Partie I – Dérivées partielles, différentielles

Exercice 1

Rappel : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\nabla f = (\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \dots, \partial_{x_n} f)^T$

Si $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $p \geq 2$ $\nabla \vec{f} = \mathrm{Jac}\, \vec{f} = (\nabla f_1, \nabla f_2, \dots, \nabla f_p)^T$

N.B : Toutes ces fonctions sont différentiables car leurs dérivées partielles sont toutes $\mathcal{C}^0$.

1) $\nabla f(x,y,z) = \left(y + 2z\, e^{\sin(2x)} \cos 2x,\ x,\ e^{\sin(2x)} \right)$

2) $\mathrm{Jac}\, f = \begin{pmatrix} y^3/x & 3y^2 \ln x \\ x^y y/x & x^y y \ln x \end{pmatrix}$ 3) $\mathrm{Jac}\, f = \begin{pmatrix} 2x & 0 & -2z \\ \sin y \cos x & \sin x \cos y & 0 \end{pmatrix}$

4) $\mathrm{Jac}\, f = \begin{pmatrix} y & x \\ x & 1 \\ \frac{2x}{x^2+1} & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2

1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} (x^3+y^3)(x^2+y^2)^{-1} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

* Continuité en $(0,0)$:

$$f(x,y) \xrightarrow[\text{Coord pol.}]{} f(r,\theta) = \frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2} = r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) \xrightarrow[r\to 0]{} 0 = f(0,0)$$

Ainsi f est bien continue en $(0,0)$.

* Dérivées partielles en $(0,0)$:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3/h^2 - 0}{h} = 1.$$

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3/h^2 - 0}{h} = 1$$

* Dérivées directionnelles : On calcule, pour $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$D_u f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu_1,hu_2)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h^3u_1^3+h^3u_2^3}{h^2u_1^2+h^2u_2^2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{u_1^3+u_2^3}{u_1^2+u_2^2}$$

$$= \frac{u_1^3+u_2^3}{u_1^2+u_2^2}$$

Cela montre que la dérivée directionnelle en 0 existe dans toutes les directions.

* Différentiabilité : f est bien continue en $(0,0)$ et y admet des dérivées partielles $\mathcal{C}^0$, il est évident qu'elle est $\mathcal{C}^1$ voire même $\mathcal{C}^\infty$ donc elle est différentiable.

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

* Continuité en $(0,0)$:

$$f(r,\theta) = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r} = r\cos\theta\sin\theta \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \quad \text{donc } f\in\mathcal{C}^0.$$

* Dérivées partielles :

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

* Dérivées directionnelles : soit $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$. Alors :

$$D_u f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu_1,hu_2)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h^2u_1u_2}{h(u_1^2+u_2^2)^{1/2}}\right) = \frac{u_1u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}.$$

* Différentiabilité : idem que 1).

3) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} (x^2+y^2)^{xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

* Continuité en $(0,0)$:

$$\ln(f(x,y)) = xy \ln(x^2+y^2) \longrightarrow \ln(f(r,\theta)) = r^2 \cos\theta \sin\theta \ln(r^2)$$

or $r^2 \cos\theta \sin\theta \ln(r^2) \xrightarrow[r \to 0]{} 0$ par croissance comparées, donc

$$\exp\left(\lim_{r\to 0} \ln(f(r,\theta))\right) = \exp(0) = 1.$$

* Dérivées partielles :

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(h^2)^0 - 1}{h} = 0$$

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

* Dérivés directionnelles : soit $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$D_u f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(hu_1, hu_2) - f(0,0)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\left(h^2u_1^2 + h^2u_2^2\right)^{h^2u_1u_2} - 1\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(h^2u_1^2 + h^2u_2^2\right)^{h^2u_1u_2} - 1 = 0.$$

* Differentiabilité : idem.

Exercice 3

Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y) \longmapsto (\cos xy, y, x e^{y^2})$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u,v,w) \longmapsto uvw$.

1) $g \circ f = g(f(x,y)) = xy \cos(xy) \exp(y^2)$, et $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

2) ∘ $\partial_x (g\circ f)(x,y) = y \cos(xy) \exp(y^2) - y^2 \sin(xy) \exp(y^2)$.

∘ $\partial_y (g \circ f)(x,y) = \cos(xy)\exp(y^2) - xy \sin(xy) \exp(y^2) + 2xy^2 \cos(xy) \exp(y^2)$.

3) • $\mathrm{Jac}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} -y\sin xy & -x\sin xy \\ 0 & 1 \\ \exp(y^2) & 2xy\exp(y^2) \end{pmatrix}$

• $\mathrm{Jac}_{(u,v,w)}\, g = \begin{pmatrix} vw & uw & uv \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Jac}_{f(x,y)}\, g = \begin{pmatrix} y e^{y^2} & \cos xy\, e^{y^2} & y\cos xy \end{pmatrix}$

4) On utilise la formule $\mathrm{Jac}_{(x,y)}(g\circ f) = \mathrm{Jac}_{f(x,y)}\, g \cdot \mathrm{Jac}_{(x,y)} f$. Ainsi :

$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(g\circ f) = \begin{pmatrix} y e^{y^2} & \cos xy\, e^{y^2} & y\cos xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y\sin xy & -x\sin xy \\ 0 & 1 \\ \exp(y^2) & 2xy\exp(y^2) \end{pmatrix}$$

$$= \Big(y\cos(xy)\exp(y^2) - y^2\sin(xy)\exp(y^2) \quad \cos(xy)\exp(y^2) - xy\sin(xy)\exp(y^2) + 2xy^2\cos(xy)\exp(y^2) \Big)$$

$$= \big(\partial_x(g\circ f) \quad \partial_y(g\circ f) \big).$$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto (x+y)(1+x^2+y^2)^{-1}$.

1) Voir code.

2) • $\partial_x f(x,y) = \dfrac{x^2 - 2x(x+y) + y^2 + 1}{(x^2+y^2+1)^2}$

• $\partial_y f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2 - 2y(x+y) + 1}{(x^2+y^2+1)^2}$

3) On sait que $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 1$. Or l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ en $(0,0)$ s'écrit

$$z - f(0,0) = \partial_x f(0,0)(x-0) + \partial_y f(0,0)(y-0)$$

$$\Rightarrow \quad z = x + y + 1$$

Exercice 5

<u>Théorème</u> : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in U$. Si $f(x_0,y_0) = 0$ et $\partial_y f(x_0,y_0) \neq 0$ alors $\exists I$ intervalle ouvert contenant x_0 et une unique fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tq :

1) $\varphi(x_0) = y_0$ 2) $f(x, \varphi(x)) = 0 \ \forall x \in I$ 3) $\varphi'(x) = -\dfrac{\partial_x f(x,y)}{\partial_y f(x,y)} \ \forall x \in I$

4) La droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = x_0$ est d'équation $y = \varphi'(x_0)(x - x_0) + y_0$

1) On considère l'équation (E) : $xe^y + ye^x = 0$. Pour montrer qu'elle définit une unique fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$, on montre alors, en posant $F(x,y) = xe^y + ye^x$, les 3 conditions suivantes :

(i) F continûment différentiable au voisinage de $(0,0)$: elle est somme de produits de fonctions continûment différentiable donc elle l'est aussi.

(ii) $F(0,0) = 0$

(iii) $\partial_y F(0,0) = (xe^y + e^x)(0,0) = 1 \neq 0$

On a les trois conditions pour invoquer le théorème des fonctions implicites : elle définit donc une unique fonction φ telle que $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.

2) Le DL de Taylor à l'ordre 2 de φ centré en $x = 0$ est :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)(x-0) + \varphi''(0)(x-0)^2 + o((x-0)^2)$$

* $\varphi(0) = 0$ car $\varphi(0)$ est le y tq $F(0,y) = 0$.

* $\varphi'(x) = (\partial_x F(x,y))(\partial_y F(x,y))^{-1} = \dfrac{ye^x + e^y}{xe^y + e^x}$ et donc $\varphi'(0) = y + e^y$

* $\varphi''(x) = \left(\dfrac{ye^x + e^y}{xe^y + e^x}\right)' = \dfrac{y(xe^y + e^x) - (ye^x + e^y)e^y}{(xe^y + e^x)^2}$ et donc

$$\varphi''(0) = \frac{y(0+1) - (y + e^y)e^y}{1^2} = y - ye^y - e^{2y}$$

Finalement le DL est :

$$\varphi(x) = \left(y + e^{y}\right)x + \left(y - ye^{y} - e^{2y}\right)x^{2} + o(x^{2}).$$

Exercice 6

On veut déterminer l'ensemble des fonctions f vérifiant

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = e^{x}y \\ \partial_y f(x,y) = e^{x} + 2y \end{cases}$$

Intégrons la première équation sur x :

$$\int \partial_x f(x,y)\,dx = \int e^{x}y\,dx = ye^{x} + c(y) = f(x,y)$$

Il suffit alors de dériver le f trouvé par rapport à y :

$$\partial_y f(x,y) = e^{x} + c'(y) \Rightarrow e^{x} + c'(y) = e^{x} + 2y \Leftrightarrow c'(y) = 2y$$

$$\Leftrightarrow c(y) = y^{2} + k, \ k \in \mathbb{R}.$$

Ainsi la solution générale de ce système est

$$f(x,y) = ye^{x} + y^{2} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7

On veut déterminer les fonctions $\mathcal{C}^{1}$ de $\mathbb{R}^{2} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'invariance par translation.

1) Considérons la fonction $g(t) = f(x+t, y+t)$, qui est constante car $g(t) = f(x,y)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Ainsi $g'(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. On par la règle de la chaîne :

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(x+t, y+t) = \partial_x f(x+t, y+t) + \partial_y f(x+t, y+t)$$

donc $\quad g'(0) = \partial_x f(x,y) + \partial_y f(x,y) = 0.$

2) On pose $u = x+y$ et $v = x-y$ et $F(u,v) = f(x,y)$. Exprimons x et y en fonction de u et v et montrons que $\partial_u F(u,v) = 0$. On remarque que $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$.

Calculons la dérivée partielle $\partial_u F$:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}\partial_x f + \frac{1}{2}\partial_y f.$$

Comme $\partial_x f + \partial_y f = 0$, $\partial_u F(u,v) = 0$

3) Comme $\partial_u F = 0$ cela implique que F ne dépend pas de u, donc $F(u,v) = F(v)$.

En sachant que $v = x - y$, f peut donc être vu comme une fonction de $x-y$ uniquement, elle est donc invariante par translation le long du vecteur $(1,-1)$.

Les fonctions recherchées peuvent donc s'exprimer comme $f(x,y) = h(x-y)$ où $h \in \mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. On définit la divergence :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X) : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} X_i(x) \end{aligned}$$

1) Soit $V \in \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note $X : U \to \mathbb{R}^n$ telle que $X(x) = f(x)V$.

On a donc $X(x) = \left(f(x)V_1, f(x)V_2, \ldots, f(x)V_n\right)^T$. Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$:

$\partial_{x_i}(f(x)V_i) = V_i \partial_{x_i} f(x)$ et donc on a finalement

$$\operatorname{div}(X)(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} X_i(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i \partial_{x_i} f(x) = V \cdot \nabla f(x)$$

2) Soit $X : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteur de $\mathcal{C}^1$ sur U, et $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On calcule $gX = (gX_1, \ldots, gX_n)$ alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$,

$$\partial_{x_i}(g X_i) = X_i \partial_{x_i} g + g \partial_{x_i} X_i,$$

La divergence de gX est alors

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(gX)(x) &= \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \partial_{x_i} g + g \partial_{x_i} X_i\right) \\ &= \nabla g(x) \cdot X(x) + g(x) \operatorname{div}(X)(x). \end{aligned}$$

Partie II - Ordres supérieurs

Exercice 9

1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2(x+y)$.

- $\partial_x f = 2x(x+y) + x^2$
- $\partial_x^2 f = 4x + 2(x+y)$
- $\partial_y f = x^2$
- $\partial_y^2 f = 0$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f = 2x$

Ainsi

$$f(x,y) \approx f(0,0) + \partial_x f(0,0)\, x + \partial_y f(0,0)\, y + \frac{1}{2}\left(\partial_x^2 f(0,0)\, x^2 + \partial_y^2 f(0,0)\, y^2 + 2\,\partial^2_{xy} f(0,0)\, xy\right) = 0$$

2) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto z e^{xy}$.

- $\partial_x f = yz e^{xy}$
- $\partial_x^2 f = y^2 z e^{xy}$
- $\partial^2_{xy} f = z e^{xy} + xyz e^{xy}$
- $\partial_y f = xz e^{xy}$
- $\partial_y^2 f = x^2 z e^{xy}$
- $\partial^2_{xz} f = y e^{xy}$
- $\partial_z f = e^{xy}$
- $\partial_z^2 f = 0$
- $\partial^2_{yz} f = x e^{xy}$

$$f(x,y,z) \approx f(0,0,0) + \partial_x f(0,0,0)x + \partial_y f(0,0,0) y + \partial_z f(0,0,0) z + \frac{1}{2}\left(\partial_x^2 f(0,0,0)\, x^2 + \partial_y f(0,0,0)\, z^2 + \partial_z^2 f(0,0,0)\, z^2\right) + \partial^2_{xy} f(0,0,0)\, xy + \partial^2_{xz} f(0,0,0)\, xz + \partial^2_{yz} f(0,0,0)\, yz = z$$

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1) Il est clair que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. De plus, $\forall (x,y) \neq (0,0)$ on a

$$\partial_x f(x,y) = y\,\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

De plus $f(x,0) - f(0,0) = 0$ donc $\partial_x f(0,0)$ existe et $\partial_x f(0,0) = 0$. En écrivant :

$$|x^4+4x^2y^2+y^4| \leq x^4+4x^2y^2+y^4 \leq 2(x^2+y^2)^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

on constate que $\partial_x f$ est continue en $(0,0)$. Un raisonnement analogue symétrique nous prouve la même chose pour $\partial_y f$ donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Ses dérivées partielles sont :

$$\partial_x f(x,y) = y\,\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \partial_y f(x,y) = x\,\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

2) On remarque que

$$\partial^2_{xy} f(x,y) = \partial^2_{yx} f(x,y) =$$ 

 $$= \frac{8x^2y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} - \frac{2x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} - \frac{2y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Exercice 11

1) D'après le graphe, il semble qu'on ait un point selle en $(-1,0)$ et un maximum local en $(1,0)$.

Nous allons le vérifier via le calcul.

2) Les points critiques sont les endroits où les dérivées de 1er ordre de f s'annulent.

On a donc :
$$\begin{cases}\partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3-3x^2 = 0 \\ -4y-4y^3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 1 \text{ ou } x=-1 \\ y = 0\end{cases}$$

Les points critiques sont donc $(1,0)$ et $(-1,0)$. Concernant la nature des points critiques, on calcule sa matrice Hessienne.

$$\mathrm{Hess}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix}\partial_x^2 f & \partial_{xy}^2 f \\ \partial_{yx}^2 f & \partial_y^2 f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6x & 0 \\ 0 & -4-12y^2\end{pmatrix}$$

Evaluons-la sur les points critiques :

- $\mathrm{Hess}_{(1,0)} f = \begin{pmatrix}-6 & 0 \\ 0 & -4\end{pmatrix}$ $\det \mathrm{Hess}_{(1,0)} f = 24 > 0$ donc min ou max local.
  Ici $\partial_x^2 f = -6x$ et pour $x=1$, $\partial_x^2 f < 0$
  donc maximum local
- $\mathrm{Hess}_{(-1,0)} f = \begin{pmatrix}6 & 0 \\ 0 & -4\end{pmatrix}$ $\det \mathrm{Hess}_{(-1,0)} f = -24 < 0$ donc point selle.

Exercice 12

1) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$

(i) $\partial_x f(x,y) = 3x^2 + 3y$; $\partial_y f(x,y) = 3y^2 + 3x$

On résoud le système :
$$\begin{cases}3x^2 + 3y = 0 \\ 3y^2 + 3x = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2 = -3y \\ 3y^2 = -3x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = -x^2 \\ -3x^4 = -3x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 0 \text{ ou } y=-1 \\ x=0 \text{ ou } x=1\end{cases}$$

On a donc $(-1,-1)$ et $(0,0)$ comme pts critiques.

(ii) $\mathrm{Hess}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix}6x & 3 \\ 3 & 6y\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Hess}_{(-1,-1)} f = \begin{pmatrix}-6 & 3 \\ 3 & -6\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Hess}_{(0,0)} f = \begin{pmatrix}0 & 3 \\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

On $\det \operatorname{Hess}_{(0,0)} f = -9 < 0$ donc $(0,0)$ est un point selle, et

$\det \operatorname{Hess}_{(-1,-1)} f = 27 > 0$ et $\partial_x^2 f(-1,-1) < 0$ donc c'est un maximum local.

2) $f(x,y) = x(\ln^2 x + y^2)$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

(i) $\partial_x f(x,y) = \ln^2 x + y^2 + 2\ln x$

$\partial_y f(x,y) = 2xy$

Si on veut résoudre le système :

$$\begin{cases} 2xy = 0 \\ \ln^2 x + 2\ln x + y^2 = 0 \end{cases}$$

il faut remarquer que $2xy = 0 \iff y = 0$ car $x > 0$. On doit donc résoudre $\ln^2 x + 2\ln x = 0$, il suffit de poser $X = \ln x$ pour obtenir :

$$X^2 + 2X = 0 \iff X(X+2) = 0 \iff X = 0 \text{ ou } X = -2$$

$$\iff \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = -2$$

$$\iff x = 1 \text{ ou } x = e^{-2}$$

Les points critiques sont donc $(1,0)$ et $(e^{-2},0)$.

(ii) $\operatorname{Hess}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x} & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ $\qquad \frac{2\ln e^{-2}}{e^{-2}}$ $\quad 2(-2)e^{2}$

$\operatorname{Hess}_{(1,0)} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \operatorname{Hess}_{(e^{-2},0)} f = \begin{pmatrix} -4e^2 + 2e^2 & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^2 & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$

On constate que $\det \operatorname{Hess}_{(1,0)} f = 4 > 0$ et $\partial_x^2 f(1,0) = 2 > 0$ donc $(1,0)$ est un minimum local. Pour $(e^{-2},0)$, $\det \operatorname{Hess}_{(e^{-2},0)} f = -4$ donc $(e^{-2},0)$ est un point selle.

Exercice 13

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. On définit le Laplacien d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ comme suit

$$\Delta f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \partial_x^2 f(x,y) + \partial_y^2 f(x,y).$$

On dit que la fonction f est harmonique sur U si $\Delta f = 0$.

1) Montrons que $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$:

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}\begin{pmatrix}\partial_x f \\ \partial_y f\end{pmatrix} = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f = \Delta f.$$

On en déduit :

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\nabla f\cdot\nabla g + g\Delta f = f\operatorname{div}(\nabla g) + g\operatorname{div}(\nabla f) + 2\nabla f\cdot\nabla g.$$

2) Supposons $f : U \to \mathbb{R}$ harmonique de classe $\mathcal{C}^3$. Si $\Delta f = 0$ alors évidemment $\Delta(\partial_x f) = \Delta(\partial_y f) = 0$. Montrons que $\Delta g = 0$ avec $g : (x,y) \in U \to x\partial_x f + y\partial_y f$.

On calcule :

$$\Delta(x\partial_x f) = \partial_x^2(x\partial_x f) + \partial_y^2(x\partial_x f)$$
$$\Delta(y\partial_y f) = \partial_x^2(y\partial_y f) + \partial_y^2(y\partial_y f)$$

Donc

$$\Delta g = \Delta(x\partial_x f) + \Delta(y\partial_y f)$$
$$= \partial_x(\partial_x f + x\partial_x^2 f) + x\,\partial_{xyy}^3 f + y\,\partial_{yxx}^3 f + \partial_y(\partial_y f + y\partial_y^2 f)$$
$$= \partial_x^2 f + \partial_x^3 f + x\,\partial_x^2 f + x\,\partial_{xyy}^3 f + y\,\partial_{yxx}^3 f + \partial_y^2 f + \partial_y^3 f + y\,\partial_y^2 f$$

Or $\partial_x^2 f + \partial_y^2 f = \Delta f = 0$ et également les dérivées partielles d'ordre 3, qui sont les dérivées partielles de Δf, sont nulles. Donc $\Delta g = 0$.

3) Supposons maintenant $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ est radiale ($\exists\, \varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ tq $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$).

a) Supposons f harmonique, montrons que φ' est solution d'une EDO.

D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée :

- $\partial_x f = 2x\varphi'(x^2+y^2)$ et $\partial_x^2 f = 2\varphi'(x^2+y^2) + 4x^2\varphi''(x^2+y^2)$
- $\partial_y f = 2y\varphi'(x^2+y^2)$ et $\partial_y^2 f = 2\varphi'(x^2+y^2) + 4y^2\varphi''(x^2+y^2)$

Posons $t = x^2+y^2$, et en utilisant que $\Delta f = 0$, on a :

$$2\varphi'(x^2+y^2) + 4x^2\varphi''(x^2+y^2) + 2\varphi'(x^2+y^2) + 4y^2\varphi''(x^2+y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\varphi'(t) + 4t\varphi''(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \varphi'(t) + t\,\varphi''(t) = 0.$$

Donc φ' est solution sur $[0,+\infty[$ de l'EDO $xy' + y = 0$.

3) Il suffit de résoudre l'EDO précédente, dont les solutions sont sous la forme $x \mapsto \frac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$. On intègre : $\varphi(x) = \int \frac{c}{x}\,dx = c\ln|x| + d$ avec $c, d \in \mathbb{R}$.

Donc $f(x,y) = c\ln(x^2+y^2) + d$ avec $c, d \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Et sur $\mathbb{R}^2$, on rajoute la fonction nulle $f_0(x,y)$.