Correction CC1 Blanc

Question de cours

1) Voir cours. 1pt

2) Soient $x, y \in E$. Alors on peut écrire

$$x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$$

de sorte que, par inégalité triangulaire :

$$\|x\| = \left\| \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y) \right\| \leq \frac{1}{2}\left(\|x+y\| + \|x-y\|\right)$$

On a la même chose pour y :

$$y = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(y-x) \Rightarrow \|y\| \leq \frac{1}{2} \|x+y\| + \|x-y\| \quad (\text{car } \|y-x\| = \|x-y\|).$$

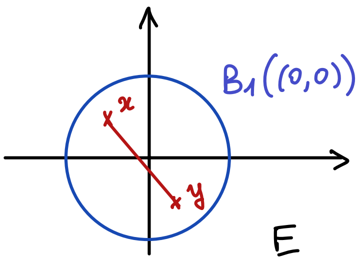
Ainsi :

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|. \qquad 2\text{pts}$$

De plus, comme $\|x+y\|, \|x-y\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$, on a

$$\|x\| + \|y\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|) + \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$$
$$= 2 \max(\|x+y\|, \|x-y\|). \qquad 1\text{pt}$$

3) Montrons que la boule unité d'un espace vectoriel normé E est un convexe de E.



La boule (ouverte) unité de $(E, \|\cdot\|)$ est

$$B_1(0_E) = \{ u \in E \mid \|u - 0\| = \|u\| < 1 \}$$

2pts

Soient $x, y \in B_1(0)$ et $\lambda \in [0,1]$. Déjà, $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$ par définition.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + (1-\lambda) y\| &\leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda) y\| && (\text{ineg. triangulaire}) \\
&\leq |\lambda| \|x\| + |1-\lambda| \|y\| && (\lambda \geq 0 \text{ et } 1-\lambda \geq 0) \\
&\leq \lambda + 1 - \lambda = 1 && (\|x\| \leq 1 \text{ et } \|y\| \leq 1)
\end{aligned}$$

donc on a bien $\lambda x + (1-\lambda) y \in B_1(0)$.

Exercice 1

On considère $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto \left(\sin(2t) =: x(t), \sin(3t) =: y(t)\right)$.

1) Trivialement $\mathcal{D}_\phi = \mathbb{R}$ (donné dans l'énoncé). De plus, sin est périodique de période 2π, donc la fonction x est de période $T_x = \frac{2\pi}{2} = \pi$, et y est périodique de période $T_y = \frac{2\pi}{3}$. Le rapport entre les deux périodes est

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{2\pi/3}{\pi} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$$

Comme $\frac{2}{3}$ est rationnel, il existe une période commune T entre x et y donnée par

$$T = 3T_y = 2T_x = 2\pi.$$

On peut donc se réduire à l'étude de la courbe sur un domaine de longueur 2π, comme $[-\pi, \pi]$ (sin a un axe de symétrie en $x = 0$).

Si on étudie maintenant la parité de la courbe, sin étant impaire, on a donc :

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad \begin{cases} x(-t) = \sin(-2t) = -\sin(2t) = -x(t) \\ y(-t) = \sin(-3t) = -\sin(3t) = -y(t). \end{cases}$$

Par conséquent, la courbe pour les $t < 0$ s'obtient par symétrie de la courbe pour les $t > 0$ et réciproquement. On peut donc se restreindre à $[0, \pi]$. 2pt

2) On a :

$$\begin{cases} x(\pi - t) = \sin(2(\pi - t)) = \sin(2\pi - 2t) = \sin(-2t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = \sin(3(\pi - t)) = \sin(3\pi - 3t) = \sin(-3t) = -y(t) \end{cases} \quad 1pt$$

On peut donc déduire la courbe pour $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ de la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffit donc d'étudier la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

3) Les dérivées de x et y sont $x'(t) = 2\cos(2t)$ et $y'(t) = 3\cos(3t)$.

On a le tableau de variation suivant : 3pt

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	2	$+$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	-2
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	3	$+$	0	$-$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-$	-3	$-$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$\frac{y'(t)}{x'(t)}$	$\frac{3}{2}$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$+$	3	$+$	0

Exercice 2

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on note $\varphi : t \longmapsto (f(t), g(t))$ tels que

$$f(t) = \frac{t^2}{1-t^2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t^3}{1-t^2}.$$

1) On sait que $(1-u)^{-1} = 1 + u + o(u)$. 1pt

2) Remplaçons u par t^2, on obtient : $\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + o(t^2)$.

En multipliant par t^2, on obtient :

$$f(t) = \frac{t^2}{1-t^2} = t^2 + t^4 + o(t^4) = t^2 + o(t^3).$$ 1 pt

En multipliant par t^3, on obtient :

$$g(t) = \frac{t^3}{1-t^2} = t^3 + t^5 + o(t^5) = t^3 + o(t^3).$$

3) Puisque $f \in \mathcal{C}^3$, son DL en 0 à l'ordre 3 est donné par

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}t^3 + o(t^3) \qquad 2\,\text{pt}$$

et par unicité du DL, par identification : $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2$.

De même pour g : $\quad g'(0) = g''(0) = 0$.

4) Puisque $(f'(0), g'(0)) = (0,0)$ et $(f''(0), g''(0)) = (2,0) \neq (0,0)$, un vecteur tangent à la courbe en $(0,0)$ est $(2,0)$. $\quad$ 1 pt

Exercice 3

Soit $\Gamma : t \mapsto (2t - t^{-2}, 2t + t^2)$ une courbe paramétrée. Notons :

$$x(t) := 2t - \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad y(t) := 2t + t^2.$$

Cherchons $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^*$ distincts tels que $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$. On a ainsi le système :

$$\begin{cases} 2(t_1 - t_2) = \dfrac{t_2^2 - t_1^2}{t_1^2 t_2^2} = \dfrac{(t_2+t_1)(t_2-t_1)}{t_1^2 t_2^2} \\ 2(t_1 - t_2) = t_2^2 - t_1^2 = (t_2+t_1)(t_2-t_1) \end{cases} \qquad 1\,\text{pt}$$

On simplifie par $t_1 - t_2$ (non-nul par hypothèse) et on pose $s = t_1 + t_2$ et $p = t_1 t_2$.

On a alors :

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{-(t_2+t_1)}{t_1^2 t_2^2} = \dfrac{-s}{p^2} \\ 2 = -(t_2+t_1) = -s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 = \dfrac{-s}{2} = 1 \\ s = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \text{ ou } p = -1. \\ s = -2 \end{cases} \qquad 1\,\text{pt}$$

Ainsi les nombres t_1 et t_2 sont solutions des équations du type $X^2 - sX + p = 0$:

* $X^2 - sX + p = X^2 + 2X + 1 = 0$ si $p = 1$. Mais cette équation admet une unique solution $X = -1$, et on ne peut pas avoir $t_1 = t_2 = -1$!

* $X^2 - sX + p = X^2 + 2X - 1 = 0$ si $p = -1$. Les racines de cette équation sont $X_1 = -1 + \sqrt{2}$ et $X_2 = -1 - \sqrt{2}$.

La courbe admet donc un point double dont les coordonnées sont :

$$x(-1+\sqrt{2}) = x(-1-\sqrt{2}) = -5 \quad \text{et} \quad y(-1+\sqrt{2}) = y(-1-\sqrt{2}) = 1. \qquad 1\,\text{pt}$$