Interrogation de cours – Topologie de $\mathbb{R}^n$

Nom & Prénom :

Cette évaluation est conçue pour tester votre compréhension des concepts fondamentaux qui ont été abordés durant le chapitre 3. Parmi les questionnaires à choix multiple suivants, veuillez entourer l'unique bonne réponse.

Notation : +1 pt. si bonne réponse, -0.5 pt. si mauvaise réponse, 0 pt. sinon.

Partie I – Topologie des espaces vectoriels normés

1. Quelle est la définition d'une norme sur un espace vectoriel V ?
   (a) Une fonction $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ telle que $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ pour tout $x, y \in V$.
   (b) Une fonction $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ qui vérifie l'homogénéité, la séparation et l'inégalité triangulaire.
   (c) Une application qui assigne un vecteur unitaire à chaque vecteur de V.
   (d) Une fonction $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}^+$ telle que $||\lambda x|| = \lambda ||x||$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in V$.
2. Que signifie dire que deux normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sur un espace vectoriel V sont équivalentes ?
   (a) Il existe des constantes positives a et b telles que $a||x||_1 \leq ||x||_2 \leq b||x||_1$ pour tout $x \in V$.
   (b) Les deux normes génèrent les mêmes boules fermées sur V.
   (c) Les boules unités définies par les deux normes sont identiques.
   (d) $||x||_1 = ||x||_2$ pour tout $x \in V$.
3. Quelle est la caractérisation séquentielle de la fermeture d'un ensemble A dans un espace vectoriel normé ?
   (a) A est fermé si pour toute suite (x_n) de points de A, (x_n) converge et sa limite appartient à A.
   (b) La fermeture de A est l'ensemble des limites de toutes les suites convergentes dans A.
   (c) A est fermé si pour toute suite (x_n) dans A, (x_n) est une suite bornée.
   (d) La fermeture de A contient tous les points qui sont à une distance finie de A.
4. Qu'est-ce qu'un ensemble compact dans un espace vectoriel normé ?
   (a) Un ensemble est compact s'il est fermé et borné.
   (b) Un ensemble A est compact si de toute suite dans A, on peut extraire une sous-suite convergente vers un point de A.
   (c) Un ensemble est compact si et seulement si il est infini et dénombrable.
   (d) Un ensemble est compact si il peut être recouvert par un nombre fini de boules unités.
5. Quel énoncé décrit correctement le théorème de Bolzano-Weierstrass ?
   (a) Toute suite bornée dans $\mathbb{R}^n$ admet au moins une sous-suite convergente.
   (b) Toute fonction continue sur un intervalle fermé atteint un maximum et un minimum.
   (c) Toute suite dans un espace vectoriel normé est convergente.
   (d) Toute suite croissante et bornée dans $\mathbb{R}$ est convergente.
6. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit ouvert dans un espace vectoriel normé ?
   (a) Chaque point de l'ensemble est une limite de points extérieurs à l'ensemble.
   (b) Pour chaque point de l'ensemble, il existe une boule ouverte centrée en ce point qui est entièrement contenue dans l'ensemble.
   (c) L'ensemble est le complémentaire d'un ensemble fermé.
   (d) L'ensemble contient toutes ses valeurs limites.
7. Qu'est-ce que l'adhérence d'un ensemble A dans un espace vectoriel normé ?
   (a) L'ensemble de tous les points extérieurs à A.
   (b) L'union de A et de l'ensemble de ses points limites.
   (c) L'ensemble des boules ouvertes centrées en tout point de A.
   (d) La plus petite boule fermée contenant A.

8. Quelle est la définition d'un voisinage d'un point x dans un espace vectoriel normé ?
   (a) Tout ensemble contenant une boule ouverte centrée en x.
   (b) Un ensemble fermé contenant x.
   (c) La boule unité centrée en x.
   (d) L'ensemble des points à distance finie de x.
9. Quelle propriété un espace vectoriel normé doit-il satisfaire pour être dit complet ?
   (a) Chaque suite convergente dans l'espace a une limite qui appartient à l'espace.
   (b) L'espace contient au moins une boule fermée de rayon fini.
   (c) Toute suite de Cauchy dans l'espace converge vers un point de cet espace.
   (d) Il existe une base de l'espace qui est orthonormée.
10. Comment définit-on une boule fermée dans un espace vectoriel normé ?
   (a) L'ensemble des points dont la distance à un point fixé est inférieure ou égale à un certain rayon.
   (b) Une boule dont la frontière est incluse dans l'ensemble.
   (c) L'ensemble des points dont la norme est exactement égale au rayon.
   (d) Une boule qui contient tous ses points limites.

Partie II – Limites et continuité de fonctions de plusieurs variables

1. La limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ est :
   (a) 0.
   (b) 1.
   (c) -1.
   (d) Inexistante.
2. Au point $(1,1)$, la fonction $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ est :
   (a) Continue.
   (b) Discontinue.
   (c) Non définie en ce point.
   (d) La réponse dépend de la direction d'approche.
3. Soit la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Quelle est la valeur de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?
   (a) 0.
   (b) 1.
   (c) -1.
   (d) ∞.
4. Pour la fonction $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, quelle affirmation est vraie ?
   (a) La fonction est discontinue en $(0,0)$.
   (b) La fonction est continue partout sur $\mathbb{R}^2$.
   (c) La fonction est discontinue uniquement lorsque $x = 0$ ou $y = 0$.
   (d) Aucune discontinuité.
5. Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ et $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$, alors la limite de $f(x,y)+g(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers (a,b) est :
   (a) $L + M$.
   (b) $L \times M$.
   (c) $L - M$.
   (d) Impossible à déterminer sans informations supplémentaires.

6. La limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ est :
   (a) 0.
   (b) 1.
   (c) ∞.
   (d) Inexistante.
7. La fonction $f(x,y) = x^2y$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$ parce que :
   (a) Les fonctions polynomiales en plusieurs variables sont toujours continues.
   (b) Elle est composée de fonctions discontinues.
   (c) Elle est lipschitzienne.
   (d) Elle est non linéaire.
8. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit continue en un point (a,b) ?
   (a) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.
   (b) f est différentiable en (a,b).
   (c) f est bornée en (a,b).
   (d) f a des dérivées partielles continues en (a,b).
9. La fonction $f(x,y) = |x| + |y|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car :
   (a) Les fonctions valeur absolue sont continues.
   (b) Elle est linéaire par morceaux.
   (c) Elle est dérivable partout sur $\mathbb{R}^2$.
   (d) Elle est bornée.
10. Si $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, alors f est :
   (a) Continue partout sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Discontinue en $(0,0)$.
   (c) Discontinue là où $x^2 + y^2 + 1 = 0$.
   (d) Non bornée.

Réponses

Partie I – Topologie des espaces vectoriels normés

1. (b) Une fonction $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ qui est positive, définitivement positive, et homogène.
2. (a) Il existe des constantes positives a et b telles que $a||x||_1 \leq ||x||_2 \leq b||x||_1$ pour tout $x \in V$.
3. (b) La fermeture de A est l'ensemble des limites de toutes les suites convergentes dans A.
4. (b) Un ensemble A est compact si de toute suite dans A, on peut extraire une sous-suite convergente vers un point de A.
5. (a) Toute suite bornée dans $\mathbb{R}^n$ admet au moins une sous-suite convergente.
6. (b) Pour chaque point de l'ensemble, il existe une boule ouverte centrée en ce point qui est entièrement contenue dans l'ensemble.
7. (b) L'union de A et de l'ensemble de ses points limites.
8. (a) Tout ensemble contenant une boule ouverte centrée en x.
9. (c) Toute suite de Cauchy dans l'espace converge vers un point de cet espace.
10. (a) L'ensemble des points dont la distance à un point fixé est inférieure ou égale à un certain rayon.

Partie II – Limites et continuité de fonctions de plusieurs variables

1. (a) 0, on peut noter que le numérateur et le dénominateur s'annulent en $(0,0)$, et en appliquant la règle de l'Hôpital ou des chemins d'approche spécifiques, on peut montrer que la limite tend vers 0.
2. (a) La fonction est continue au point $(1,1)$ car le dénominateur n'est pas nul en ce point et la fonction est bien définie.
3. (a) 0, cette limite représente la distance à l'origine dans le plan, qui tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$.
4. (a) La fonction est discontinue en $(0,0)$ car $\ln(0)$ est indéfini, donc la fonction n'est pas définie en ce point.
5. (a) $L + M$.
6. (b) 1, c'est un cas particulier d'un résultat bien connu de l'analyse, où la limite de $\frac{\sin u}{u}$ tend vers 1 lorsque u tend vers 0.
7. (a) Les fonctions polynomiales en plusieurs variables sont toujours continues.
8. (a) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.
9. (a) Les fonctions valeur absolue sont continues, la continuité de la valeur absolue est une propriété bien établie, qui assure la continuité de f partout sur $\mathbb{R}^2$.
10. (a) Continue partout sur $\mathbb{R}^2$, le dénominateur $x^2 + y^2 + 1$ est toujours positif pour tous les (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, ce qui garantit que f ne rencontre jamais de discontinuité ou de division par zéro.

Barême

- $[0,10)$: 0 pt. bonus.
- $[10,12)$: + 0.5 pt. bonus.
- $[12,14)$: + 1 pt. bonus.
- $[14,16)$: + 1.5 pts. bonus.
- $[16,18)$: + 2 pts. bonus.
- $[18,20]$: + 2.5 pts. bonus.