Chapitre 1 : Logique et ensembles

1 Logique

Cette section peut paraître abstraite, mais elle est importante car on y trouvera la base de tous les raisonnements usuels (ou des erreurs de raisonnement usuelles...).

Une **proposition** est un énoncé pouvant être vrai ou faux. On dit que «*vrai*» et «*faux*» sont les deux **valeurs de vérité** possibles d'une proposition.

A partir d'une ou plusieurs propositions, on peut en construire d'autres en utilisant les opérations logiques décrites ci-dessous.

1.1 Négation d'une proposition

Définition 1.1 *Soit P une proposition. Sa* négation*, «non-P», notée $\overline{P}$, est définie à partir de sa table de vérité :*

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

où on a noté V pour «Vrai», F pour «faux».

Exemple. Si x est un réel, la négation de la proposition «$x \geqslant 0$» est «$x < 0$».

Théorème 1.2 *Soit P une proposition. Alors, $\overline{(\overline{P})} = P$.*

Démonstration. On vérifie que $\overline{(\overline{P})}$ et P ont les mêmes valeurs de vérité.

1.2 Les connecteurs logiques «et» et «ou»

Soient P et Q deux propositions. On définit les propositions «P ou Q», notée $P \vee Q$, et «P et Q», notée $P \wedge Q$, par les tables de vérité ci-dessous.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Théorème 1.3 *Soit P une proposition. Alors les propositions P, $P \wedge P$ et $P \vee P$ sont soit toutes vraies, soit toutes fausses.*

Théorème 1.4 (Lois de Morgan) *Soient P et Q deux propositions. Alors*

- *les propositions* $\overline{P \wedge Q}$ *et* $\overline{P} \vee \overline{Q}$ *sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.*
- *les propositions* $\overline{P \vee Q}$ *et* $\overline{P} \wedge \overline{Q}$ *sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.*

Exercice. Montrer les deux théorèmes précédents en écrivant et en comparant les tables de vérité des différentes propositions considérées.

En utilisant la notion d'équivalence de propositions définie et expliquée dans le paragraphe qui suit, on peut reformuler ces deux théorèmes en disant que

- les propositions P, $P \wedge P$ et $P \vee P$ sont équivalentes
- les propositions $\overline{P \wedge Q}$ et $\overline{P} \vee \overline{Q}$ sont équivalentes
- les propositions $\overline{P \vee Q}$ et $\overline{P} \wedge \overline{Q}$ sont équivalentes

Dans l'énoncé des lois de Morgan, on remarquera qu'en prenant la négation d'une phrase logique, «le *ou* devient un *et*» et «le *et* devient un *ou*».

1.3 Equivalence de propositions logiques

Définition 1.5 *Deux propositions équivalentes P et Q sont deux propositions qui sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.*

La proposition : «les propositions P et Q sont équivalentes» se note $P \iff Q$.

Autrement dit, deux propositions équivalentes sont deux propositions qui ont les *mêmes valeurs de vérité*. La table de vérité de la proposition $P \iff Q$ est :

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 1. Soit X une personne de nationalité française. On considère les deux propositions suivantes :

- P_X : « X est majeur(e)»
- Q_X : « X a plus de 18 ans»

Âge de X	P_X	Q_X
$0 \leqslant$ âge $\leqslant 18$	F	F
$18 <$ âge	V	V

P_X et Q_X ont les mêmes valeurs de vérité : P_X et Q_X sont équivalentes.

Exemple 1 bis. Soit X une personne de nationalité française. On considère les deux propositions suivantes :

- P'_{X} : « X est majeur(e)»
- Q'_{X} : « X a plus de 20 ans»

Âge de X	P'_{X}	Q'_{X}
$0 \leqslant$ âge $\leqslant 18$	F	F
$18 <$ âge $\leqslant 20$	V	F
$20 <$ âge	V	V

P'_{X} et Q'_{X} n'ont pas toujours la même valeur de vérité : si X a 19 ans, P'_{X} est vrai alors que Q'_{X} est faux. Dans ce cas, P'_{X} et Q'_{X} ne sont donc pas équivalentes. Par contre, si X a moins de 18 ans ou plus de 20 ans, P'_{X} et Q'_{X} sont équivalentes.

Exemple 2. Soit x un nombre réel. On considère les propositions suivantes :

- P_x : «$x = 1$»
- Q_x : «$x^2 = 1$»

Suivant la valeur de x, les valeurs de vérité de P_x et Q_x sont données dans le tableau suivant.

	P_x	Q_x
$x < -1$	F	F
$x = -1$	F	V
$-1 < x < 1$	F	F
$x = 1$	V	V
$1 < x$	F	F

P_x et Q_x ne sont donc pas équivalentes dans le cas où $x = -1$. Elles sont équivalentes si $x \neq -1$.

1.4 Implication logique

Définition 1.6 *Soit P et Q deux propositions. On dit que P implique Q, et on note $P \Rightarrow Q$, si P ne peut pas être vraie sans que Q soit aussi vraie.*

La table de vérité de la proposition «$P \Rightarrow Q$» est donc

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Théorème 1.7 *Soient P et Q deux propositions. Alors*

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{P} \vee Q).$$

Exercice. Le démontrer : calculer la table de vérité de la proposition «$\overline{P} \vee Q$», et constater que c'est la même que celle de la proposition «$P \Rightarrow Q$».

Dans tous les raisonnements logiques qu'on est amené à faire, en mathématique comme ailleurs, on utilise sans arrêt les deux résultats suivants.

Théorème 1.8 (Transitivité de l'implication). *Si P, Q et R sont trois propositions,*

$$\big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$

Théorème 1.9 (Propositions équivalentes). *Si P et Q sont deux propositions,*

$$(P \iff Q) \iff \big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)\big).$$

Remarque 1.10 *En conséquence du dernier théorème, pour montrer l'équivalence de deux propositions, on montrera souvent deux implications : l'une de «gauche à droite» et l'autre de «droite à gauche».*

Exemple. Si n est un entier naturel, on note P_n la proposition :

$$«10^n + 1 \text{ est un multiple de } 9».$$

On va montrer que, pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{P}_n \Rightarrow \mathrm{P}_{n+1}.$$

Soit n un entier naturel. «P_n est vraie» signifie qu'il existe un entier naturel k tel que $10^n + 1 = 9k$. Dans ce cas, on a

$$10^{n+1}+1 = 10\times10^n+1 = 10\times(10^n+1)-10+1 = 10\times(10^n+1)-9 = 10\times9k-9 = 9(10k-1).$$

On en déduit donc que, en ayant supposé P_n vraie, «($10^{n+1} + 1$ est un multiple de 9)» est aussi vraie, c'est à dire que P_{n+1} est vraie. L'implication «$\mathrm{P}_n \Rightarrow \mathrm{P}_{n+1}$» est donc parfaitement exacte.

Et pourtant, la proposition P_n n'est vraie pour aucun entier n. Ce n'est pas une contradiction : on a montré que si P_n était vraie, alors P_{n+1} le serait aussi, mais on ne s'est pas posé la question de savoir si l'hypothèse «P_n est vraie»... était vraiment vraie. Or elle ne l'est pas. Ça se voit facilement pour des petites valeurs de n : en effet, $2, 11, 101, 1001, \ldots$ ne sont pas des multiples de 9. On ne peut donc pas utiliser une de ces petites valeurs de n pour «amorcer» un raisonnement par récurrence.

Pour montrer que «P_n est fausse», quelle que soit la valeur de n (notez bien qu'on ne l'a pas montré à ce stade), on pourra faire l'exercice suivant.

Exercice. Si n est un entier naturel, on note Q_n la proposition :

$$«10^n - 1 \text{ est un multiple de } 9».$$

1. En procédant comme dans l'exemple précédent, montrer que pour tout entier naturel n, l'implication «$\mathrm{Q}_n \Rightarrow \mathrm{Q}_{n+1}$» est vraie.
2. Montrer que Q_0 est vraie et en déduire que Q_n est vrai pour tout entier naturel n.

3. En remarquant que $10^n + 1 = (10^n - 1) + 2$, montrer que P_n est faux pour tout entier naturel n.

Les tableaux suivants résument différentes expressions équivalentes qu'on peut utiliser pour parler d'une implication. On considère deux propositions logiques P et Q.

$\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$
«P est vrai» implique «Q est vrai»
«P est vrai» est une condition suffisante pour que Q soit vrai
il suffit que P soit vrai pour que Q soit vrai
si P est vrai, alors Q est vrai / P est vrai seulement si Q est vrai

$\mathrm{P} \Leftarrow \mathrm{Q}$
«P est vrai» est une conséquence de «Q est vrai»
«P est vrai» est une condition nécessaire pour que Q soit vrai
il faut que P soit vrai pour que Q soit vrai
P est vrai si Q est vrai

$\mathrm{P} \iff \mathrm{Q}$
«P est vrai» équivaut à «Q est vrai»
«P est vrai» est une condition nécessaire et suffisante pour que Q soit vrai
il faut et il suffit que P soit vrai pour que Q soit vrai
P est vrai si et seulement si Q est vrai

Dans le dernier tableau (et seulement dans celui-là), si on remplace partout «vrai» par «faux», le tableau reste correct.

1.5 Négation, contraposée et réciproque d'une implication

Définition 1.11 *Soient P et Q deux propositions. L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ s'appelle la* **contraposée** *(ou* **l'implication contraposée***) de l'implication $P \Rightarrow Q$.*

Définition 1.12 *Soient P et Q deux propositions. L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle la* **réciproque** *(ou* **l'implication réciproque***) de l'implication $P \Rightarrow Q$.*

Théorème 1.13 *Soient P et Q deux propositions. Alors,*

- *$\overline{(P \Rightarrow Q)}$, la négation de $(P \Rightarrow Q)$, vérifie $\overline{(P \Rightarrow Q)} \iff \big(P \wedge \overline{Q}\big)$.*
- *$(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$, la contraposée de $(P \Rightarrow Q)$, vérifie $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) \iff \big(\overline{P} \vee Q\big) \iff (P \Rightarrow Q)$*
- *$(Q \Rightarrow P)$, la réciproque de $(P \Rightarrow Q)$, vérifie $(Q \Rightarrow P) \iff \big(P \vee \overline{Q}\big)$.*

Exercice. Montrer le théorème, en utilisant en particulier le Théorème 1.7.

Exemple. Soit $n \geqslant 2$, un nombre entier. L'implication

$$(n \text{ est un nombre premier et } n \neq 2) \Rightarrow (n \text{ est impair}) \qquad (I_n)$$

est vraie.

- La contraposée de l'implication (I_n) est :
$$(n \text{ est pair}) \Rightarrow (n \text{ n'est pas premier ou } n = 2)$$
Elle est automatiquement vraie pour tous les entiers $n \geqslant 2$ puisque une implication et sa contraposée sont équivalentes.

- La réciproque de l'implication (I_n) est :
$$(n \text{ est impair}) \Rightarrow (n \text{ est premier et } n \neq 2)$$
Suivant la valeur de n, cette réciproque peut être vraie, par exemple pour $n = 3$ (ou pour n'importe quel autre nombre premier impair $n \geqslant 3$), ou bien quand n est pair, mais elle peut aussi être fausse, par exemple pour $n = 9$ (puisque 9 n'est pas premier).

- La négation de l'implication (I_n) est :
$$n \text{ est premier, } n \neq 2 \text{ et } n \text{ est pair.}$$
Cette négation est automatiquement fausse quelle que soit la valeur de $n \geqslant 2$, puisque c'est la négation de (I_n), qui est vraie.

1.6 Les types de raisonnement

Le raisonnement déductif. Quand P est une proposition vraie et $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, on peut affirmer que Q est une proposition vraie.

Le raisonnement par l'absurde. On veut montrer qu'une proposition P est vraie. On suppose que c'est sa négation $\overline{P}$ qui est vraie et on montre que cela entraîne une proposition Q, qu'on sait par ailleurs être fausse. On en conclut que P est vraie (puisque Q est fausse, l'implication $\overline{P} \Rightarrow Q$ ne peut être vraie que si $\overline{P}$ est fausse, c'est à dire si P est vraie).

Le raisonnement par contraposition. Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, il (faut et) il suffit de montrer que sa contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est une proposition vraie.

Exemple. Soient k et k' deux entiers naturels non nuls. Montrons que

$$(kk' = 1) \Rightarrow (k = 1 \text{ et } k' = 1).$$

Supposons que $(k = 1 \text{ et } k' = 1)$ soit faux, c'est à dire que $(k \neq 1 \text{ ou } k' \neq 1)$. Alors, on a $(k \geqslant 2 \text{ et } k' \geqslant 1)$ ou $(k \geqslant 1 \text{ et } k' \geqslant 2)$. Dans les deux cas, on a $kk' \geqslant 2$ et en particulier, $kk' \neq 1$. Donc,

$$(k \neq 1 \text{ ou } k' \neq 1) \Rightarrow (kk' \neq 1).$$

Par contraposition, on a montré que

$$(kk' = 1) \Rightarrow (k = 1 \text{ et } k' = 1).$$

2 Ensembles

Définition 2.1 *Un* **ensemble** *est une collection d'objets.*
Ces objets sont appelés les **éléments** *de l'ensemble qu'ils constituent.*
Si x est un élément d'un ensemble E, on dit que x **appartient** *à E, et on note $x \in E$.*

Exemples.
1. L'ensemble des entiers naturels (noté $\mathbb{N}$) est la collection de tous les nombres entiers positifs ou nuls : 0,1,2,3,... Chacun de ces nombres est un élément de $\mathbb{N}$.
2. L'intervalle $[0, 1]$ est l'ensemble de tous les nombres réels x qui vérifient les inégalités $0 \leqslant x \leqslant 1$. Chacun de ces nombres est un élément de $[0, 1]$.
3. Si P désigne l'ensemble des nombres premiers,$7 \in P$, mais $6 \notin P$.

Les ensembles de nombres classiques. Certains des ensembles que l'on utilise le plus sont désignés par une lettre. Par exemple,

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels (0,1,2,3,...)
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs (..., -3,-2,-1,0,1,2,3,...)
- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels (c'est à dire les nombres qui s'écrivent sous la forme p/q, où p est un entier relatif et q un entier naturel non nul)
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels
- $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Description d'un ensemble. Dans des cas simples, on peut décrire un ensemble en listant tous ses éléments. Par exemple, $\{-1, 1\}$ désigne l'ensemble dont les deux seuls éléments sont les nombres -1 et 1. Les accolades ($\{$ et $\}$) signifient précisément que l'on est en train de considérer l'**ensemble** de ces deux nombres. $\{1, -1\}$ désigne le même ensemble : peu importe l'ordre dans lequel on liste les éléments de l'ensemble.

Un ensemble peut aussi être donné en décrivant par une phrase les éléments qu'il contient. Considérons deux exemples. D'une part, l'ensemble E des nombres réels x qui vérifient l'inégalité $x \geqslant 1$. Cette phrase peut être ré-écrite en langage mathématique, plus synthétique, sous la forme suivante :

$$E = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 1\}. \qquad (1)$$

D'autre part, l'ensemble des rationnels déjà évoqué, qu'on peut décrire en utilisant le même langage mathématique sous la forme

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N} \text{ et } q \neq 0\right\}. \qquad (2)$$

Dans les membres de droite des égalités (1) et (2), chaque caractère a une signification bien précise :

- les accolades ({ et }) signifient que le membre de droite est un ensemble ; ce qui est écrit entre les accolades ouvrantes et fermantes va permettre de décrire les éléments de cet ensemble.
- juste après l'accolade ouvrante, on écrit une forme générique des éléments de l'ensemble qu'on est en train de définir. Dans (1), $x \in R$ signifie que les éléments de E sont des nombres réels x. Dans (2), les éléments de $\mathbb{Q}$ s'écrivent sous la forme p/q, où p et q sont des nombres qui vérifient des contraintes qui vont être décrites après la virgule.
- la virgule (,) qui suit se lit «tel que». Parfois, elle est remplacée par une barre verticale (|).
- après la virgule, on écrit toutes les contraintes sur les paramètres (x dans (1), p et q dans (2)) apparaissant dans l'expression générique des éléments de l'ensemble, qui assurent que cette expression désigne effectivement un élément de l'ensemble. Dans (1), pour que le réel x soit dans l'ensemble E, il faut et il suffit que $x \geqslant 1$. Dans (2), pour que p/q soit un élément de $\mathbb{Q}$, il faut et il suffit que p soit un entier relatif et que q soit un entier naturel non nul.

Pour synthétiser, l'égalité (1), écrite en langage mathématique, se traduit en français et se lit de la manière suivante :

E	$=$	$\{$	$x \in \mathbb{R}$	,	$x \geqslant 1$	$\}$
E	est	l'ensemble des	réels x	tels que	x est supérieur ou égal à 1	

L'ensemble vide. C'est l'ensemble qui ne contient aucun élément. Il se note $\emptyset$ ou $\{\}$. Ne pas confondre l'ensemble vide $\emptyset = \{\}$ avec l'ensemble $\{\emptyset\}$. En effet, l'ensemble $\{\emptyset\}$ n'est pas vide puisqu'il contient un élément, à savoir l'ensemble vide.

Singletons, paires. Un ensemble qui contient un et un seul élément s'appelle un *singleton*. Un ensemble qui contient deux éléments (distincts) s'appelle une *paire*.

Par exemple, l'ensemble $\{\emptyset\}$ qu'on a vu plus haut est un singleton. L'ensemble $\{2\}$ est un singleton. L'ensemble $\{2\ ,\ 4\}$ est une paire. Par contre l'ensemble $\{2\ ,\ 2\}$ est un singleton, parce que c'est le même ensemble que $\{2\}$: ce n'est pas parce qu'on dit deux fois qu'un élément appartient à l'ensemble que ça fait deux éléments dans l'ensemble.

Inclusion. Quand tous les éléments d'un ensemble F appartiennent à un autre ensemble E, on dit que F *est inclus dans* E, ou que F *est contenu dans* E, ou encore que F *est une partie (ou un sous-ensemble) de* E, et on écrit $F \subset E$. L'inclusion $F \subset E$ est en particulier vraie quand $F = E$ ($E \subset E$), ou quand $F = \emptyset$ (l'ensemble vide est contenu dans n'importe quel ensemble).

On prendra garde à ne pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$. On écrira $2 \in \mathbb{N}$, et pas $2 \subset \mathbb{N}$ (car 2 est un **élément** de $\mathbb{N}$). Inversement, on écrira $\{2\} \subset \mathbb{N}$, et pas $\{2\} \in \mathbb{N}$ (car

$\{2\}$ est un **sous-ensemble** de $\mathbb{N}$).

Egalité de deux ensembles. Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils sont constitués des mêmes éléments, ce qui revient à dire qu'ils sont inclus l'un dans l'autre :

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

Ensemble des parties d'un ensemble. L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble donné E se note $\mathcal{P}(E)$. Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(E)$ contient 8 éléments : il y a la partie à 0 élément, trois singletons, trois paires et l'ensemble à 3 éléments E. De manière plus explicite,

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Notons que si $E = \emptyset, P(E) = \{\emptyset\}$, et donc $\mathcal{P}(E)$ n'est pas vide.
Notons aussi que les expressions «partie de E» et «sous-ensemble de E» sont synonymes.

Réunion de deux parties d'un ensemble. Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. On appelle réunion de A et de B le sous-ensemble de E constitué des éléments de E qui sont dans A **ou** dans B. La réunion de A et de B est notée $A \cup B$:

$$A \cup B = \{x \in E \ , \ x \in A \text{ ou } x \in B\} .$$

Intersection de deux parties d'un ensemble. Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. On appelle intersection de A et de B le sous-ensemble de E constitué des éléments de E qui sont dans A **et** dans B. L'intersection de A et de B est notée $A \cap B$:

$$A \cap B = \{x \in E \ , \ x \in A \text{ et } x \in B\} .$$

Complémentaire d'une partie. Soit A une partie d'un ensemble E. Le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Il est noté $C_E(A)$ ou $\overline{A}$.

$$C_E(A) = \overline{A} = \{x \in E \ , \ x \notin A\} .$$

Différence de deux parties. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. La différence de A et B, notée $A \setminus B$ (on lit «A moins B» ou «A privé de B») est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et n'appartiennent pas à B :

$$A \backslash B = \{x \in E \ , \ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

Par exemple, $\overline{A} = E \backslash A$.

Exemples.
1. Si $E=\mathbb{R}$, $A=[0,2]$ et $B=[1,3]$, on a

$$A\cup B=[0,3],\quad A\cap B=[1,2],\quad A\backslash B=[0,1[,\quad B\backslash A=]2,3],\quad C_{\mathbb{R}}(A)=]-\infty,0[\cup]2,+\infty[.$$

2. Si $E=\mathbb{R}$, $A=[0,4]$ et $B=[1,3]$, on a

$$A\cup B=[0,4],\quad A\cap B=[1,3],\quad A\backslash B=[0,1[\cup]3,4],\quad B\backslash A=\emptyset,$$

$$C_{\mathbb{R}}(B)=]-\infty,1[\cup]3,+\infty[,\quad C_A(B)=[0,1[\cup]3,4].$$

Dans le dernier exemple, noter que $B\subset A$, donc B est un sous-ensemble de A, raison pour laquelle on peut bien considérer l'ensemble $C_A(B)$, complémentaire de B dans A.
3. $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Produit cartésien. Soient E et F deux ensembles non vides. Le **produit cartésien** des deux ensembles E et F est l'ensemble des couples constitués d'un élément de E et d'un élément de F. Il est noté $E\times F$.Quand $E=F$, $E\times F$ est noté plus simplement E^2.

$$E\times F=\{(x,y)\ ,\ x\in E \text{ et } y\in F\}\,.$$

Exemples.
1. $\mathbf{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. En identifiant chaque couple de réels aux coordonnées cartésiennes d'un point dans un repère du plan, on identifie souvent $\mathbb{R}^2$ au plan.
2. $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$ est l'ensemble des couples (r,θ) où $r\in[0,+\infty[$ et $\theta\in[0,2\pi[$.

3 Les quantificateurs ∀ et ∃

On se donne un ensemble E et $P(x)$ une proposition dont la valeur de vérité dépend d'un élément $x\in E$, variable.

Définition 3.1 *La proposition : «Pour tous les éléments x de E, la proposition $P(x)$ est vraie» s'écrit en abrégé :*

$$«\forall x\in E, P(x)».$$

La proposition : «il existe au moins un élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie» s'écrit en abrégé :

$$«\exists x\in E, P(x)».$$

La proposition : «il existe un et un seul élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie» s'écrit en abrégé :

$$«\exists! x\in E, P(x)».$$

Dans ces trois phrases écrites en abrégé, la virgule se lit «tel que».

Négation d'une proposition avec quantificateurs. Ecrivons les négations des trois propriétés intervenant dans la définition.

$$\overline{\forall x \in E, P(x)} \iff \exists x \in E, \overline{P(x)},$$

$$\overline{\exists x \in E, P(x)} \iff \forall x \in E, \overline{P(x)},$$

$$\overline{\exists! x \in E, P(x)} \iff \left(\forall x \in E, \overline{P(x)}\right) \vee \left(\exists (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2, P(x_1), P(x_2)\right).$$

Quantificateurs et connecteurs logiques. Soient E un ensemble non vide et $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions dont les valeurs de vérité dépendent de $x \in E$. Alors

1) $\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x) \iff (\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))$.
2) $\forall x \in E, P(x) \vee Q(x) \impliedby (\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$.
3) $\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x) \implies (\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))$.
4) $\exists x \in E, P(x) \vee Q(x) \iff (\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x))$.

Dans les assertions 2) et 3) ci-dessus, les implications qui ne sont pas énoncées peuvent être fausses. On s'en convaincra grâce à l'exemple suivant.

Exemple. On lance une pièce deux fois de suite. A chaque lancer, on note le résultat (pile ou face). On note H l'ensemble des 4 résultats possibles :

$$H = \{(\text{pile}, \text{pile}), (\text{pile}, \text{face}), (\text{face}, \text{pile}), (\text{face}, \text{face})\}.$$

Pour $x \in H$, on considère les deux propositions :

P(x) : «le premier lancer donne pile», Q(x) : «le deuxième lancer donne pile».

Enfin, on considère comme ensemble E le sous-ensemble de H suivant :

$$E = \{(\text{face}, \text{pile}), (\text{pile}, \text{face})\}.$$

Alors, dans l'assertion 2), la propriété de gauche est vraie (pour tout élément de E, on a pile à l'un des deux lancers), celle de droite est fausse (on n'a pas pile au premier lancer pour tous les éléments de E, et on n'a pas pile au deuxième lancer pour tous les éléments de E). Donc l'implication qui irait de gauche à droite serait fausse.

Exercice. Montrer que l'implication qui irait de droite à gauche dans l'assertion 3) peut être fausse, en considérant le même exemple que ci-dessus.

4 Lien entre logique et ensembles

Soit E un ensemble non-vide, et A et B deux sous-ensembles de E.

Pour tout $x \in E$, notons

P(x) la proposition «$x \in A$», Q(x) la proposition «$x \in B$».

Alors
$$A = \{x \in E \mid \mathrm{P}(x) \text{ est vrai}\}, \qquad B = \{x \in E \mid \mathrm{Q}(x) \text{ est vrai}\}.$$
En utilisant les définitions vues plus haut des réunions, intersections et complémentaires de sous-ensembles de E, on a aussi

$$A \cup B = \{x \in E \mid \mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(x) \text{ est vrai}\},$$

$$A \cap B = \{x \in E \mid \mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x) \text{ est vrai}\},$$

$$C_E(A) = \overline{A} = \{x \in E \mid \mathrm{P}(x) \text{ est faux}\} = \left\{x \in E \mid \overline{\mathrm{P}(x)} \text{ est vrai}\right\}.$$

On en déduit une version ensembliste des lois de Morgan et des autres résultats de la section 1.2 :

$$A = A \cup A = A \cap A, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

L'inclusion d'un ensemble dans un autre peut se reformuler en une implication logique :
$$A \subset B \iff (\forall x \in E, \quad \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)) \iff (\forall x \in A, \quad \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)).$$
Pour montrer l'inclusion d'un ensemble A dans un ensemble B, il suffira donc de montrer que, pour tout $x \in A$, la proposition «$x \in A$» implique «$x \in B$».

Par conséquent, l'égalité de deux ensembles peut se reformuler en une équivalence entre deux propositions logiques :
$$A = B \iff (\forall x \in E, \quad \mathrm{P}(x) \iff \mathrm{Q}(x)).$$