Partie I – Normes et Topologie

Exercice 1 – Normes Équivalentes

Définition : On dit que deux normes $N_1, N_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ sont équivalentes s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_2(x).$$

Ici pour 3 normes, il suffit juste de montrer l'inégalité suivante :

$$\underset{(1)}{\|x\|_\infty \leq \|x\|_2} \underset{(2)}{\leq} \|x\|_1 \underset{(3)}{\leq} n\|x\|_\infty .$$

(1) On sait que $\|x\|_\infty = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$.

Or $\|x\|_\infty = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right\} = \max\left\{\sqrt{x_1^2}, \sqrt{x_2^2}, \ldots, \sqrt{x_n^2}\right\}$

$= \sqrt{x_{j_0}^2}$ où $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{j_0}|$.

$\leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \|x\|_2.$

(2) On rappelle que $\|x\|_2^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$

Alors $\|x\|_2^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\sum\limits_{i=2}^{n} \sum\limits_{0<j<i} |x_i||x_j| = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |x_i x_j|.$

En effet, on peut mettre au carré des deux côtés de l'inégalité car $x \mapsto x^2$ est croissante,

et $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |x_i x_j| = |x_1|^2 + |x_1 x_2| + \ldots + |x_2^2| + |x_2 x_1| + \ldots + |x_n x_1| + |x_n^2|$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\sum\limits_{i=2}^{n}\sum\limits_{0<j<i} |x_i||x_j| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2$ (penser à $(a+b)^2$ …)

Ainsi : $\|x\|_2^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |x_i x_j| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \|x\|_1^2.$

Remarque : Pour mieux comprendre la somme :

$$\begin{array}{c|ccccc}
+ & x_1 & + & x_2 & + \cdots + & x_n \\ \hline
x_1 & x_1^2 & + & x_1 x_2 & + \cdots + & x_1 x_n \\
+ & + & & & & + \\
x_2 & x_2 x_1 & & & & x_2 x_n \\
+ & \vdots & & \ddots & & + \\
\vdots & & & & & \vdots \\
+ & & & & & \\
x_n & x_n x_1 & + & x_n x_2 & + \cdots + & x_n^2
\end{array}$$

(3) La plus simple ! On écrit :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_{j_0}| \quad \text{où } |x_{j_0}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$$

$$= n\,|x_{j_0}| = n \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| = n\,\|x\|_\infty .$$

Exercice 2 – Norme exotique

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_{a,b}(x,y) := \max\{|bx+y|, |(a+b)x+y|\}$.

1) Montrons que $N_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(i) Séparation : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a évidemment

$$N_{a,b}(x,y) = \max\{|bx+y|, |(a+b)x+y|\} \geqslant 0.$$

De plus,

$$N_{a,b}(x,y) = 0 \iff \begin{cases} |bx+y| = 0 \\ |(a+b)x+y| = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} bx+y = 0 \\ (a+b)x+y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -bx \\ ax+bx-bx = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -bx \\ ax = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ car } a \neq 0.$$

(ii) Homogénéité : Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$N_{a,b}(\lambda x, \lambda y) = \max\{|\lambda bx + \lambda y|, |\lambda(a+b)x + \lambda y|\}$$

$$= \max\{|\lambda|\,|bx+y|, |\lambda|\,|(a+b)x+y|\}$$

$$= |\lambda| \max\{|bx+y|, |(a+b)x+y|\}$$

$$= |\lambda|\, N_{a,b}(x,y).$$

(iii) Inégalité triangulaire : soient $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x',y') \in \mathbb{R}^2$.

$$N_{a,b}(x+x', y+y') = \max\{|b(x+x') + (y+y')|, |(a+b)(x+x') + (y+y')|\}$$

$$\leqslant \max\{|bx+y| + |bx'+y'|, |(a+b)x+y| + |(a+b)x'+y'|\}$$

$$\leqslant \max\{|bx+y|, |(a+b)x+y|\} + \max\{|bx'+y'|, |(a+b)x'+y'|\}$$

$$\leqslant N_{a,b}(x,y) + N_{a,b}(x',y').$$

2) <u>Définition</u> : Soit $(\mathbb{R}^2, N_{a,b})$ un espace vectoriel normé. L'ensemble

$$\overline{B}(0,1) := \overline{B}_1(0) = \left\{ u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid N_{a,b}(x,y) \leqslant 1 \right\}$$

est la boule unité fermée pour la norme $N_{a,b}$.

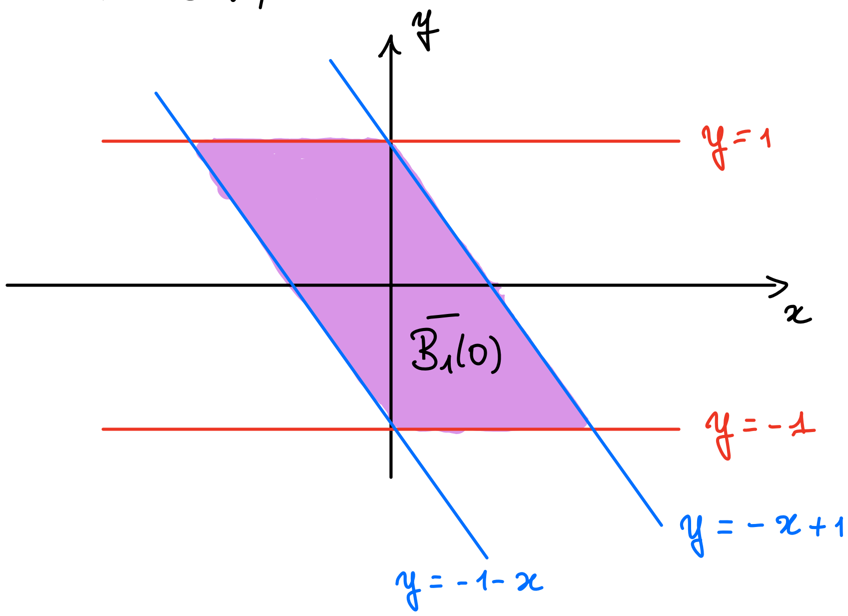
L'astuce est de simplement poser $a = 1$ et $b = 0$, et comme on a montré que $N_{a,b}$ était une norme $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad N_{1,0}(x,y) = \max\left\{ |y|, |x+y| \right\} \text{ est une norme!}$$

<u>Remarque</u> : par curiosité on peut remarquer que

$$N_{1,0}(x,y) = \left\| A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Traçons la boule unité de $N_{1,0}$:



En effet,

$$\begin{aligned}
\overline{B}_1(0) &= \left\{ u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid N_{a,b}(x,y) \leqslant 1 \right\} \\
&= \left\{ u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \max\{|y|, |x+y|\} \leqslant 1 \right\} \\
&= \left\{ u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 1 \text{ et } |x+y| \leqslant 1 \right\} \\
&= \left\{ u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ -1 \leqslant x+y \leqslant 1 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{cases} y \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant y \\ y \geqslant -1-x \text{ et } y \leqslant 1-x \end{cases} \right\}
\end{aligned}$$

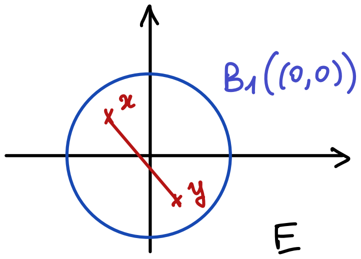
Exercice 3 – Convexité et inégalité triangulaire

Définition : Une partie $A \subset E$ est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in A, \quad \{\lambda x + (1-\lambda) y \mid \lambda \in [0,1]\} \subset A$$

$$\iff \forall (x,y) \in A, \forall \lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda) y \in A$$

Montrons que la boule unité d'un espace vectoriel normé E est un convexe de E.



La boule (ouverte) unité de $(E, \|\cdot\|)$ est

$$B_1(0_E) = \{u \in E \mid \|u - 0\| = \|u\| < 1\}$$

Soient $x, y \in B_1(0)$ et $\lambda \in [0,1]$. Déjà, $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$ par définition.
Ainsi :

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda) y\| \qquad \text{(ineg. triangulaire)}$$

$$\leq |\lambda| \|x\| + |1-\lambda| \|y\| \qquad (\lambda \geq 0 \text{ et } 1-\lambda \geq 0)$$

$$\leq \lambda + 1 - \lambda = 1 \qquad (\|x\| \leq 1 \text{ et } \|y\| \leq 1)$$

donc on a bien $\lambda x + (1-\lambda) y \in B_1(0)$.

Exercice 4 – Hölder et Minkowski

Soient $p, q \in [1, +\infty)$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$, montrons que $xy \leq x^p p^{-1} + y^q q^{-1}$

Solution 1 : On suit l'indication et on pose, pour $y \in \mathbb{R}_+$ fixé :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^p p^{-1} + y^q q^{-1} - xy \end{array}$$

On veut en fait montrer que f est minimale lorsque $f(x) = 0$,

i.e. lorsque $xy = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

Calculons $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = x^{p-1} - y$. On cherche donc $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x^{p-1} = y$.

Remarquons alors que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Leftrightarrow 1+\frac{p}{q}=p \Leftrightarrow pq=p+q \Leftrightarrow pq-q=p$

$$\Leftrightarrow \frac{q}{p}+1=q \Leftrightarrow (p-1)q=p.$$

Il suffit alors d'écrire $x^{p-1}=y \Rightarrow x^{q(p-1)}=y^q \Rightarrow x^p=y^q$

donc f admet un point critique lorsque $x=\sqrt[p]{y^q}=y^{q/p}$.

Pour montrer que c'est bien un minimum, vérifions que f'' est bien positive:

$f''(x)=(p-1)x^{p-2}$ or $p>1$ donc $p-1>0$ et $x\in\mathbb{R}_+$ donc $x^{p-2}\geqslant 0$.

La dérivée seconde est positive pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, donc $f(x)$ est convexe et $x=y^{q/p}$ est un minimum de f.

Calculons $f(y^{q/p})$:

$$f(y^{q/p})=\frac{(y^{q/p})^p}{p}+\frac{y^q}{q}-y\cdot y^{q/p}=\frac{y^q}{p}+\frac{y^q}{q}-y^{q/p+1} \quad \text{or } 1+\frac{q}{p}=q,$$

$$=y^q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)-y^q=y^q-y^q=0$$

Donc pour $x=y^{q/p}$, f admet son minimum de zéro, ce qui implique que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \forall x,y\in\mathbb{R}_+,\ xy\leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.$$

Solution 2 : Beaucoup plus efficace, élégant et moins BOURRIN.

On utilise le log, qui est une fonction concave:

$$\ln\left(\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\right)\geqslant\frac{\ln(x^p)}{p}+\frac{\ln(y^q)}{q}=\ln(xy),$$

et en passant à l'exponentielle, qui est croissante, on a bien

$$\forall x,y\in\mathbb{R}_+,\quad \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\geqslant xy.$$

Concavité
$\forall x,y,\ \forall\lambda\in[0,1]$
$\ln(\lambda x+(1-\lambda)y)$
$\leqslant \lambda\ln(x)+$
$(1-\lambda)\ln(y)$

2) Soient $(a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, montrons que

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right|\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^q\right)^{1/q} \quad \text{(Hölder)}$$

On sait par la Q1 que $xy\leqslant p^{-1}x^p+q^{-1}y^q$, donc

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\ a_j b_j\leqslant p^{-1}a_j^p+q^{-1}b_j^q.$$

En sommant sur k, on a donc

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \leq \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q} \right) \qquad (*)$$

Considérons alors, en notant $A := \left(\sum_{j=1}^{m} |a_j|^p \right)^{1/p}$ et $B := \left(\sum_{j=1}^{m} |b_j|^q \right)^{1/q}$, la somme

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{a_k}{\left(\sum_{j=1}^{m} |a_j|^p \right)^{1/p}} \cdot \frac{b_k}{\left(\sum_{j=1}^{m} |b_j|^q \right)^{1/q}} \right) \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{a_k}{A} \cdot \frac{b_k}{B} \right) \right|$$

Par l'inégalité $(*)$, on peut écrire :

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{A} \cdot \frac{b_k}{B} \right| \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{|a_k|}{A} \cdot \frac{|b_k|}{B} \leq \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{p} \left(\frac{|a_k|}{A} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|b_k|}{B} \right)^q \right)$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{m} \frac{|a_k|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{m} \frac{|b_k|^q}{B^q}$$

Or $A^p = \sum_{j=1}^{m} |a_j|^p$ et $B^q = \sum_{j=1}^{m} |b_j|^q$, on a donc :

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{m} \frac{|a_k|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{m} \frac{|b_k|^q}{B^q} = \frac{1}{p} \frac{A^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{B^q}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (j, k \text{ indices muets}).$$

En multipliant par AB des deux côtés, on obtient l'inégalité de Hölder :

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{A} \frac{b_k}{B} \right| \leq 1 \iff \left| \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \right| \leq AB$$

$$\iff \left| \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

3) Soient $(a_1, -, a_m), (b_1, -, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Montrons que

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p \right)^{1/p} \qquad \text{(Minkowski)}$$

Écrivons

$$\sum_{k=1}^{m} |a_k + b_k|^p = \sum_{k=1}^{m} |a_k + b_k| |a_k + b_k|^{p-1} = \sum_{k=1}^{m} \left(|a_k| |a_k + b_k|^{p-1} + |b_k| |a_k + b_k|^{p-1} \right)$$

Soit alors $q \in [1, +\infty)$ tel que $p^{-1} + q^{-1} = 1 \iff q(p-1) = p$.

On en appliquant Hölder à chaque membre :

$$\sum_{k=1}^{m} |a_k+b_k|^p = \sum_{k=1}^{m} |a_k||a_k+b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{m} |b_k||a_k+b_k|^{p-1}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{m} |a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{m} |a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left[\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^p\right)^{1/p}\right]$$

$$\underset{\substack{(p-1)q=p \\ 1/q = 1-1/p}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k+b_k|^{p}\right)^{1-1/p}\left[\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^p\right)^{1/p}\right]$$

Ainsi :
$$\left(\sum_{k=1}^{m} |a_k+b_k|^p\right)\left(\sum_{k=1}^{m} |a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^p\right)^{1/p}$$

$$\iff \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^p\right)^{1/p}$$

4) Soit $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, on définit $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right)^{1/p}$. Montrons que c'est une norme sur $\mathbb{R}^m$.

(i) Séparation : déjà évidemment on a $\|x\|_p \geq 0$, car somme de valeurs absolues.
Supposons que $\|x\|_p = 0$. Alors $\left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right)^{1/p} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} |x_k|^p = 0$, mais tous les termes sont positifs, donc il est évident que $x = 0_{\mathbb{R}^m}$.

(ii) Homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\|\lambda x\|_p^p = \sum_{k=1}^{m} |\lambda x_k|^p = |\lambda|^p \sum_{k=1}^{m} |x_k|^p = |\lambda|^p \|x\|_p^p \iff \|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p.$$

(iii) Inégalité triangulaire : soit $x, y \in \mathbb{R}^n$, il faut montrer que $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.
Cela revient à montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} y_k^p\right)^{1/p}$$

donc le lecteur pourra se référer à la question 3) ☺.

Finalement, on peut montrer que $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ en majorant le quotient :

$$\frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} \|x\|_\infty^p\right)^{1/p}}{\|x\|_\infty} = \frac{m^{1/p}\|x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = m^{1/p} \xrightarrow[p\to\infty]{} 1.$$

Exercice 5 – Intersection, Union

<u>Définition</u> : Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On dit que :

1) Une partie $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert pour la norme $\|\cdot\|$ si
$\forall a \in U, \ \exists r > 0, \ B_r(a) \subset U$.

2) Une partie $F \subset \mathbb{R}^n$ est un fermé pour la norme $\|\cdot\|$ si
son complémentaire $F^c := \mathbb{R}^n \setminus F = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \notin F\}$ est un ouvert.

* Montrons qu'une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soient $U_1, U_2, \dots, U_m$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$, et prenons $x \in \bigcap_{i=1}^{m} U_i$. Par définition, $x \in U_i$, $\forall i \in [\![1, m]\!]$, donc $\exists r_i > 0$ tel que $B_{r_i}(x) \subset U_i$, $\forall i \in [\![1, m]\!]$.
Prenons alors $R := \min_{i \in [\![1,m]\!]} r_i$, alors $B_R(x) \subset U_i \ \forall i \in [\![1, m]\!]$, ainsi

$$B_R(x) \subset \bigcap_{i=1}^{m} U_i, \quad \text{donc } \bigcap_{i=1}^{m} U_i \text{ est un ouvert.}$$

* Montrons qu'une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert.

Prenons une collection $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de $\mathbb{R}^n$, et considérons l'intersection infinie $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k$ (ou $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$). On peut facilement trouver un contre-exemple pour montrer que l'intersection n'est pas nécessairement ouverte : prenons $U_k = \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)^n \ \forall k \in \mathbb{N}$.
Il s'agit de boules ouvertes centrées en 0 en n-dimension, ce sont donc par définition des ouverts de $\mathbb{R}^n$. On remarque alors que :

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{-1}{k}, \frac{1}{k}\right)^n = \{0\}$$

car l'origine est le seul point commun à ces boules, et le singleton $\{0\}$ n'est pas un ouvert car il n'existe aucune boule ouverte centrée à l'origine entièrement contenue dans $\{0\}$ autre que la boule vide.

* Montrons qu'une union infinie d'ouverts est un ouvert (et donc une union finie aussi).

Soit $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une collection d'ouverts de $\mathbb{R}^n$, et soit $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$. Par définition, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in U_{k_0}$ (traduction : x appartient au moins à un ouvert U_{k_0}).

Il existe donc $r_0 > 0$ tel que $B_{r_0}(x) \subset U_{k_0} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$, donc $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$ est ouvert.

* Montrons qu'une intersection infinie (ou finie) de fermés est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Soit $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une collection de fermés de $\mathbb{R}^n$. Ecrivons le complémentaire de l'intersection :
$\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k\right)^c = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k^c$ où $(F_k^c)_{k\in\mathbb{N}}$ est la collection des complémentaires de $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$, qui sont des ouverts (car complémentaires de fermés). On a montré qu'une union infinie d'ouverts est un ouvert, donc $\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k\right)^c$ est ouvert, et son complémentaire $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$ est donc un fermé par définition.

* Montrons qu'une union finie de fermés est un fermé.

<u>Proposition</u> (caractérisation séquentielle) Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ partie non-vide. Il y a équivalence :
$$[F \text{ est un fermé}] \iff [\forall (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ suite de } F \text{ convergente}, \lim_{k\infty} u_k \in F]$$

Soient $F_1, F_2, \dots, F_m$ des fermés de $\mathbb{R}^n$. On pose l'union finie $F := \bigcup_{k=1}^{m} F_k$.
Soit alors $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ suite de F convergente vers x.
Par définition, chaque point de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à au moins un des fermés $\{F_k\}_{k\in[\![1,m]\!]}$.
Comme l'union est finie, il existe au moins un fermé F_{k_0} tel qu'une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers x appartienne entièrement à F_{k_0}. Comme F_{k_0} est fermé, la limite $x = \lim_{k\infty} x_{\varphi(k)} \in F_{k_0}$. Ainsi $x \in F_{k_0} \subset F$, donc $\bigcup_{k=1}^{m} F_k$ est un fermé.

* Montrons qu'une union infinie de fermés n'est pas toujours fermée.

Considérons la collection de fermés de $\mathbb{R}^n$ $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que
$F_k = \left[\frac{1}{k}, 1\right]^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (produit d'ensemble fermés (intervalles fermés) donc fermé).
Considérons alors $F := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{k}, 1\right]^n$. On remarque alors facilement que $F = (0,1]$, car pour tout $x \in (0,1]$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $x \geq \frac{1}{m}$, ce qui implique que x appartient à au moins un des $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Cependant $0 \notin F_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$

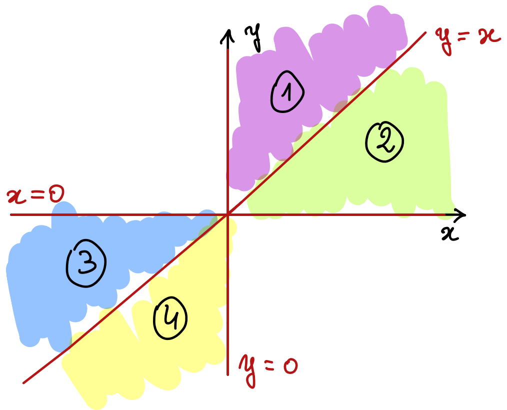
car même si la suite $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, $\nexists k \in \mathbb{N}$, $k^{-1} = 0$. Ainsi 0 est une limite de points de F qui n'appartient pas à F. Donc $F = (0,1]^n$ n'est pas fermé et donc une union infinie de fermés n'est pas toujours fermée.

Exercice 6 – Ouvert ou fermé ?

1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x-y)^{-1}\ln(xy)$

Il faut que $xy > 0$ (log) donc $x,y<0$ ou $x,y>0$, et également que $x \neq y$.

Ainsi $\mathcal{D}_f := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \neq y \text{ et } x,y>0) \text{ ou } (x\neq y \text{ et } x,y<0) \right\}$.



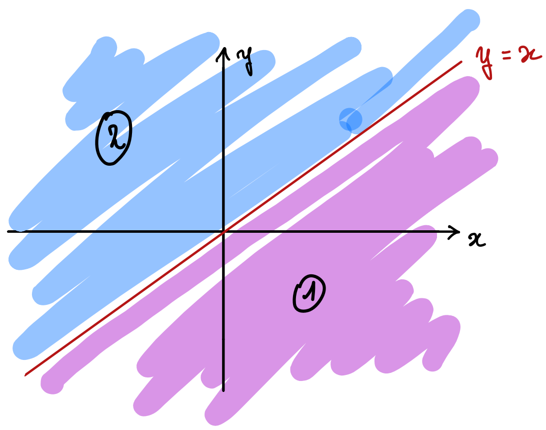
Le domaine est un ouvert car union des ouverts ①, ②, ③ et ④ sans les frontières incluses (lignes rouges).

2) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{1/2}$

Il faut que $x \neq y$ et que $\frac{x+y}{x-y} \geqslant 0$ (racine) donc $x-y>0$ et $x+y \geqslant 0$ ou $x-y<0$ et $x+y \leq 0$.

$$\text{Ainsi } \mathcal{D}_g := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{cases} x-y>0 \\ x+y \geq 0 \\ x \neq y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-y<0 \\ x+y \leq 0 \\ x\neq y \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>y \text{ ou } x<y \right\}$$



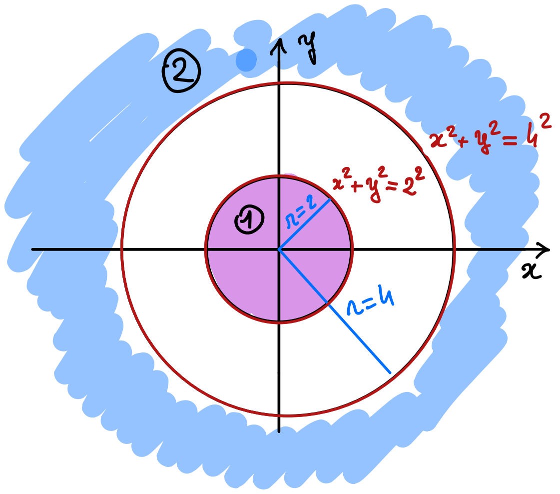
Ce domaine est également un ouvert comme union de l'ouvert ① et ② qui ne contiennent pas la frontière $y = x$.

3) Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \ln\left(\frac{x^2+y^2-16}{4-x^2-y^2}\right) = \ln(x^2+y^2-16) - \ln(4-x^2-y^2)$$

Il faut ici que $x^2+y^2-16>0$ et $4-x^2-y^2>0$. Ainsi :

$$\mathcal{D}_h = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>4^2 \text{ et } x^2+y^2<2^2\right\}$$



Idem que précédemment, les inégalités sont strictes, et ne contiennent pas les frontières (les deux disques), donc $\mathcal{D}_h$ est un ouvert comme union d'ouverts ① et ②.

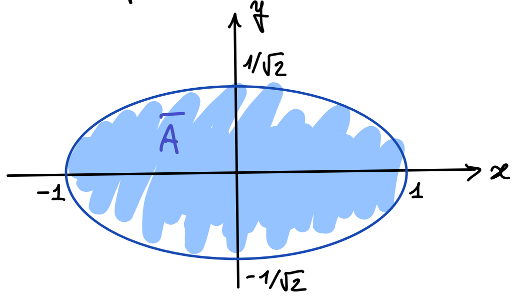
⚠ Oui, je sais, mes schémas sont éclatés.

Exercice 7 - Adhérence

Définition : Soit $A\subset\mathbb{R}^n$ et $a\in\mathbb{R}^n$. On dit que a est un point adhérent à A si tout ouvert $U\subset\mathbb{R}^n$ qui contient A satisfait $U\cap A\neq\emptyset$.
L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A, notée $\bar{A}$.

1) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+2y^2<1\}$: cet ensemble est l'intérieur d'une ellipse centrée en l'origine, son adhérence est l'ellipse et son bord, i.e.

$$\bar{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+2y^2\leq 1\}$$



2) $B=\{(t,\cos(\frac{1}{t}))\in\mathbb{R}^2 \mid t>0\}$: l'image fournie représente la fonction $t\mapsto\cos(\frac{1}{t})$ pour $t>0$. Lorsque $t\to 0$, la fonction oscille de plus en plus (demander pourquoi?).
B est donc la courbe s'enroulant infiniment autour de l'origine lorsque $t\to 0$.
Son adhérence $\bar{B}$ est l'ensemble B auquel on ajoute les points qui sont limites des suites de B. En effet, comme $\cos(1/t)$ oscille entre -1 et 1 infiniment, l'adhérence inclue donc le segment entre les droites $y=-1$ et $y=1$ à $t=0$, car chaque point est une limite pour $\cos(1/t)$ quand $t\to 0$.

⚠ Flemme de faire le dessin.

Exercice 8 - Sous-suite convergente

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{N}}$ et $a,b,c \in \mathbb{R}$, tels que
$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a^k, \sum_{k=1}^{n} b^{2k}, \sum_{k=1}^{n} c^{3k}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ici chaque composante de u_n est une série géométrique (du type $\sum_k q^k$). On doit poser des conditions sur a,b,c pour assurer la convergence de chacune d'entre elles.

(i) $\sum_{k=1}^{n} a^k$ converge si $|a|<1$; (ii) $\sum_{k=1}^{n} b^{2k}$ converge si $|b^2| = b^2 < 1 \Leftrightarrow |b|<1$;

(iii) $\sum_{k=1}^{n} c^{3k}$ converge si $|c^3|<1 \Leftrightarrow |c|<1$

Si les trois séries convergent, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^3$. Une sous suite convergente de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ de même expression que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a,b,c \in (-1,1)$.

(ii)

2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{N}}$ et $a,b,c \in \mathbb{R}$, tels que
$$v_n = \left(a^n, n^b, \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^c}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme ci-dessus, on étudie composante par composante :

(i) a^n converge (vers 0) si $|a|<1$; (ii) n^b converge si $b \leqslant 0$ (si $b=0$, $n^b = 1$)

(iii) On sait que $\left|\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, mais ne converge pas ($\frac{\pi}{2}$-périodicité).

$\left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^c}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc que si $c>0$.

Une sous-suite convergente de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite $(v_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ de même expression avec $a\in(-1,1)$, $b\in\mathbb{R}_-$, $c\in\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9 - Limite en l'origine

1) Soit $f : (x,y)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2}$. Cette fonction est définie partout sauf en $x^2=-y^2$ donc en $(0,0)$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour la limite, approchons l'origine de deux manières différentes :

(i) Fixons $x=0$, $\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-3y^2}{y^2} = -3$

(ii) Fixons $y=0$, $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1$

Ainsi $\lim_{y\to 0} f(0,y) \neq \lim_{x\to 0} f(x,0)$, donc la limite en $(0,0)$ n'existe pas.

2) Soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \dfrac{|x+y+z|}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$. Cette fonction est définie partout sauf en $(0,0,0)$. Donc $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Pour la limite :

(i) Posons $x = y = z \neq 0$, alors

$$\lim_{(x,x,x)\to(0,0,0)} f(x,x,x) = \lim_{(x,x,x)\to(0,0,0)} \frac{3|x|}{\sqrt{3x^2}} = \lim_{(x,x,x)\to(0,0,0)} \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

(ii) Posons $x = y \neq 0$, $z = 0$, alors

$$\lim_{(x,x,0)\to(0,0,0)} f(x,x,0) = \lim_{(x,x,0)\to(0,0,0)} \frac{2|x|}{\sqrt{2x^2}} = \sqrt{2}$$

La limite en 0 n'existe pas non plus.

3) Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \dfrac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. Pour les mêmes raisons que d'habitude, on a $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Passons en coordonnées polaire : $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $r = \sqrt{x^2+y^2}$. On a alors :

$$f(r,\theta) = \frac{(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)^2}{(r^2)^{3/2}} = \frac{r^4(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2}{r^3} = r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

Donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

4) Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \dfrac{\cos(xy)-1}{x^2+y^2}$. Idem, on a $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour la limite, passons encore en coordonnées polaire $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Ainsi comme $r^2 = x^2+y^2$, on a $f(x,y) = \dfrac{\cos(r^2\cos\theta\sin\theta) - 1}{r^2}$.

On sait que le développement limité en 0 du cosinus est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Ainsi $\cos(r^2\cos\theta\sin\theta) - 1 \underset{r\to 0}{\sim} \dfrac{-(r^2\cos\theta\sin\theta)^2}{2r^2} = -\dfrac{1}{2} r^2\cos^2\theta\sin^2\theta \xrightarrow[r\to 0]{} 0$.

Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} -\frac{1}{2} r^2 \cos^2\theta \sin^2\theta = 0.$$

Exercice 10 – Etude d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x^2 y (x^4 - 2x^2 y + 4y^2)^{-1}$.

1) Etudions la limite à l'origine de la restriction de f à la droite $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

On a donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$f(x, ax) = \frac{x^2 ax}{x^4 - 2x^2 ax + 4a^2x^2} = \frac{ax^3}{x^2(x^2 - 2ax + 4a^2)} = \frac{ax}{x^2 - 2ax + 4a^2}$$

et ainsi $\lim\limits_{x \to 0} f(x, ax) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{ax}{x^2 - 2ax + 4a^2} = 0$.

2) Faisons pareil pour la parabole $y = x^2$:

$$f(x, x^2) = \frac{x^2 x^2}{x^4 - 2x^2x^2 + 4x^4} = \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{3}.$$

3) On conclue facilement, car nous avons trouvé deux chemins vers l'origine (le long de la droite et le long de la parabole) qui ne donnent pas la même limite.

Exercice 11 – Prolongement par continuité

1) Soit $f : (\mathbb{R}^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto \frac{xy + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Pour prolonger f par continuité, il faut montrer que sa limite existe en $(0,0)$.

Utilisons les coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$:

$$f(r,\theta) = \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta + r^2 \sin^2\theta}{r} = r(\cos\theta \sin\theta + \sin^2\theta) \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

Donc f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ avec $f(0,0) = 0$.

2) Soit $f : (\mathbb{R}^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto (x^2 + y^2)^{-1} \ln(1 + xy)$.

Utilisons encore les coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$:

$$f(r,\theta) = \frac{\ln(1 + r^2 \cos\theta \sin\theta)}{r^2} \underset{D.L.}{=} \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta + o(r^4)}{r^2} = \cos\theta \sin\theta + o(r^2)$$

On $\lim\limits_{r \to 0} f(r,\theta) \neq 0$ donc la limite dépend de la direction d'approche donc n'est pas unique $\rightarrow$ pas de prolongement par continuité.

3) Soit $f : (\mathbb{R}^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto (x^2+y^2)^{-1}\left(\cos x - \sqrt{1+y^2}\right)$

Il suffit d'utiliser les D.L. de $\cos x$ et $\sqrt{1+y^2}$ en 0:

$$f(x,y) = \frac{\cos x - \sqrt{1+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^4)-\left(1+\frac{y^2}{2}+o(y^4)\right)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{-x^2/2 - y^2/2 + o(x^4+y^4)}{x^2+y^2}$$

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \frac{-x^2/2-y^2/2}{x^2+y^2} = \frac{-1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0,0) = -\frac{1}{2}$.

4) Soit $f : (\mathbb{R}^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto \left(\frac{\sin x}{x}(x^2+y^2-1), \frac{|x+y|^3}{x^2+y^2}\right) = \left(f_1(x,y), f_2(x,y)\right).$

(i) Commençons par f_1 telle que $f_1(x,y) = x^{-1}\sin x\,(x^2+y^2-1)$.

En utilisant les coordonnées polaires :

$$f_1(r,\theta) = \frac{\sin(r\cos\theta)(r^2-1)}{r\cos\theta} = \frac{\sin(r\cos\theta)}{r\cos\theta}(r^2-1) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} -1$$

car $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Ainsi f_1 est prolongeable en $(0,0)$ avec $f_1(0,0) = -1$.

(ii) Soit maintenant f_2 telle que $f_2(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}|x+y|^3$. En polaire, cela donne

$$f_2(r,\theta) = \frac{|r\cos\theta + r\sin\theta|^3}{r^2} = \frac{r^3|\cos\theta+\sin\theta|^3}{r^2} = r|\cos\theta+\sin\theta|^3 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc f_2 prolongeable en $(0,0)$ avec $f_2(0,0) = 0$.

Finalement, f est bien prolongeable par continuité en $((0,0),(0,0))$ par

$$f((0,0),(0,0)) = (-1, 0).$$

Exercice 12 – Adhérence et prolongement

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto (x-y)^{-1}(\sin(x) - \sin(y))$.

(i) Son domaine de définition est $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,a)\}$, $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Son adhérence $\overline{D}$ est tout simplement le domaine et sa frontière, donc $\overline{D} = \mathbb{R}^2$.

(iii) Etudions le prolongement par continuité sur $\overline{D} \setminus D$, i.e. sur tous les couples (a,a), $a \in \mathbb{R}$. Il faut ici être malin comme un singe et remarquer que f ressemble à un taux d'accroissement ! En effet :

$$\lim_{x \to y} \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} =: \sin'(x) = \cos(x) \xrightarrow[x \to a]{} \cos(a)$$

Donc f est prolongeable par continuité pour tout $(x_a, y_a) \in \overline{D} \setminus D$ par $f(x_a, y_a) = \cos(a)$.