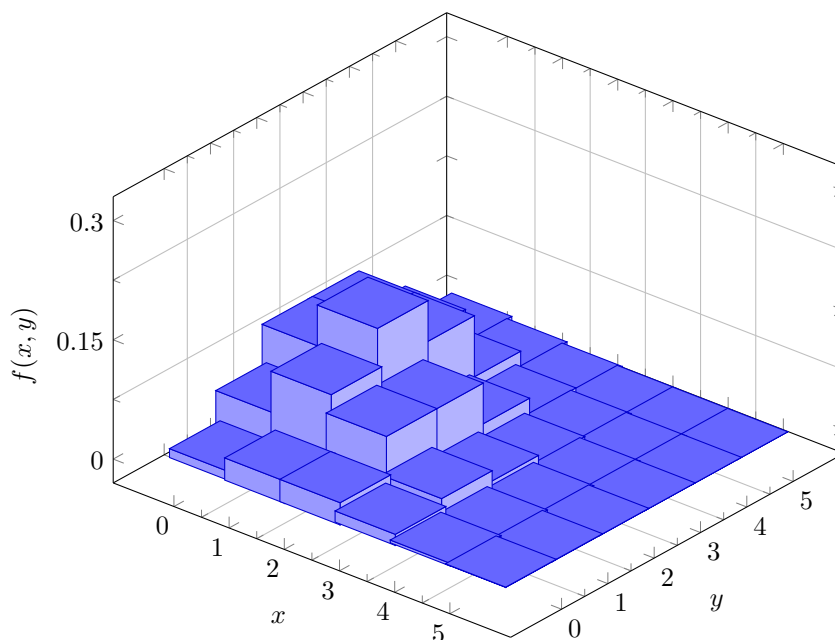
Remarque. Sous les hypothèses de la proposition précédente : la dérivée de l'intégrale est égale à l'intégrale de la dérivée. . .

Exemple. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$. Calcul de $f(0)$ et $f'(0)$.

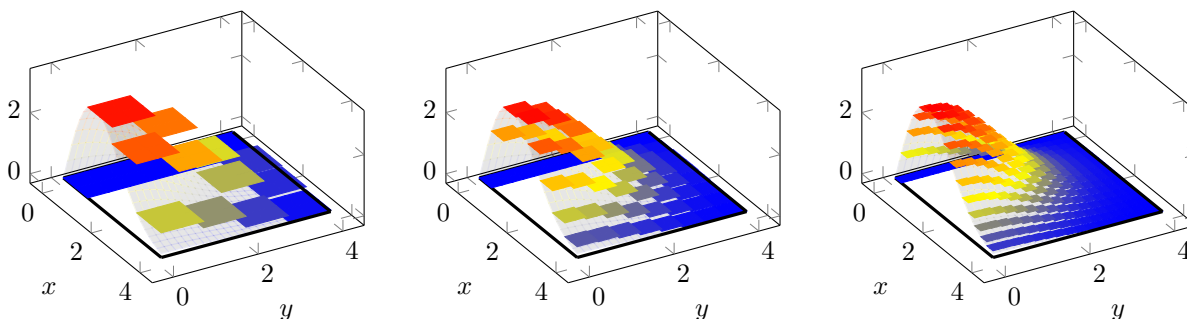
5.2 Intégrales doubles

La construction de l'intégrale de fonctions de plusieurs variables suit sensiblement le même schéma que pour l'intégrale simple. Au lieu de calculer une aire, on calcul un volume.

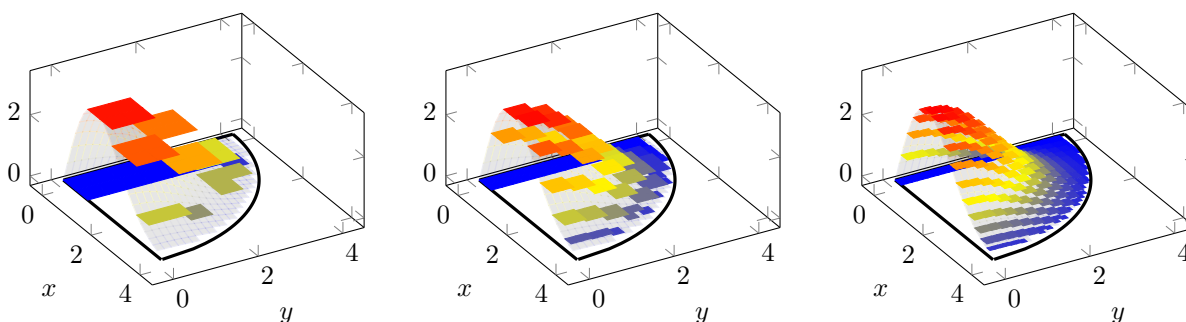
1. On définit l'intégrale de fonctions indicatrices :



2. L'intégrale de fonction plus générale est alors définie comme la limite des intégrales de fonctions indicatrices :



La difficulté supplémentaire pour les intégrales doubles est que le domaine d'intégration peut être plus compliqué qu'un simple pavé ("un rectangle"). Ici, on souhaite calculer le volume situé sous le graphe d'une fonction et dont la base est un quart de disque.



5.2.1 Intégrales double sur un rectangle

Définition 5.2.1. Un pavé P est un sous ensemble de \mathbb{R}^2 de la forme $P = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ où $a \leq b$ et $c \leq d$.

Théorème 5.2.2 (Fubini pour les pavés). Soit $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On a alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

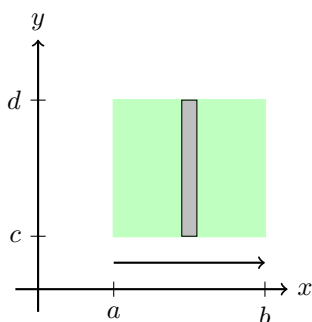
Preuve. Admis. Mais on peut aller voir [?] page 250. □

Définition 5.2.3 (Intégrale double sur un rectangle). L'intégrale double sur le pavé $P = [a, b] \times [c, d]$ de la fonction réelle f est la valeur commune des deux intégrales du théorème précédent :

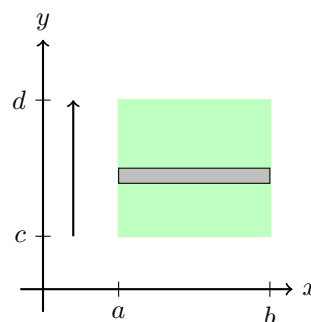
$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Notations : $\iint_P f(x, y) dx dy$ ou $\iint_P f$ ou $\int_P f(x, y) dx dy$ ou $\int_P f$ si il n'y a pas d'ambigüités.

Remarque. On peut calculer l'intégrale double de deux manières différentes :



2) intégrer par rapport à y ("en colonne"), puis intégrer par rapport à x ("en ligne")



1) intégrer par rapport à x ("en ligne"), puis intégrer par rapport à y ("en colonne")

Proposition 5.2.4. Si $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ se décompose en $f(x, y) = g(x)\ell(y)$ alors on a :

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d \ell(y) dy \right)$$

Preuve. □

Exemple. $f(x, y) = xy^2$ définie sur $P = [0, 1] \times [1, 2]$.

5.2.2 Parties élémentaires, parties simples

Définition 5.2.5 (Partie élémentaire du plan). Une partie A de \mathbb{R}^2 est dite élémentaire si elle admet les deux définitions suivantes

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \quad (1)$$

et

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\} \quad (2)$$

où φ_1, φ_2 (resp. ϕ_1, ϕ_2) sont des fonctions continues sur $[a, b]$ (resp. $[c, d]$)

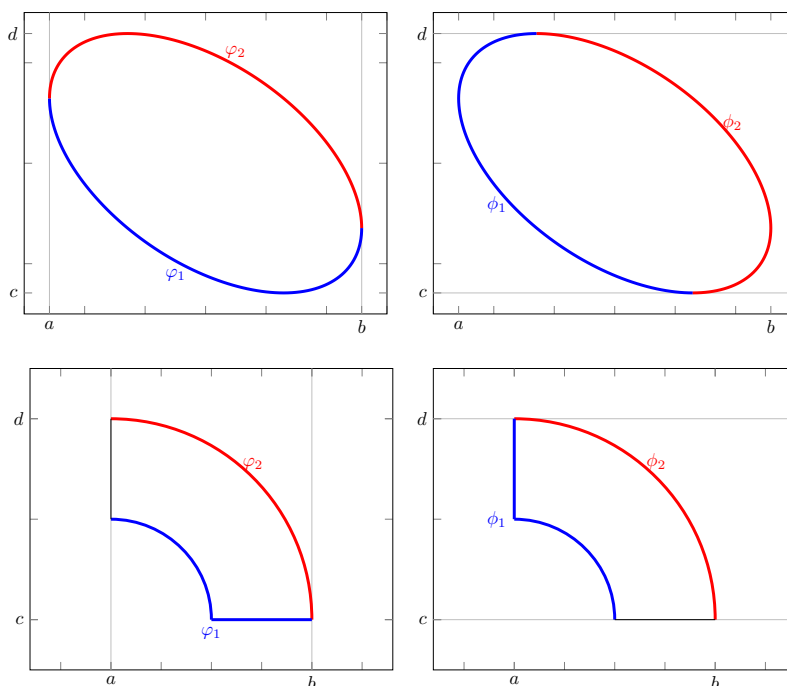
Remarque. L'intérieur de A est :

$$\overset{\circ}{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} \quad (1)$$

et

$$\overset{\circ}{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c < y < d, \phi_1(y) < x < \phi_2(y)\}. \quad (2)$$

Exemple. Voici quelques exemples :



Théorème 5.2.6 (Fubini). Soit A une partie élémentaire définie par les formules (1) et (2) ci dessus. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On a alors :

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Preuve. Admis. □

Définition 5.2.7 (Intégrale double sur une partie élémentaire). L'intégrale double sur A de f est alors la valeur commune des deux intégrales ci-dessus. On a

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Notations : $\iint_A f(x, y) dx dy$ ou $\iint_A f$ ou $\int_A f(x, y) dx dy$ ou $\int_A f$ si il n'y a pas d'ambigüités.

Exemple. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ et $f(x, y) = xy$.

Proposition-Définition 5.2.8. L'aire de la partie élémentaire A est définie par

$$\text{Aire}(A) = \iint_A dx dy.$$

On a alors

$$\text{Aire}(A) = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx = \int_c^d (\phi_2(y) - \phi_1(y)) dy.$$

Exemple. Soit A de disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Retrouver $\text{Aire}(A) = \pi$

5.2.3 Intégrales doubles sur une partie simple

Définition 5.2.9. On dit que A est une partie simple de \mathbb{R}^2 si c'est la réunion d'une famille finie de parties élémentaires dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.

Définition 5.2.10 (Intégrale double sur une partie simple). Soit A une partie simple de \mathbb{R}^2 , on peut écrire $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ où les A_i sont des parties élémentaires. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on définit l'intégrale double de f sur A par

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} f(x, y) dx dy.$$

Notations : $\iint_A f(x, y) dx dy$ ou $\iint_A f$ ou $\int_A f(x, y) dx dy$ ou $\int_A f$ si il n'y a pas d'ambigüités.

Exemple. La couronne :

Définition 5.2.11. L'aire $\text{Aire}(A)$ d'une partie simple de A de \mathbb{R}^2 est définie par

$$\text{Aire}(A) = \iint_A dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} dx dy = \sum_{i=1}^n \text{Aire}(A_i).$$

5.2.4 Propriétés des intégrales doubles

Proposition 5.2.12 (Linéarité). Soit A une partie simple de \mathbb{R}^2 . Soient $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\iint_A \lambda f + \mu g = \lambda \iint_A f + \mu \iint_A g.$$

Proposition 5.2.13 (Croissance). Soit A une partie simple de \mathbb{R}^2 et $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f \leq g$. Alors

$$\iint_A f \leq \iint_A g.$$

Proposition 5.2.14. Soient A_1 et A_2 deux parties simples de \mathbb{R}^2 telles que $A_1 \subset A_2$ et f une fonction continue et positive sur A_2 . Alors

$$\iint_{A_1} f \leq \iint_{A_2} f.$$

Définition 5.2.15. Soit A une partie simple de \mathbb{R}^2 . On appelle centre de gravité de A , le point de coordonnées :

$$\frac{1}{\text{Aire } A} \left(\iint_A x dx dy, \iint_A y dx dy \right).$$

Exemple. Calculer le centre de gravité du disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

5.3 Intégrales triples

Les définitions des domaines élémentaires peuvent être généralisées de manière évidente à \mathbb{R}^n . On se contente ici de traiter le cas $n = 3$.

5.3.1 Intégrales triples sur un pavé

Définition 5.3.1. Soient $a < a'$, $b < b'$ et $c < c'$ des réels. L'ensemble $P = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$ est un pavé de \mathbb{R}^3 .

Définition 5.3.2. L'intégrale triple sur P de $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^{a'} \left(\int_b^{b'} \left(\int_c^{c'} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Notations : $\iiint_P f(x, y) dx dy$ ou $\iiint_P f$ ou $\int_P f(x, y) dx dy$ ou $\int_P f$ si il n'y a pas d'ambiguïtés.

Remarque. Les propriétés de l'intégrale triples sont identiques à l'intégrale double :

1. on peut permuter l'ordre d'intégration.
2. si $f(x, y, z) = \alpha(x)\beta(y)\gamma(z)$ alors

$$\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz = \left(\int_a^{a'} \alpha(x) dx \right) \left(\int_b^{b'} \beta(y) dy \right) \left(\int_c^{c'} \gamma(z) dz \right).$$

5.3.2 Sommation par piles, sommations par tranches

Définition 5.3.3. On suppose que $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | u(x, y) \leq z \leq v(x, y), (x, y) \in \mathcal{D}\}$ où \mathcal{D} est une partie simple de \mathbb{R}^2 et $u, v : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. L'intégrale d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur Δ est

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Définition 5.3.4. Le volume de Δ est noté $\text{Vol}(\Delta)$ et est défini par

$$\text{Vol}(\Delta) = \iiint_{\Delta} dx dy dz = \iint_{\mathcal{D}} (v(x, y) - u(x, y)) dx dy$$

Exemple. Calculer le volume du simplexe $T_3 = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 | x + y + z \leq 1\}$.

Définition 5.3.5. On suppose que $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in \mathcal{D}_z, a \leq z \leq b\}$ où \mathcal{D}_z est une partie simple de \mathbb{R}^2 pour tout $z \in [a, b]$. L'intégrale de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continue est

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{\mathcal{D}_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

Définition 5.3.6. Le volume de Δ est noté $\text{Vol}(\Delta)$ et est défini par

$$\text{Vol}(\Delta) = \iiint_{\Delta} dx dy dz = \int_a^b \text{Aire}(\mathcal{D}_z) dz.$$

Exemple. Montrer que le volume de la boule unité de \mathbb{R}^3 vaut $\frac{4\pi}{3}$

Définition 5.3.7. Soit A une partie simple de \mathbb{R}^3 . On appelle centre de gravité de A , le point de coordonnées :

$$\frac{1}{\text{Vol } A} \left(\iiint_A x dx dy dz, \iiint_A y dx dy dz, \iiint_A z dx dy dz \right).$$

5.4 Formule de changement de variables

Proposition 5.4.1. Soient U et V deux ouverts bornés de \mathbb{R}^n et $\varphi : U \rightarrow V$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme tel que $\varphi(U) = V$. Alors pour toute fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ continue :

$$\int_{\varphi(U)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_U f(\varphi(u_1, \dots, u_n)) |\det J_{\varphi}(u)| du_1 \cdots du_n.$$

où $\det J_{\varphi}$ est le déterminant de la matrice jacobienne de φ .

Preuve. Admis. □

La formule précédente généralise la formule de changement de variables dans les intégrales simples :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt.$$

5.4.1 Cas des intégrales doubles

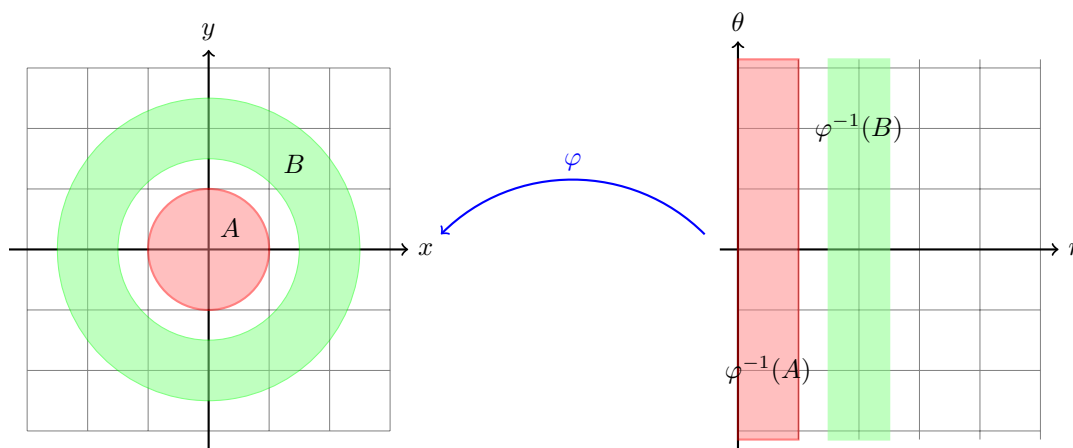
Dans le cas où $n = 2$ on a $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $\varphi(u_1, u_2) = (\varphi_1(u_1, u_2) = x_1, \varphi_2(u_1, u_2) = x_2)$ et

$$\iint_{\varphi(U)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_U f(\varphi(u_1, u_2)) |\det J_{\varphi}(u_1, u_2)| du_1 du_2,$$

$$\text{où } \det J_{\varphi}(\cdot) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} \end{vmatrix}.$$

Exemple. Changement de coordonnées polaires : $\varphi :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[: \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$ défini par $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$. On a alors $\det J_\varphi(r, \theta) = r$ et la formule du changement de variable s'écrit :

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \iint_{\varphi^{-1}(\Delta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$



L'aire du rectangle rouge $\varphi^{-1}(A)$ et du rectangle vert $\varphi^{-1}(B)$ dans le plan (r, θ) sont égales. Pour retrouver les aires des couronnes A et B correspondantes dans le plan (x, y) il faut multiplier par un facteur correctif $|\det J_\varphi(r, \theta)| = r$:

$$\begin{aligned} \text{Aire}(A) &= \iint_A dx dy = \iint_{\varphi^{-1}(A)} r dr d\theta = \int_0^1 r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi \\ \text{Aire}(B) &= \iint_B dx dy = \iint_{\varphi^{-1}(B)} r dr d\theta = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2(2\pi) = 4\pi \end{aligned}$$

Exemple. Changement de coordonnées affines.

5.4.2 Cas des intégrales triples

Dans le cas où $n = 3$ on a $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $\varphi(u_1, u_2, u_3) = (\varphi_1(u_1, u_2, u_3) = x_1, \varphi_2(u_1, u_2, u_3) = x_2, \varphi_3(u_1, u_2, u_3) = x_3)$ et

$$\iiint_{\varphi(U)} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_U f(\varphi(u_1, u_2, u_3)) |\det J_\varphi(u_1, u_2, u_3)| du_1 du_2 du_3,$$

$$\text{où } \det J_\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_3} \end{vmatrix}.$$

Exemple. Changement de coordonnées cylindriques.

Exemple. Changement de coordonnées sphériques.

5.5 Circulation d'un champ de vecteurs

5.5.1 Définitions et propriétés

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Définition 5.5.1 (Intégrale d'une fonction le long d'une courbe). Soit $\Gamma = ([a, b], \phi)$ un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 . On considère $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ouvert $U \subset E$. On suppose que $\phi([a, b]) \subset U$. L'intégrale de f le long de la courbe $\Gamma = ([a, b], \phi)$ est

$$\int_{\Gamma} f d\phi = \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt.$$

Définition 5.5.2. Soit $\Gamma = ([a, b], \phi)$ un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 . On considère le champ de vecteurs $V : U \rightarrow E$ continue sur un ouvert $U \subset E$. On suppose que $\phi([a, b]) \subset U$. On appelle circulation du champ de vecteurs V le long de Γ le réel :

$$\int_{\Gamma} \langle V, d\phi \rangle = \int_a^b \langle V(\phi(t)), \phi'(t) \rangle dt.$$

Notation : Si $E = \mathbb{R}^2$ on pose $V = (V_1, V_2)$ et $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ définie sur $[a, b]$, alors

$$\int_{\Gamma} \langle V, d\phi \rangle = \int_a^b V_1(\phi(t))\phi_1'(t)dt + \int_a^b V_2(\phi(t))\phi_2'(t)dt = \int_{\Gamma} V_1 dx + V_2 dy.$$

Remarque. Les fonctions ϕ et ϕ' sont continues sur $[a, b]$ et V est continu sur $U \supset \phi([a, b])$. Ainsi, $t \mapsto \langle V(\phi(t)), \phi'(t) \rangle$ est continue et l'intégrale est bien définie.

Proposition 5.5.3 (Relation de Chasles). Avec les notations de la définition précédente. Pour $c \in [a, b]$ on note :

$$\Gamma_{a,c} = ([a, c], \phi), \quad \Gamma_{c,b} = ([c, b], \phi), \quad \Gamma_{a,b} = ([a, b], \phi)$$

Alors,

$$\int_{\Gamma_{a,b}} \langle V, d\phi \rangle = \int_{\Gamma_{a,c}} \langle V, d\phi \rangle + \int_{\Gamma_{c,b}} \langle V, d\phi \rangle$$

Cette formule se généralise à un nombre fini de point de $]a, b[$. On étend alors la définition de l'intégrale curviligne aux arcs continues de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Si $\Gamma = ([a, b], \phi)$ est \mathcal{C}^1 par morceau pour la subdivision $a = a_0 < \dots < b = a_m$ alors on pose

$$\int_{\Gamma} \langle V, d\phi \rangle = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\Gamma_{a_i, a_{i+1}}} \langle V, d\phi \rangle.$$

Proposition 5.5.4 (Changement de paramétrage). Soit $\Gamma = ([a, b], \phi)$ un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 . Étant donné le \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\theta : [c, d] \rightarrow [a, b]$ considérons la courbe Γ' définie par la paramétrisation $([c, d], \psi = \phi \circ \theta)$. Alors,

$$\int_{\Gamma} \langle V, d\phi \rangle = \varepsilon \int_{\Gamma'} \langle V, d\psi \rangle$$

$$\text{où } \varepsilon = \text{sign}(\theta') = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \text{ est croissant} \\ -1 & \text{si } \theta \text{ est décroissant} \end{cases}.$$

Preuve.

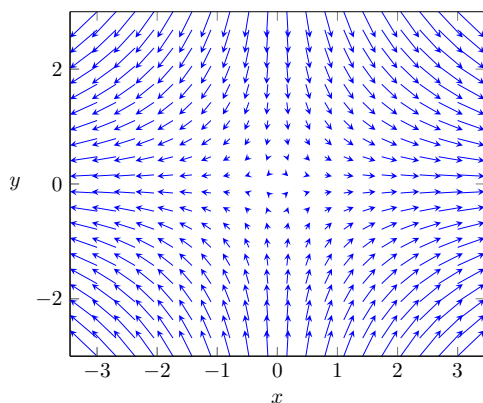
□

Exemple. Soit $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $V(x, y, z) = (y^2, x^2, z)$. Calculer la circulation de V le long du segment reliant $(0, 0, 0)$ à $(1, 2, 3)$.

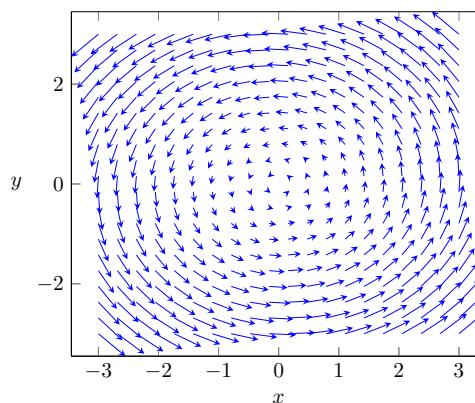
5.5.2 Champs de gradient

Définition 5.5.5. $V : E \rightarrow E$ est un champ de gradient s'il existe une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $V = \nabla f$.

Exemple. Voici deux exemples de champs de vecteurs :



$$V(x, y) = (x, -y) \text{ (champ de gradient)}$$



$$V(x, y) = (-y, x)$$

Théorème 5.5.6. On suppose que V est un champ de gradient continue. Alors pour tout courbe paramétrée $\Gamma = (I, \phi)$ d'origine A et d'extrémité B incluse dans U , on a

$$\int_{\Gamma} \langle V, d\phi \rangle = f(B) - f(A).$$

Preuve.

□

Définition 5.5.7. Un ouvert U est dit étoilé si il existe $a \in U$ tel que pour tout $\omega \in U$ on a $[a, \omega] \in U$.

Théorème 5.5.8 (Poincaré, cas $n = 2$). Soit $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteur défini sur U et de classe \mathcal{C}^1 . Si U est un ouvert étoilé alors $V = (V_1, V_2)$ est un champ de gradient si et seulement si $\frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1}$.

Preuve. Admis.

□

5.5.3 Formule de Green-Riemann

On considère \mathbb{R}^2 muni de la base canonique (i, j) .

Théorème 5.5.9. Soit Δ une partie de \mathbb{R}^2 dont le bord est le support d'une courbe paramétrée $\partial\Delta$ fermée, orientée positivement et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Soit $V = (V_1, V_2)$ un champ de vecteur de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert contenant Δ . On a alors,

$$\int_{\partial\Delta} \langle V, d\phi \rangle = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx dy,$$

Preuve. Admis.

□

Remarque. Orientation positive de $\partial\Delta$: le point $\phi(t)$ qui parcourt le bord de Δ se déplace pour t croissant "en laissant le domaine Δ à gauche".

Notation : le théorème de Green-Riemann est le plus souvent énoncé en introduisant la notion de forme différentielle. La notation utilisée dans ce cas est $\int_{\Gamma} V_1 dx + V_2 dy = \int_a^b V_1(\phi(t))\phi_1'(t) + V_2(\phi(t))\phi_2'(t) dt = \int_{\Gamma} \langle V, d\phi \rangle$.

Proposition 5.5.10 (Calcul d'aire planes). Avec les notations différentielle on a

$$\text{Aire}(\Delta) = \int_{\partial\Delta} xdy = - \int_{\partial\Delta} ydx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Delta} xdy - ydx.$$

Preuve.

□

Exemple. Calcul de l'aire de la partie du plan Δ délimitée par l'axe Ox et l'arc paramétré $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$

