Correction CC2 blanc

Questions de cours. Se réferer au polycopié de P. Castillon pour plus de détails.

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Pour $(a,b) \in U$ et $v \in \mathbb{R}^2$ avec $(u,v) \neq 0$, on dit que f admet une dérivée en (a,b) suivant la direction v si l'application $t \mapsto f((a,b)+tv)$ est dérivable en $t=0$. Dans ce cas on note :
$$D_v f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f((a,b)+t(u,v)) - f(a,b)}{t}.$$
$D_v f$ s'appelle la dérivée directionnelle de f suivant (u,v).
2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}^2$. Étant donné $(a,b) \in U$, on dit que f est différentiable en (a,b) s'il existe une application linéaire $\Lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que
$$f((a,b)+h) = f(a,b) + \Lambda(h) + \|h\|\epsilon(h),$$
où $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.
Si $f : U \to \mathbb{R}^2$ est différentiable en $(a,b) \in U$, l'application linéaire $\Lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par la définition précédente est définie de manière unique. Elle est appelée la différentielle de f en (a,b) et est notée $df(a,b)$.
3. Puisque f est différentiable en (a,b), il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que
$$\lim_{\|(h,k)\|\to 0} \frac{\|f(a+h,b+k) - f(a,b) - L(h,k)\|}{\|(h,k)\|} = 0.$$
Cette application linéaire L est la différentielle de f en (a,b), notée $df(a,b)$.
4. La dérivée directionnelle de f en (a,b) dans la direction de (u,v) est définie par la limite
$$D_{(u,v)} f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu,b+tv) - f(a,b)}{t}$$
si cette limite existe. En utilisant la différentiabilité de f, on peut réécrire $f(a+tu,b+tv)$ en utilisant la linéarité de $df(a,b)$ comme
$$f(a+tu,b+tv) \approx f(a,b) + df(a,b)(tu,tv) \quad \text{pour } t \text{ petit.}$$
Donc,
$$D_{(u,v)} f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu,b+tv) - f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{df(a,b)(tu,tv)}{t}.$$
Puisque $df(a,b)$ est linéaire,
$$df(a,b)(tu,tv) = t \cdot df(a,b)(u,v),$$
et ainsi,
$$D_{(u,v)} f(a,b) = df(a,b)(u,v).$$
Cela montre que la dérivée directionnelle $D_{(u,v)} f(a,b)$ existe pour toute direction $(u,v) \neq (0,0)$ et qu'elle est donnée par l'application de la différentielle de f en (a,b) à la direction (u,v).

Exercice 1. 1. Pour $g(x,y) = (xe^{-y}, ye^x, e^x)$, la matrice jacobienne J_g en (x,y) est :
$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-y} & -xe^{-y} \\ ye^x & e^x \\ e^x & 0 \end{pmatrix}.$$
Pour $h(u,v,w) = vw - uw$, la matrice jacobienne J_h en (u,v,w) est :
$$J_h(u,v,w) = \begin{pmatrix} -w & w & v-u \end{pmatrix}.$$

2. En utilisant la règle de la chaîne, le produit des matrices donne :

$$J_f(x,y) = J_h(g(x,y)) \cdot J_g(x,y) = \begin{bmatrix} -e^x & e^x & ye^x - xe^{-y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-y} & -xe^{-y} \\ ye^x & e^x \\ e^x & 0 \end{bmatrix}.$$

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} -e^{x-y} + 2ye^{2x} - xe^{x-y} & xe^{x-y} + e^{2x} \end{bmatrix}.$$

Pour l'autre méthide, la fonction f résultant de la composition de h et g s'exprime par :

$$f(x,y) = h(g(x,y)) = h(xe^{-y}, ye^x, e^x) = (ye^x) \cdot (e^x) - (xe^{-y}) \cdot (e^x).$$

Simplifions cette expression :

$$f(x,y) = ye^{2x} - xe^{x-y}.$$

Pour calculer la jacobienne de f directement, nous calculons les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{2x} - xe^{x-y}) = 2ye^{2x} - e^{x-y} - xe^{x-y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{2x} - xe^{x-y}) = e^{2x} + xe^{x-y}.$$

Ainsi, la matrice jacobienne de f est :

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2ye^{2x} - e^{x-y} - xe^{x-y} & e^{2x} + xe^{x-y} \end{bmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

— La fonction f est définie comme un quotient de fonctions polynomiales en x et y hors de l'origine, et est donc continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$. À l'origine, nous vérifions la continuité en utilisant la limite lorsque $(x,y) \to (0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}.$$

En passant en coordonnées polaires, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, nous avons :

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2 \cos\theta \sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0.$$

Par conséquent, f est continue partout sur $\mathbb{R}^2$.

— Pour déterminer si f est de classe $\mathscr{C}^1$, nous devons examiner l'existence et la continuité des dérivées partielles. Remarquons d'abord que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, comme quotient de deux fonctions $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, la dérivée partielle par rapport à x est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

D'autre part, on a $f(x,0) - f(0,0) = 0$, ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. On a alors :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| \leq \frac{|x|^4|y| + |y|^5 + 4|x|^2|y|^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\leq \frac{6(x^2+y^2)^{5/2}}{(x^2+y^2)^2} \leq 6(x^2+y^2)^{1/2},$$

où on a utilisé que $|x| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$ et $|y| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$. Ceci prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2$. Par (anti)symétrie des rôles joués par x et y dans l'expression de $f(x,y)$, le même résultat est vrai pour $\frac{\partial f}{\partial y}$. On a donc prouvé que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

— Toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ étant différentiable, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Rappel. Si les dérivées partielles sont continues, la fonction n'est nécessairement pas différentiable. Une dérivée partielle n'existe pas, la fonction peut être différentiable. Si les dérivées partielles existent et si l'une d'entre elles n'est pas continue, il faut recourir à la définition de la différentiabilité.

Exercice 3. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2 \text{ et } 0 \le y \le x^2\}$.

1. (a) *Représentation de D :*
   Le domaine D est défini par les inégalités $0 \le x \le 2$ et $0 \le y \le x^2$. Il correspond à la région sous la parabole $y = x^2$ de $x = 0$ à $x = 2$.

   (b) *Calcul de l'aire de D :*
   L'aire de D est donnée par l'intégrale

$$\text{Aire}(D) = \int_0^2 \int_0^{x^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

   (c) *Coordonnées du centre de gravité de D :*
   Les coordonnées du centre de gravité $(\bar{x}, \bar{y})$ sont calculées comme suit :

$$\bar{x} = \frac{1}{\text{Aire}(D)} \iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{3}{2},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{Aire}(D)} \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{16} \cdot \frac{32}{5} = \frac{6}{5}.$$

2. *Calcul de la double intégrale* $I = \iint_D xe^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
   Utilisons le théorème de Fubini, qui nous permet de changer l'ordre d'intégration pour simplifier le calcul :

$$I = \int_0^2 \int_0^{x^2} xe^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 x(e^{x^2} - 1)\,\mathrm{d}x.$$

   En effectuant le changement de variable $u = x^2,\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, nous trouvons :

$$\int_0^2 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^4 e^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(e^4 - 1).$$

   On a finalement

$$I = \frac{1}{2}(e^4 - 1) - \int_0^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e^4 - 1) - 2.$$