CC2 blanc – Fonctions de plusieurs variables

Pour chaque résultat du cours invoqué, il est nécessaire de rappeler l'ensemble des hypothèses permettant de l'utiliser. Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Questions de cours (5 points). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Donner la définition de la dérivée directionnelle de f en (a, b) dans la direction de (u, v) (en précisant à quelle condition elle existe).
2. Donner la définition de "f est différentiable en (a, b)", et la définition de sa différentielle en (a, b).
3. On suppose que f est différentiable en (a, b). Montrer que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la fonction f admet une dérivée directionnelle $D_{(u,v)}f(a, b)$ et exprimer cette dérivée directionnelle en fonction de la différentielle de f en (a, b).

Exercice 1 (6 points). Soit $f = h \circ g$ où $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sont les deux fonctions définies par

$$g(x, y) = (xe^{-y}, ye^x, e^x) \quad \text{et} \quad h(u, v, w) = vw - uw.$$

1. Donner les matrices jacobienne de g en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et de h en $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.
2. Calculer la matrice jacobienne de f de deux façons différentes.
3. Montrer que f admet deux points critiques sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer leurs natures.

Exercice 2 (5 points). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$? Admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$? Des dérivées directionnelles ? Est-elle différentiable ? Est-elle $\mathscr{C}^1$?

Exercice 3 (4 points). Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq x^2\}$.

1. Représenter D, calculer son aire et les coordonnées de son centre de gravité.
2. Calculer la double intégrale
$$I = \iint_D xe^y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$