HA8401H – Maths PeiP S4

Préparation au CC1

Sacha Cardonna

19 mars 2024

Questions de cours (6 points). Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Donner la définition rigoureuse d'une distance d sur cet espace.
2. On munit maintenant E d'une norme $\|\cdot\|$. Démontrer que pour tous $x, y \in E$, on a l'inégalité :
$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|.$$
En déduire que
$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max (\|x + y\|, \|x - y\|) .$$
On remarque que cette propriété reste vraie dans un espace vectoriel normé de dimension infinie.
3. Ecrire la boule unité ouverte $B_1(0_E)$ et montrer que c'est un ensemble convexe dans E.

Exercice 1 (6 points). On considère la courbe paramétrée $\phi : t \in \mathbb{R} \longmapsto (x(t), y(t))$ telle que
$$x(t) = \sin(2t), \qquad y(t) = \sin(3t).$$

1. Donner le domaine de définition de ϕ. En utilisant les propriétés de symétrie de la courbe, montrer qu'on peut se restreindre à étudier la fonction sur $[-\pi, \pi]$, puis sur $[0, \pi]$.
2. Exprimer $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$. Montrer alors que la courbe a une symétrie supplémentaire et qu'on peut encore se restreindre à $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Construire le tableau de variation de x et y sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On précisera les valeurs de x, x', y et y' pour $t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

Exercice 2 (5 points). Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on note ψ la courbe paramétrée $\psi : t \longmapsto (f(t), g(t))$ telle que
$$f(t) = \frac{t^2}{1 - t^2}, \qquad g(t) = \frac{t^3}{1 - t^2}.$$

1. Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $\frac{1}{1-u}$.
2. Déterminer les développements limités des fonctions f et g à l'ordre 3 en 0.
3. En déduire les valeurs de $f''(0)$ et de $g''(0)$.
4. Donner les coordonnées d'un vecteur tangent à ψ en $(0, 0) = (f(0), g(0))$.

Exercice 3 (3 points). Démontrer que la courbe paramétrée $\Gamma : t \longmapsto \left(2t - t^{-2}, 2t + t^2\right)$ possède un point double dont on déterminera les coordonnées.