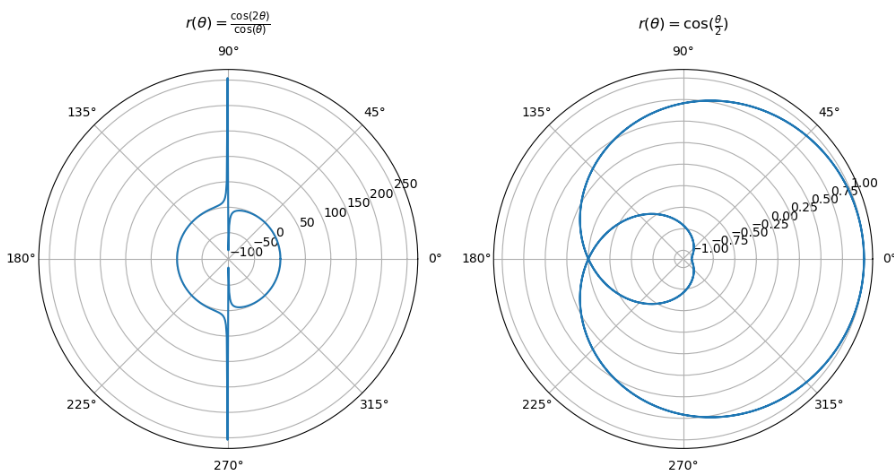
HA8401H – Maths PeiP S4

Exercice 6 : courbes polaires

Sacha Cardonna

15 mars 2024

Tracer les courbes du plan suivantes, décrites en coordonnées polaires par $r(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$ et $r(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.




```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Courbe 1 : Définir une gamme de valeurs pour theta allant de 0 à 2*pi (2 périodes)
theta_1 = np.linspace(0, 2 * np.pi, 400)
# Courbe 2 : Définir une gamme de valeurs pour theta allant de 0 à 8*pi (2 périodes)
theta_2 = np.linspace(0, 8 * np.pi, 800)

# Définir la première courbe polaire r(theta) = cos(2*theta) / cos(theta)
r1 = np.cos(2 * theta_1) / np.cos(theta_1)
# Définir la deuxième courbe polaire r(theta) = cos(theta/2)
r2 = np.cos(theta_2 / 2)

# Créer une figure avec 2 subplots (1 ligne, 2 colonnes)
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 6), subplot_kw=dict(polar=True))

# Dessiner la première courbe dans le premier subplot
axs[0].plot(theta_1, r1)
axs[0].set_title(r'$r(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$', va="bottom")

# Dessiner la deuxième courbe dans le deuxième subplot
axs[1].plot(theta_2, r2)
axs[1].set_title(r'$r(\theta) = \cos(\frac{\theta}{2})$', va="bottom")

plt.savefig("courbes_polaires.png")
```

Courbe 1.

La première courbe est définie par l'équation polaire

$$r(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Cette fonction présente des singularités lorsque $\cos(\theta) = 0$, c'est-à-dire quand

$$\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

pour $k \in \mathbb{Z}$. Ces valeurs de θ correspondent aux directions verticales dans le système de coordonnées polaires où la courbe n'est pas définie car le rayon r devrait être infini.

Entre ces singularités, la courbe prend la forme de boucles en raison de la nature oscillante du numérateur $\cos(2\theta)$. La fonction $\cos(2\theta)$ a une période de π, ce qui signifie qu'elle complète un cycle complet de ses valeurs pour une augmentation de π dans θ. Ainsi, pour chaque intervalle de π en θ, une boucle se forme dans le tracé de la courbe.

Les points où les boucles se rencontrent correspondent aux zéros du numérateur, c'est-à-dire quand

$$2\theta = m\pi$$

où m est un entier. Ces zéros se produisent lorsque

$$\theta = \frac{m\pi}{2},$$

mais nous devons exclure les valeurs qui annulent également le dénominateur. Ces points de rencontre sont les points où le rayon r passe par zéro, entraînant la courbe qui revient à l'origine.

La forme globale de la courbe est donc composée de séries de boucles qui se rencontrent à l'origine, séparées par des directions verticales où la courbe est indéfinie. Ces boucles seront symétriques par rapport à l'axe horizontal, car pour chaque point (θ, r) sur la courbe, il y aura un point correspondant $(\theta + \pi, -r)$, grâce à la symétrie des fonctions cosinus dans leur période.

Courbe 2.

Pour la seconde courbe décrite par l'équation $r(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, nous avons une fonction qui varie sans discontinuité ni singularité pour des valeurs réelles de θ.

La fonction $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ oscille entre -1 et 1, et puisque ces valeurs sont les amplitudes maximales pour le cosinus, la courbe reste confinée dans une bande circulaire centrée sur l'origine avec un rayon variant de 0 à 1. Le facteur $\frac{1}{2}$ dans l'argument du cosinus réduit la fréquence de l'oscillation de la fonction par rapport à θ, ce qui étend la période à 4π radians. Cela signifie que pour que l'angle $\frac{\theta}{2}$ parcourt un cycle complet de 0 à 2π (la période standard du cosinus), l'angle θ doit parcourir de 0 à 4π.

En coordonnées polaires, la courbe commencera à $r = 1$ lorsque $\theta = 0$, se contractera jusqu'à $r = 0$ à $\theta = \pi$, s'étendra jusqu'à $r = -1$ à $\theta = 2\pi$, et puis reviendra à $r = 0$ à $\theta = 3\pi$, et finalement reviendra à $r = 1$ lorsque $\theta = 4\pi$. Cela crée un motif oscillant où la courbe s'enroule autour de l'origine, atteignant le plus loin de l'origine à $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$, et passant par l'origine à $\theta = \pi$ et $\theta = 3\pi$.