Chapitre 2 : Fonctions réelles d'une variable réelle

1 Généralités

Définition 1.1 *Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (souvent, D est un intervalle ou une réunion d'intervalles).*
On appelle ***fonction de D dans $\mathbb{R}$*** *toute loi qui, à tout élément $x \in D$ (x est appelé* ***variable*** *de la fonction f), associe un nombre réel noté $f(x)$ (on dit que $f(x)$ est l'****image de x par f****). On note*

$$f : \begin{pmatrix} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{pmatrix}$$

D est appelé ***ensemble de définition*** *(ou* ***domaine de définition****) de f : c'est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est bien défini.*
On appelle ***image de f*** *l'ensemble des nombres réels y qui peuvent s'écrire sous la forme $y = f(x)$ pour une certaine valeur de $x \in D$. L'image de f est notée $Im(f)$ ou $f(D)$:*

$$Im(f) = f(D) = \{f(x) \mid x \in D\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D, y = f(x)\}.$$

Si $x \in D$ et $y = f(x)$, on dit que x est un ***antécédent de y par f****.*
On appelle ***graphe de f*** *l'ensemble des points du plan dont les coordonnées s'écrivent $(x, f(x))$ pour une certaine valeur de $x \in D$.*
Si f est une fonction de D dans $\mathbb{R}$ et que D' est un sous-ensemble de D, on appelle ***restriction de f à D'*** *la fonction de D' dans $\mathbb{R}$ notée $f_{|D'}$ et définie par:*

$$f_{|D'} : \begin{pmatrix} D' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{pmatrix}$$

Remarque 1.2

- *Si $x \in D$, ne pas confondre l'image de x par f, qui est le nombre réel $f(x)$, et l'image de f, qui est l'ensemble des images par f de tous les éléments de D.*
- *Un nombre $x \in D$ donné a une unique image par f (à savoir $f(x)$). Par contre, un nombre réel y donné peut avoir plusieurs antécédents par f (c'est à dire qu'il peut y avoir des valeurs de y pour lesquelles l'équation $y = f(x)$, d'inconnue x, a plusieurs solutions dans D).*

Définition 1.3 *Soit $D \subset \mathbb{R}$ et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de domaine D.*
On dit que f est ***bijective de D sur $f(D)$*** *(ou est une* ***bijection de D sur $f(D)$****) si tout élément de $f(D)$ admet un unique antécédent par f.*
Si f est bijective de D sur $f(D)$, on définit la ***bijection réciproque de f****, et on note f^{-1}, la fonction qui à tout élément y de l'image de f associe l'unique antécédent de y par f.*

$$f^{-1} : \begin{pmatrix} f(D) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longrightarrow & \begin{array}{c} \textit{l'unique solution } x \in D \\ \textit{de l'équation } y = f(x) \end{array} \end{pmatrix}$$

Remarque 1.4 *Si f est bijective de D sur $f(D)$, alors*

(i) Le domaine de définition de f^{-1} est $f(D)$, son image est D, et f^{-1} est bijective de $f(D)$ sur D.

(ii) Dans un repère orthonormé, le graphe de f^{-1} est le symétrique de celui de f par rapport à la droite d'équation $y = x$. En effet, soit (x, y) un point du plan. Dire que (x, y) appartient au graphe de f signifie que $x \in D$ et que x et y sont liés par la relation $y = f(x)$, ce qui équivaut à dire que $y \in f(D)$ et $x = f^{-1}(y)$, c'est à dire que (y, x) appartient au graphe de f^{-1}.

Exemples et contre-exemples.

(i) Soit $b \in \mathbb{R}$. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1^b : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & bx \end{array} \right. .$$

Si $b \neq 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = f_1^b(x)$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$, donnée par $x = y/b$. Donc l'image de f_1^b est $\mathbb{R}$ (car tout $y \in \mathbb{R}$ a un antécédent par f_1^b) et f_1^b est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (car pour tout y, cet antécédent est unique), la bijection réciproque étant

$$(f_1^b)^{-1} : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longrightarrow & y/b \end{array} \right. .$$

Si $b = 0$, $f_1^0(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc l'image de f_1^0 est le singleton $\{0\}$. f_1^0 n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ sur $\{0\}$, puisque 0 a une infinité d'antécédents par f_1^0.

(ii) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_2 : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^2. \end{array} \right.$$

Si $y > 0$, l'équation $y = x^2$ a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ ($\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$). Comme l'équation a (au moins) une solution, on en déduit que ce y est dans l'image de f_2, mais comme on a trouvé des valeur de y (une seule suffirait) pour lesquelles l'équation a plus que une solution, on peut aussi en déduire que f_2 n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ sur son image.
Si $y = 0$, l'équation $y = x^2$ ($0 = x^2$) a une seule solution, qui est $x = 0$. Donc 0 est dans l'image de f_2.
Si $y < 0$, l'équation $y = x^2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, donc y n'appartient pas à l'image de f_2.
Au total, l'image de f_2 est donc

$$f_2(\mathbb{R}) =]0, +\infty[\cup \{0\} = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+.$$

On a déjà dit que f_2 n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}_+$. Par contre, si on considère la restriction de f_2 à $\mathbb{R}_+$, définie par

$$f_{2|\mathbb{R}_+} : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f_2(x) = x^2, \end{array} \right.$$

on remarque que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation $y = x^2$ a une unique solution **dans** $\mathbb{R}_+$ (à savoir $\sqrt{y}$), donc $f_{2|\mathbb{R}_+}$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, et sa bijection réciproque est

$$h_2 = (f_{2|\mathbb{R}_+})^{-1} : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longrightarrow & \sqrt{y}, \end{array} \right.$$

qui est la fonction racine carrée.

(iii) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g_1 : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \frac{1}{x}, \end{array} \right.$$

Si $y \neq 0$, l'équation $y = \frac{1}{x}$ a une unique solution donnée par $x = \frac{1}{y}$. Donc $y \in g_1(\mathbb{R}^*)$.
Si $y = 0$, $0 = \frac{1}{x}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^*$, donc $0 \notin g_1(\mathbb{R}^*)$.
On en déduit que l'image de g_1 est $\mathbb{R}^*$, que g_1 est bijective de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$ et que sa bijection réciproque est g_1 elle même.

Définition 1.5 *Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et soit $I \subset D_f$ un intervalle. On dit que f est*

- ***croissante*** *sur I si ($x, x' \in I$ et $x \leqslant x'$) implique $f(x) \leqslant f(x')$*
- ***décroissante*** *sur I si ($x, x' \in I$ et $x \leqslant x'$) implique $f(x) \geqslant f(x')$*
- ***strictement croissante*** *sur I si ($x, x' \in I$ et $x < x'$) implique $f(x) < f(x')$*
- ***strictement décroissante*** *sur I si ($x, x' \in I$ et $x < x'$) implique $f(x) > f(x')$*

Définition 1.6 *Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine D_f tel que si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$. On dit que*

- *f est **paire** si pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$. Le graphe de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*
- *f est **impaire** si pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$. Le graphe de f est alors symétrique par rapport à l'origine.*

Exemples

- pour tout $b \in \mathbb{R}$, f_1^b est impaire. f_1^b est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $b > 0$, strictement décroissante si $b < 0$.
- f_2 est paire, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- g_1 est impaire, strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (mais pas sur la réunion $\mathbb{R}^*$ de ces deux ensembles)

Définition 1.7 *Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $T > 0$. On suppose que le domaine D_f de f vérifie la propriété : pour tout $x \in D_f$, $x + T \in D_f$ et $x - T \in D_f$.*
On dit que f est ***T-périodique*** *si pour tout $x \in D_f$, $\quad f(x+T) = f(x)$.*

Définition 1.8 *Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur des domaines respectifs $D_f \subset \mathbb{R}$ et $D_g \subset \mathbb{R}$. Si $D_f \cap D_g \neq \emptyset$, on définit leur somme et leur produit :*

$$f + g : \left(\begin{array}{ccc} D_f \cap D_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) + g(x) \end{array} \right. \quad , \qquad fg : \left(\begin{array}{ccc} D_f \cap D_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x)g(x) \end{array} \right.$$

Exercice. Donner les domaines de $h(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$ et $k(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$.

Définition 1.9 *Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies respectivement sur des domaines D_f et D_g. On suppose que $f(D_f) \subset D_g$. Alors on définit la fonction composée de g et f, notée $g \circ f$:*

$$g \circ f : \left(\begin{array}{ccc} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & g(f(x)). \end{array} \right.$$

Exemple. Considérons la fonction carrée f_2 et la fonction racine carrée h_2, déjà introduites plus haut. On a vu que f_2 est définie sur $\mathbb{R}$, et que $f_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$, qui est inclus dans (et même coincide avec) le domaine de définition de h_2. Donc $h_2 \circ f_2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h_2 \circ f_2(x) = \sqrt{x^2} = \left\{ \begin{array}{lll} x & \text{si} & x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} & x < 0. \end{array} \right.$$

$h_2 \circ f_2$ est donc la fonction valeur absolue : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_2 \circ f_2(x) = |x|$. Considérons maintenant la composition des deux mêmes fonctions, mais dans l'ordre inverse. h_2 est définie sur $\mathbb{R}_+$, f_2 est définie sur $\mathbb{R}$, donc $f_2 \circ h_2$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+$,

$$f_2 \circ h_2(x) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

$f_2 \circ h_2$ est donc la restriction à $\mathbb{R}_+$ de la fonction identité (c'est à dire la fonction qui à x associe x).

2 Fonctions usuelles

Dans la suite, n désigne un entier strictement positif. Dans les paragraphes qui suivent, on donne certaines propriétés des fonctions usuelles (valeur absolue, puissances, inverses des fonctions puissances, racines $n-$ième, logarithme, exponentielle, cosinus, sinus, tangente, arccosinus, arcsinus, arctangente). Les tableaux donnés en annexe (fonctions_usuelles.pdf) récapitulent certaines des propriétés de ces fonctions. On trouvera dans la première colonne leurs définitions, domaines de définition et leurs images. Dans la troisième colonne, leurs tableaux de variation. Dans la quatrième, l'allure de leurs graphes. La deuxième colonne donne leurs dérivées et leurs primitives, qui seront étudiés dans des chapitres ultérieurs du cours.

2.1 Fonction valeur absolue

On notera que la fonction valeur absolue est paire.

2.2 Fonctions puissances

La fonction f_n définie par $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est impaire si n est impair, paire si n est pair. En effet, si $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = (-1)^n f_n(x) = \begin{cases} -f_n(x) & \text{si } n \text{ est impair} \\ f_n(x) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Si n est impair, f_n est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. f_n n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ si n est pair. On peut le justifier par exemple en remarquant que si n est pair,

$$f_n(-1) = (-1)^n = 1 = 1^n = f_n(1),$$

et donc 1 a deux antécédents distincts (-1 et 1) par f_n. On peut aussi remarquer que, quelle que soit la parité de n, la restriction de f_n à $\mathbb{R}_+$ ($f_{n|\mathbb{R}_+}$) est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

2.3 Fonctions inverses des fonctions puissances

On peut vérifier (exercice) que la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g_n(x) = \frac{1}{x^n}$$

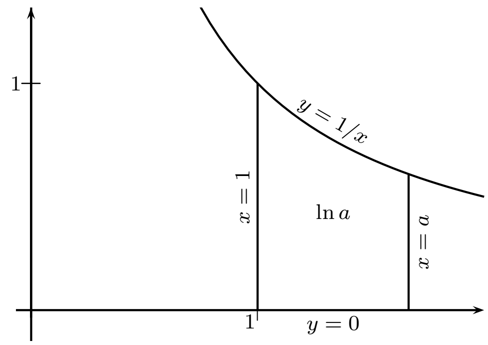
(on note aussi $g_n(x) = x^{-n}$) est paire si n est pair, impaire si n est impair.

2.4 Fonctions racines n-ièmes

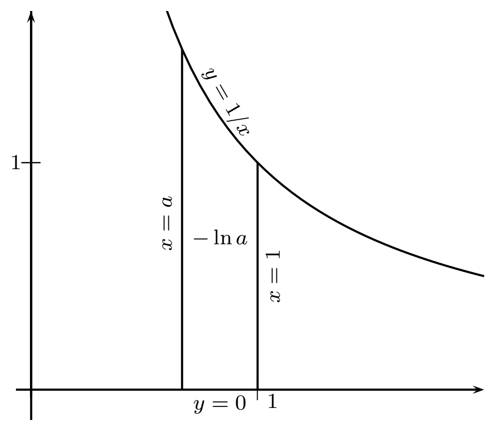
A la fin du paragraphe sur les fonctions puissances, on a vu que $f_{n|\mathbb{R}_+}$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Notons h_n sa bijection réciproque. h_n est appelée fonction racine n-ième. Si $y \in \mathbb{R}_+$, $x = h_n(y)$ est donc l'unique nombre positif tel que $f_n(x) = x^n = y$. Plus communément, on note $h_n(y) = y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$.

2.5 Fonction logarithme

Si $a \geqslant 1$, on note $\ln(a)$ l'aire (dans un repère orthonormé) de la surface délimitée par les courbes d'équations $x = 1$, $x = a$, $y = 0$, $y = 1/x$.



Si $a < 1$, on note $\ln(a)$ l'opposé de l'aire (dans un repère orthonormé) de la surface délimitée par les courbes d'équations $x = 1$, $x = a$, $y = 0$, $y = 1/x$.



Ainsi, on a défini la fonction logarithme népérien notée ln. $\ln(a)$ est défini pour tout nombre $a \in \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, le domaine de définition de ln est donc $\mathbb{R}_+^*$.

Propriétés 2.1

(i) $\ln(1) = 0$

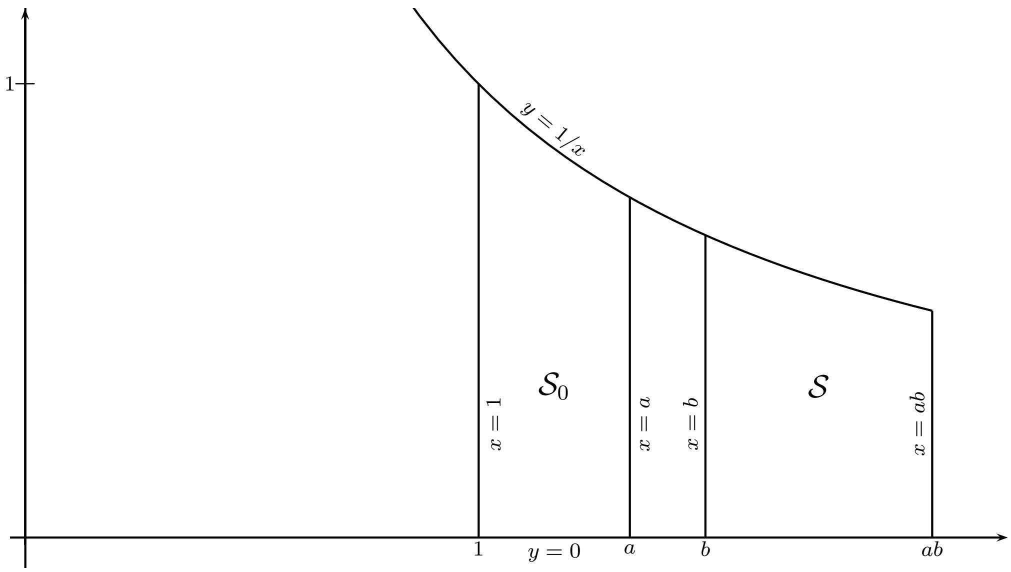
(ii) si $a, b > 0$, $\quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

(iii) si $a > 0$, $\quad \ln(1/a) = -\ln(a)$

(iv) si $a > 0$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, $\quad \ln(a^n) = n\ln(a)$

Démonstration. (i) est évident.
On va donner l'idée de la démonstration de (ii) dans le cas $1 < a < b$. Les autres cas pourraient être traités avec des raisonnements analogues. Pour cela, on va calculer de

deux manières différentes l'aire $\mathcal{A}$ de la surface $\mathcal{S}$ délimitée par les courbes d'équations $x = b$, $x = ab$, $y = 0$, $y = 1/x$.



D'une part, en utilisant la définition du logarithme vue plus haut, il est facile de voir que $\mathcal{A} = \ln(ab) - \ln(b)$. Considérons maintenant l'application T_b qui, à tout point (x, y) du plan, associe le point $(bx, y/b)$. Nous allons voir que l'application T_b a les propriétés intéressantes suivantes:

a) T_b envoie la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = 1/x$ sur elle-même

b) T_b envoie la surface $\mathcal{S}_0$ délimitée par les courbes d'équations $x = 1$, $x = a$, $y = 0$, $y = 1/x$ sur la surface $\mathcal{S}$

c) T_b transforme la surface $\mathcal{S}_0$ en une surface de même aire

Comme l'aire de $\mathcal{S}_0$ est $\ln(a)$ par définition du logarithme, il découlera des deux dernières assertions que $\mathcal{A} = \ln(a)$, et donc que $\ln(a) = \ln(ab) - \ln(b)$, qui est l'égalité voulue. Pour montrer a), on remarque que $(x, y) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $y = 1/x$, ce qui équivaut à $y/b = 1/(bx)$, c'est à dire au fait que $(bx, y/b) = T_b(x, y)$ est un point de $\mathcal{C}$. L'assertion b) découle de a) et du fait que T_b envoie la droite d'équation $x = 1$ sur la droite d'équation $x = b$, la droite d'équation $x = a$ sur la droite d'équation $x = ab$ et l'axe des abscisses sur lui-même. Pour c), on remarque qu'un rectangle dont les côtés sont parrallèles aux axes, de base l et de hauteur h est transformé par T_b en un autre rectangle dont les côtés ont pour longueurs lb et h/b, et donc de même aire $lb * h/b = lh$. Si on admet que $\mathcal{S}_0$ peut être recouverte par une infinité de rectangles disjoints de côtés parallèles aux axes, on se convainc que la propriété c) est vraie.
(iii) vient de (ii) appliqué à $b = 1/a$, en utilisant aussi (i).
Pour $n = 0$, l'égalité de l'assertion (iv) n'est rien d'autre que (i). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, elle se

montre par récurrence à partir de (ii), en prenant $b = a^k$ pour passer du rang k au rang $k+1$. Pour $n < 0$, l'égalité se déduit du cas $n > 0$ et de (iii).

Remarque 2.2

(i) *Par construction, la fonction logarithme est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$.

(ii) *Quand x décrit l'intervalle* $]0, +\infty[$, *"$\ln x$ n'a pas de saut". Autrement dit, une petite variation de x n'induit qu'une petite variation de* $\ln(x)$. *Comme on le verra au chapitre suivant, on dit que la fonction* ln *est continue sur* $]0, +\infty[$.

(iii) $\ln(x)$ *peut prendre des valeurs arbitrairement grandes, si on prend x suffisament grand. En effet, prenons par exemple $x = 2^n$ où n est un entier. D'après (iv),* $\ln(x) = \ln(2^n) = n\ln(2)$, *qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ (car* $\ln(2) > 0$*).*

On verra au chapitre suivant que les faits énoncés dans la remarque précédente ainsi que le théorème de la bijection réciproque impliquent la propriété suivante:

Propriétés 2.3 *La fonction* ln *est bijective de* $]0, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$.

L'allure du graphe de la fonction ln figure dans le tableau donné en annexe.

2.6 Fonction exponentielle

La propriété 2.3 autorise la définition suivante.

Définition 2.4 *On appelle* ***e*** *l'unique nombre réel qui vérifie* $\ln(e) = 1$. *Une valeur appochée de e est* $e \simeq 2.718$.
On appelle ***fonction exponentielle*** *la bijection réciproque de* ln. *On la note* **exp**. exp *est donc définie sur* $\mathbb{R}$, *et c'est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $]0, +\infty[$.

Propriétés 2.5

(i) $\exp(1) = e$

(ii) *si* $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

(iii) *si* $x \in \mathbb{R}$, $\quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

(iv) *si* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, $\quad \exp(x)^n = \exp(nx)$

Exercice. Démontrer la propriété 2.5 en utilisant la Propriété 2.1.

Définition 2.6 *Soit* $a \in]0, +\infty[$ *tel que* $a \neq 1$. *Pour* $x \in \mathbb{R}$, *on définit*

$$a^x = \exp(x \ln(a)).$$

Remarque 2.7 *Pour* $a = e$, *on a donc* $\exp(x) = e^x$. *On utilisera souvent cette autre notation pour la fonction exponentielle.*

La propriété 2.5 se généralise alors en

Propriétés 2.8 *Soit* $a > 0$ *tel que* $a \neq 1$. *Alors*

(i) $a^1 = a$

(ii) *si* $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad a^{x+y} = a^x a^y$

(iii) *si* $x \in \mathbb{R}$, $\quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

(iv) *si* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$, $\quad (a^x)^y = a^{xy}$

Propriétés 2.9 *Soit* $a > 0$ *tel que* $a \neq 1$. *La fonction*

$$\exp_a : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longrightarrow & a^x \end{array} \right.$$

est bijective de $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition de a^x, $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation $y = a^x$ si et seulement si $y = \exp(x \ln(a))$. Comme ln est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, cette équation équivaut à $\ln(y) = x \ln(a)$, c'est à dire $x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$. L'équation $y = a^x$ a donc une unique solution, et la bijection réciproque de $\exp_a$ est la fonction **logarithme en base *a***

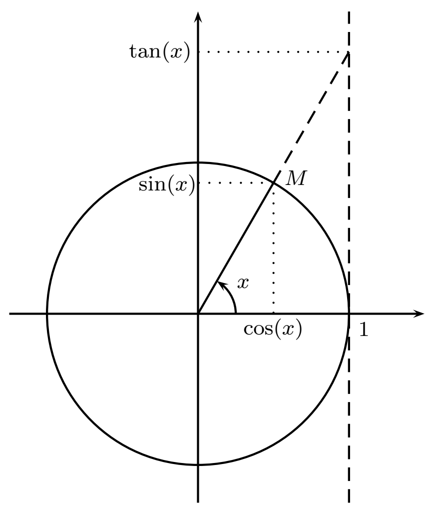
$$\log_a : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longrightarrow & \frac{\ln(y)}{\ln(a)} \end{array} \right.$$

2.7 Fonctions trigonométriques

Définition 2.10 *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan. Soit M le point du plan défini par*

- $\|\vec{OM}\| = 1$
- $(\vec{u}, \vec{OM}) = x$ *(où l'angle est exprimé en radians)*

On appelle **cosinus** *de x, et on note $\cos x$, l'abscisse de M.*
On appelle **sinus** *de x, et on note $\sin x$, l'ordonnée de M.*



Propriétés 2.11

- *les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$*
- *les fonctions cosinus et sinus ont $[-1, 1]$ pour image*
- *les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques*
- *la fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire*

Définition 2.12 *Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $\cos(x) \neq 0$, c'est à dire si $x \neq \pi/2 \mod \pi$, on définit la* **tangente** *de x,*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Propriétés 2.13

- *le domaine de définition de la fonction tangente est $\mathbb{R} \backslash \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$*
- *l'image de la fonction tangente est $\mathbb{R}$*
- *la fonction tangente est π-périodique*
- *la fonction tangente est impaire*

Formules trigos classiques Si $a, b, x \in \mathbb{R}$, on a

(i) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

(ii) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

(iii) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(iv) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

(v) $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

2.8 Fonctions trigonométriques inverses

Comme on vient de le voir, aucune des trois fonctions cos, sin, tan n'est bijective de son domaine de définition sur son image. En revanche, en restreignant chacune de ces fonctions à un intervalle bien choisi, on obtient une bijection de cet intervalle sur l'image de la fonction.

Ainsi,

$$\cos_{|[0,\pi]} : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On note

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

la bijection réciproque. De la même manière,

$$\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]} : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

est bijective de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. On note

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

la bijection réciproque. Enfin,

$$\tan_{|]-\pi/2,\pi/2[} :]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$$

est bijective de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. On note

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[$$

la bijection réciproque. Les graphes des fonctions trigonométriques inverses figurent dans les tableaux donnés en annexe.

3 Limites

3.1 Définitions et premiers exemples

Définition 3.1 *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine D contient un intervalle de type $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. Soit aussi $l \in \mathbb{R}$.*

- *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si on peut garantir que $f(x)$ soit arbitrairement grand en choisissant x suffisamment grand.*
  (Plus précisément, $\forall M > 0, \exists x_1 \geqslant a$ tel que $x \geqslant x_1 \implies f(x) \geqslant M$.)
  Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ou $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

- *On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si on peut garantir que $f(x)$ soit arbitrairement proche de l en choisissant x suffisamment grand.*
  (Plus précisément, $\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \geqslant a$ tel que $x \geqslant x_1 \implies |f(x) - l| < \varepsilon$.)
  On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, ou $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Remarque 3.2 *On définit de manière analogue les limites quand x tend vers $-\infty$ (remplacer "x suffisamment grand" par "x suffisamment petit"), et le fait que f ait pour limite $-\infty$ au lieu de $+\infty$ (remplacer "$f(x)$ arbitrairement grand" par "$f(x)$ arbitrairement petit").*

Remarque 3.3 *On peut indifféremment employer les expressions "$f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0" et "la limite de f en x_0 est l".*

Exemples. Si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^n \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad x^{1/n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad \exp(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

$$\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{x^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad x^n \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}, \quad \exp(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice. Montrer que $\cos(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

Définition 3.4 *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine D contient un intervalle de type $]a, b[$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Soit aussi $l \in \mathbb{R}$.*

- *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures (ou par la droite) si on peut garantir que $f(x)$ soit arbitrairement grand en choisissant $x \in]a, b[$ suffisamment proche de a.*
  (Plus précisément, $\forall M > 0, \exists x_1 \in]a, b[$ tel que $x \in]a, x_1[\implies f(x) \geqslant M$.)
  On note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, ou $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} +\infty$, ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$.

- *On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a par valeurs supérieures si on peut garantir que $f(x)$ soit arbitrairement proche de l en choisissant $x \in]a, b[$ suffisamment proche de a.*
  (Plus précisément, $\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in]a, b[$ tel que $x \in]a, x_1[\implies |f(x) - l| < \varepsilon$.)
  On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$, ou $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} l$, ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l$.

Remarque 3.5 *On définit de manière analogue la limite de $f(x)$ quand x tend vers b par valeurs inférieures (ou par la gauche), notée (quand elle existe) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$, et le fait que f ait pour limite $-\infty$ au lieu de $+\infty$.*

Exemples. Si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^{-n} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty, \quad x^{-n} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty, \quad \tan(x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}^+}{\longrightarrow} -\infty, \quad \tan(x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} +\infty,$$

Si $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0^+} e^x = \lim_{x \to x_0^-} e^x = e^{x_0}.$$

Considérons la fonction partie entière E, définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$E(x) = \begin{cases} \dots & \\ -1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leqslant x < 3 \\ \dots & \end{cases}$$

Alors $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} E(x) = 0, \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} E(x) = 1.$$

Définition 3.6 *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine D contient un ensemble de type $]a, b[\cup]b, c[$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Soit aussi $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*
On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers b si $\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = l$ (c'est à dire : les limites à gauche et à droite de b existent toutes les deux et valent toutes les deux l).
On note $\lim\limits_{x \to b} f(x) = l$, ou $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} l$.

Remarque 3.7 *On notera que la définition de limite donnée ici ne prend pas en compte la valeur de $f(b)$, dans le cas où f est définie en $x = b$. La limite telle qu'elle est définie ici est parfois appelée "limite épointée" et peut être notée $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \neq b}} f(x)$ pour éviter les ambiguités.*

Exemples. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$,

$$x^n \underset{x\to a}{\longrightarrow} a^n, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} \begin{cases} = +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ \text{n'existe pas si } n \text{ est impair} \end{cases}, \quad \lim_{x\to 1} E(x) \text{ n'existe pas.}$$

Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$. Alors

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

Soit g la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}^*$ par $g(x) = \cos(1/x)$. Alors g n'a pas de limite quand $x \to 0$.

3.2 Opérations sur les limites

Les tableaux ci-dessous donnent des règles (quand elles existent) permettant de trouver la limite de la somme, du produit ou du quotient de deux fonctions à partir des limites de ces deux fonctions. Ils pointent aussi les **formes indéterminées**, qui sont les cas où la seule donnée de la limite des deux fonctions ne permet pas de déterminer la limite de leur somme, de leur produit ou de leur quotient. Les conditions $x \to a$ apparaissant dans ces tableaux peuvent indifféremment être remplacées par $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, soit $l, b \in \mathbb{R}$. Connaissant la limite de f en a, le tableau suivant donne la limite de $f(x) + b$ et $bf(x)$ quand x tend vers a.

	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$
	$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+b)$	$l+b$	$+\infty$	$-\infty$
si $b > 0$	$\lim\limits_{x\to a} bf(x)$	bl	$+\infty$	$-\infty$
si $b < 0$	$\lim\limits_{x\to a} bf(x)$	bl	$-\infty$	$+\infty$

3.2.1 Limite d'une somme de fonctions.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $l, l' \in \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ est donnée par le tableau suivant:

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$		$+\infty$	?
$-\infty$			$-\infty$

La case contenant un point d'interrogation est une **forme indéterminée**. Cela ne signifie pas que la limite de $f+g$ n'existe pas, mais qu'on ne peut rien dire sur la limite éventuelle de $f+g$ en sachant seulement que la limite de f est $-\infty$ et que celle de g est $+\infty$. Pour le mettre en évidence, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -x, \quad \text{de sorte que} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

et les quatre fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_1(x) = \frac{x}{2}, \quad g_2(x) = 2x, \quad g_3(x) = x+1, \quad g_4(x) = x + \sin(x),$$

de sorte que pour $i = 1, 2, 3, 4$, on a bien

$$\lim_{x\to+\infty} g_i(x) = +\infty.$$

Alors

$$\lim_{x\to+\infty} (f+g_1)(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} (f+g_2)(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} (f+g_3)(x) = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f+g_4)(x) \text{ n'existe pas.}$$

3.2.2 Limite d'un produit de fonctions.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $l, l' \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x\to a}(fg)(x)$ est donnée par le tableau suivant:

$\lim_{x\to a} g(x)$ \ $\lim_{x\to a} f(x)$	$l > 0$	$l < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' > 0$	ll'	ll'	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' < 0$		ll'	0	$-\infty$	$+\infty$
0			0	?	?
$+\infty$				$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$					$+\infty$

Le fait qu'une fonction tende vers 0 et qu'une autre tende vers l'infini est une information insuffisante pour déterminer la limite de leur produit : les exemples suivants montrent que tout peut se produire.

Exemples.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot x^{-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x \cdot x^{-2} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} 2x \cdot x^{-1} = 2, \quad \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{\sin(x)}{x} \text{ n'existe pas.}$$

3.2.3 Limite de l'inverse d'une fonction.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $l \in \mathbb{R}^*$. Le tableau suivant donne la limite en a de $1/f$, connaissant la limite de f.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f}(x)$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	?

Les limites quand $x \to 0$ de x^4, x^3, $-x^4$ valent toutes 0. On a pourtant des résultats différents pour leurs inverses:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \text{ n'existe pas}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{-x^4} = -\infty$$

3.2.4 Limite du quotient de deux fonctions.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $l, l' \in \mathbb{R}^*$. Alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$ est donnée par le tableau suivant (comme $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, ces résultats sont des conséquences de ceux qui donnent la limite d'un produit d'une part, et la limite de l'inverse d'autre part):

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l > 0$	$l < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' > 0$	l/l'	l/l'	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' < 0$	l/l'	l/l'	0	$-\infty$	$+\infty$
$\pm\infty$	0	0	0	?	?
0^+	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

3.2.5 Lever l'indétermination dans le calcul de la limite d'une fraction.

Quand on cherche la limite d'une fraction qui est une forme indéterminée, une méthode qui marche souvent pour lever l'indétermination consiste à réécrire la quantité dont on cherche la limite en mettant en facteurs les "plus gros termes" au numérateur et au dénominateur. Par exemple, pour trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+1}{x^2+1}$, on écrit que pour tout $x > 0$,

$$\frac{x^3+x^2+1}{x^2+1} = \frac{x^3(1+1/x+1/x^3)}{x^2(1+1/x^2)} = x\frac{1+1/x+1/x^3}{1+1/x^2},$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} x\frac{1+1/x+1/x^3}{1+1/x^2} = +\infty.$$

3.2.6 Résultats de croissances comparées.

Lorsqu'une forme indéterminée résulte d'une compétition entre une fonction puissance et un logarithme, ou entre une fonction exponentielle et une fonction puissance, on peut lever l'indétermination en utilisant l'un des résultats suivants. Soit $n > 0$ (entier ou non). Alors

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^n e^x = 0.$$

Ces limites peuvent se mémoriser en se rappelant que "les puissances l'emportent sur le logarithme" et que "l'exponentielle l'emporte sur les puissances".

3.2.7 Limite de la composée de deux fonctions.

Soit $x_0, y_0, l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, et soit f et g deux fonctions.

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to y_0} g(y) = l, \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = l.$$

On a implicitement supposé que $f(x)$ est définie pour x "à proximité de x_0", c'est à dire pour x dans un intervalle du type $]x_0, a]$ ou du type $[a, x_0[$ (où $a \in \mathbb{R}$), ou dans un ensemble du type $[x_0 - \varepsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \varepsilon]$ où $\varepsilon > 0$, et que $g(y)$ est définie pour y à proximité de y_0 (pour y dans un ensemble du type $]y_0, b]$ ou $[c, y_0[$ ou $[c, y_0[\cup]y_0, b]$ auquel appartient $f(x)$ quand x est proche de x_0).

Exemples.

$$\lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y\to-\infty} \exp(y) = 0, \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(-x) = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y\to+\infty} \exp(y) = +\infty, \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(-x) = +\infty.$$

On finit ce chapitre en énonçant un résultat qui peut être utile pour déterminer certaines limites :

3.2.8 Théorème des gendarmes

Théorème 3.8 *Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, et f, g, h trois fonctions définies à proximité de a.*

- *Si pour x à proximité de a, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$ (où $l \in \mathbb{R}$), alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$.*
- *Si pour x à proximité de a, $g(x) \leqslant f(x)$ et si $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.*
- *Si pour x à proximité de a, $f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim_{x\to a} h(x) = -\infty$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.*

Exemples

(i) Pour $x \geqslant 1$, on a $-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin(x^3)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Donc le théorème des gendarmes assure que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^3)}{x} = 0.$$

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 4\sin(x) \geqslant x - 4$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-4) = +\infty$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + 4\sin(x)) = +\infty$.