Correction Interro 2

Exercice 1

Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y) \longmapsto (\cos xy\,,\, y\,,\, x e^{y^2})$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u,v,w) \longmapsto uvw$.

1) $g \circ f = g(f(x,y)) = xy \cos(xy) \exp(y^2)$, et $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

2) • $\partial_x (g \circ f)(x,y) = y \cos(xy) \exp(y^2) - y^2 \sin(xy) \exp(y^2)$.

• $\partial_y (g \circ f)(x,y) = \cos(xy) \exp(y^2) - x y \sin(xy) \exp(y^2) + 2xy^2 \cos(xy) \exp(y^2)$.

3) • $\mathrm{Jac}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} -y \sin xy & -x \sin xy \\ 0 & 1 \\ \exp(y^2) & 2xy \exp(y^2) \end{pmatrix}$

• $\mathrm{Jac}_{(u,v,w)}\, g = \begin{pmatrix} vw & uw & uv \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Jac}_{f(x,y)}\, g = \begin{pmatrix} y e^{y^2} & \cos xy\, e^{y^2} & y \cos xy \end{pmatrix}$

4) On utilise la formule $\mathrm{Jac}_{(x,y)}(g \circ f) = \mathrm{Jac}_{f(x,y)}\, g \cdot \mathrm{Jac}_{(x,y)} f$. Ainsi :

$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(g \circ f) = \begin{pmatrix} y e^{y^2} & \cos xy\, e^{y^2} & y \cos xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \sin xy & -x \sin xy \\ 0 & 1 \\ \exp(y^2) & 2xy \exp(y^2) \end{pmatrix}$$

$$= \Big(y \cos(xy) \exp(y^2) - y^2 \sin(xy) \exp(y^2) \quad\quad \cos(xy) \exp(y^2) - x y \sin(xy) \exp(y^2) + 2xy^2 \cos(xy) \exp(y^2) \Big)$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_x (g \circ f) & \partial_y (g \circ f) \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

<u>Théorème</u> : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in U$. Si $f(x_0, y_0) = 0$ et $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$ alors $\exists I$ intervalle ouvert contenant x_0 et une unique fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tq :

1) $\varphi(x_0) = y_0$ 2) $f(x, \varphi(x)) = 0 \ \forall x \in I$ 3) $\varphi'(x) = -\dfrac{\partial_x f(x,y)}{\partial_y f(x,y)} \ \forall x \in I$

4) La droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = x_0$ est d'équation $y = \varphi'(x_0)(x - x_0) + y_0$

1) On considère l'équation (E) : $xe^y + ye^x = 0$. Pour montrer qu'elle définit une unique fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$, on montre alors, en posant $F(x,y) = xe^y + ye^x$, les 3 conditions suivantes :

(i) F continûment différentiable au voisinage de $(0,0)$: elle est somme de produits de fonctions continûment différentiable donc elle l'est aussi.

(ii) $F(0,0) = 0$

(iii) $\partial_y F(0,0) = (xe^y + e^x)(0,0) = 1 \neq 0$

On a les trois conditions pour invoquer le théorème des fonctions implicites : elle définit donc une unique fonction φ telle que $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.

2) Le DL de Taylor à l'ordre 2 de φ centré en $x = 0$ est :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)(x-0) + \varphi''(0)(x-0)^2 + o((x-0)^2)$$

* $\varphi(0) = 0$ car $\varphi(0)$ est le y tq $F(0,y) = 0$.

* $\varphi'(x) = (\partial_x F(x,y))(\partial_y F(x,y))^{-1} = \dfrac{ye^x + e^y}{xe^y + e^x}$ et donc $\varphi'(0) = y + e^y$

* $\varphi''(x) = \left(\dfrac{ye^x + e^y}{xe^y + e^x}\right)' = \dfrac{y(xe^y + e^x) - (ye^x + e^y)e^y}{(xe^y + e^x)^2}$ et donc

$$\varphi''(0) = \frac{y(0+1) - (y + e^y)e^y}{1^2} = y - ye^y - e^{2y}$$

Finalement le DL est : $\varphi(x) = \left(y + e^{y}\right)x + \left(y - ye^{y} - e^{2y}\right)x^2 + o(x^2)$.

Exercice 3

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. On définit la divergence :

$$\mathrm{div}(X) : x \in U \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} X_i(x)$$

1) Soit $V \in \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note $X : U \to \mathbb{R}^n$ telle que $X(x) = f(x)V$.

On a donc $X(x) = \left(f(x)V_1, f(x)V_2, \ldots, f(x)V_n\right)^T$. Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$:

$\partial_{x_i}(f(x)V_i) = V_i \partial_{x_i} f(x)$ et donc on a finalement

$$\mathrm{div}(X)(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} X_i(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i \partial_{x_i} f(x) = V \cdot \nabla f(x)$$

2) Soit $X : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteur de $\mathcal{C}^1$ sur U, et $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On calcule $gX = (gX_1, \ldots, gX_n)$ alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$,

$$\partial_{x_i}(gX_i) = X_i \partial_{x_i} g + g \partial_{x_i} X_i,$$

La divergence de gX est alors

$$\mathrm{div}(gX)(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \partial_{x_i} g + g \partial_{x_i} X_i\right)$$
$$= \nabla g(x) \cdot X(x) + g(x)\,\mathrm{div}(X)(x).$$

Exercice 4

Voir code.

1) $\circ\ \partial_x f(x,y) = \dfrac{x^2 - 2x(x+y) + y^2 + 1}{(x^2+y^2+1)^2}$ $\qquad \circ\ \partial_y f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2 - 2y(x+y) + 1}{(x^2+y^2+1)^2}$

2) On sait que $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 1$. Or l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ en $(0,0)$ s'écrit

$$z - f(0,0) = \partial_x f(0,0)(x - 0) + \partial_y f(0,0)(y - 0)$$

$$\Rightarrow \quad z = x + y + 1$$