Interrogation de cours – Calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$

Ce contrôle contient uniquement des exercices types proches du cours, qui ont été corrigés en séance de TD. Pour chaque résultat du cours invoqué, il est nécessaire de rappeler l'ensemble des hypothèses permettant de l'utiliser. Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Exercice 1. On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = \left(\cos(xy), y, x \exp\left(y^2\right)\right), \quad g(u, v, w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobienne $J_f(x, y)$ et $J_g(u, v, w)$ de f et de g.
4. Retrouver le résultat de la question 2 en utilisant un produit approprié de matrices jacobienne.

Exercice 2. On considère l'équation $x \exp(y) + y \exp(x) = 0$.

1. Vérifier qu'elle définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $0_{\mathbb{R}^2}$.
2. Calculer le développement de Taylor de φ à l'ordre centré en $x = 0$.

Exercice 3. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. La divergence d'un champ de vecteurs $X = (X_1, \dots, X_n) : U \to \mathbb{R}^n$ (de classe $\mathscr{C}^1$) est la fonction $\operatorname{div}(X) : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$\operatorname{div}(X)(x) = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}(x).$$

1. Soit $V \in \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On note $X : U \to \mathbb{R}^n$ le champ de vecteurs défini par $X(x) = f(x)V$. Calculer $\operatorname{div}(X)$ en fonction de V et ∇f.
2. Soit $X : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteur de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, et $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Calculer $\operatorname{div}(gX)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ (cf. figure).

1. Calculer les dérivées partielles premières de f.
2. Écrire l'équation du plan tangent à f en $(0, 0)$.

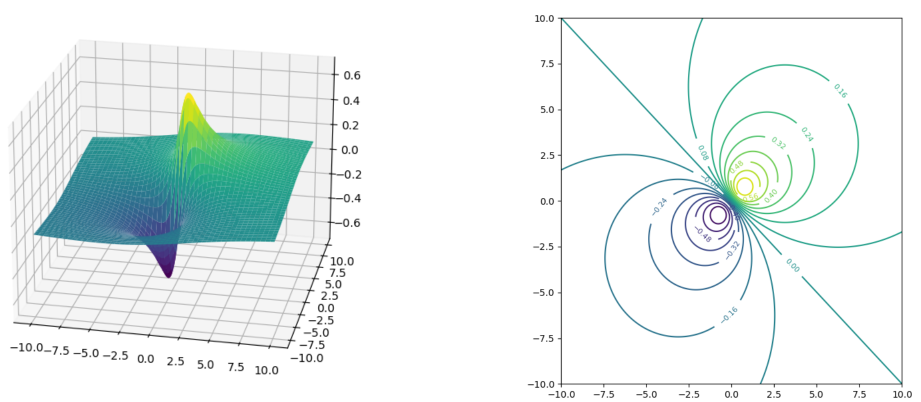

FIGURE 1 – Surface et lignes de niveaux de $f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$