Chapitre 3 : Continuité

1 Définition et premiers exemples

Définition 1.1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*

- *Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$*
- *On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.*

Exemples.

- Les fonctions $x \mapsto x^n$, $x \mapsto x^{-n}$, $x \mapsto x^{1/n}$, exp, ln, cos, sin, tan sont toutes continues sur leurs ensembles de définition respectifs.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction

$$f_a : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

  est continue en $x = 0$ si et seulement si $a = 1$. En effet, on a vu que $\lim\limits_{x \to 0,\, x \neq 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, et cette limite coïncide avec $f_a(0) = a$ seulement dans le cas où $a = 1$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction

$$g_a : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

  n'est continue en 0 pour aucune valeur de a. En effet, $\lim\limits_{x \to 0,\, x \neq 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.
- La fonction partie entière $E(x) = \begin{cases} \dots \\ -1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leqslant x < 3 \\ \dots \end{cases}$ n'est pas continue en $x = 0$, ni en $x = 1$, $x = 2$,...,$x = -1$, $x = -2$, ... Par contre, elle est continue sur les intervalles ..., $]-2, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$, $]1, 2[$, ...

Proposition 1.2 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $x_0 \in I$.*

- *si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur I (resp. en x_0), alors $f + g$ et fg sont continues sur I (resp. en x_0).*

- *si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur I (resp. en x_0) et si pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$ (resp. $g(x_0) \neq 0$), alors f/g est continue sur I (resp. en x_0).*
- *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un autre intervalle. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I, si $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur J et si $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.*

Exemples.

(i) On considère les fonctions

$$f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^2+1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \ln(x) \end{array} \right.$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, $g = \ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$, donc

$$g \circ f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} & \\ x & \longrightarrow & \ln(x^2+1) \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues.

(ii) Etudions maintenant la continuité de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1) & \text{si } x \leqslant -1 \\ xe^x & \text{si } -1 < x < 0 \\ \sin(x) + e^x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Sur $]-\infty, -1[$, h coïncide avec $g \circ f$ dont on a vu qu'elle était continue sur $\mathbb{R}$. Donc h est continue sur l'intervalle $]-\infty, -1[$.
Sur $]-1, 0[$, h coïncide avec la fonction $x \longrightarrow xe^x$, qui est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues. Donc h est continue sur $]-1, 0[$.
Sur $]0, +\infty[$, h coïncide avec la fonction $x \longrightarrow \sin(x) + e^x - 1$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues. Donc h est continue sur $]0, +\infty[$.
En $x = -1$, on observe que

$$\lim_{x \to -1, x < -1} h(x) = \lim_{x \to -1} \ln(x^2+1) = \ln((-1)^2+1) = \ln(2)$$

(grâce à la continuité de $g \circ f$ en -1), et que

$$\lim_{x \to -1, x > -1} h(x) = \lim_{x \to -1} xe^x = -e^{-1}$$

(car $x \mapsto xe^x$ est continue en -1). Ces deux limites sont différentes (la première est positive, l'autre est négative), donc h n'est pas continue en $x = -1$.
En $x = 0$, on a

$$\lim_{x \to 0, x < 0} h(x) = \lim_{x \to 0} xe^x = 0$$

(par continuité de $x \mapsto xe^x$ en $x = 0$),

$$\lim_{x\to 0, x>0} h(x) = \lim_{x\to 0} \sin(x) + e^x - 1 = \sin(0) + e^0 - 1 = 0$$

(par continuité de $x \mapsto \sin(x) + e^x - 1$ en $x = 0$) et

$$h(0) = 0.$$

Donc h est continue en $x = 0$.
Au total, on a montré que h est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ et n'est pas continue en $x = -1$.

Remarque 1.3 *Dans l'exemple (ii), ça n'est pas parce que h coïncide avec $g \circ f$ sur $]-\infty, -1]$ et que $g \circ f$ est continue sur cet intervalle (et même sur $\mathbb{R}$) qu'on peut en déduire que h est continue sur $]-\infty, -1]$. L'argument marche sur $]-\infty, -1[$, mais pas sur $]-\infty, -1]$. En effet, la continuité de h en $x = -1$ dépend de ce qui se passe à gauche* **et à droite** *de $x = -1$.*

2 Image d'un intervalle par une fonction et Théorème des Valeurs Intermédiaires

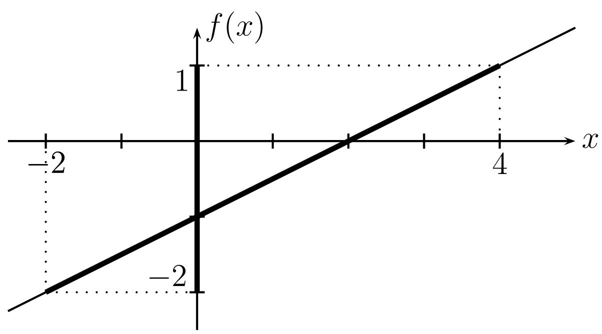
Définition 2.1 *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$, et soit $I \subset D$ un sous-ensemble de D (ici, I sera presque toujours un intervalle). On appelle* ***image de I par f****, et on note $f(I)$ l'ensemble*

$$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}.$$

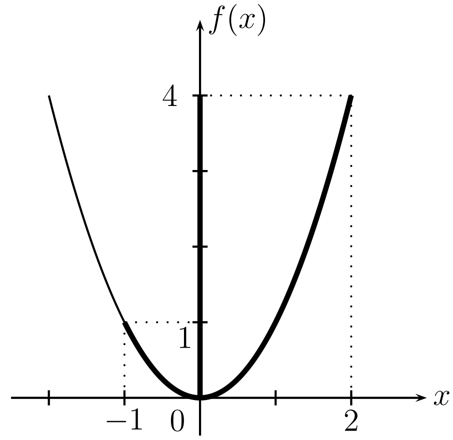
Remarque 2.2 *C'est la même définition que pour l'image de f (d'ailleurs notée $f(D)$), sauf qu'ici, I peut être plus petit que D.*

Exemples

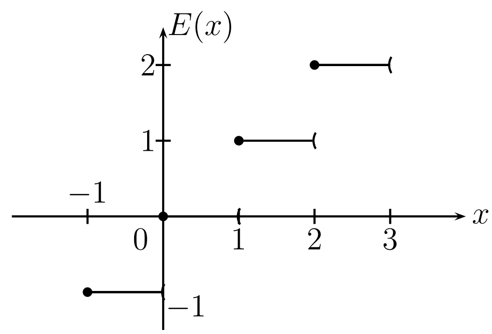
(i) pour $f(x) = x/2 - 1$ et $I = [-2, 4]$, $f(I) = [f(-2), f(4)] = [-2, 1]$.



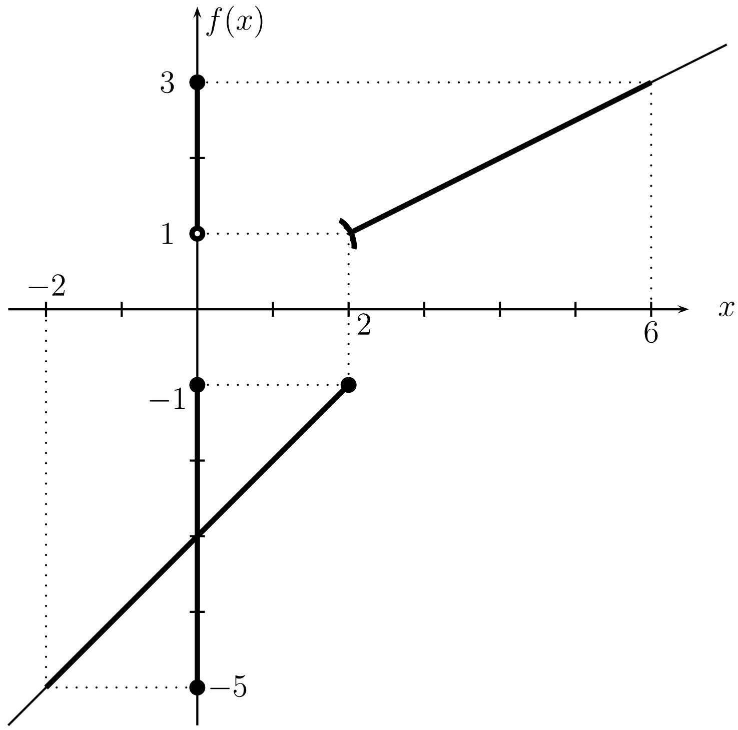
(ii) pour $f(x) = x^2$ et $I =]-1, 2[$, $f(I) = [f(0), f(2)[= [0, 4[$.



(iii) pour la fonction partie entière E définie plus haut et pour $I =]-1, 2[$, $E(I) = \{-1, 0, 1\}$, et pour $J =]-1, 2]$, $E(J) = \{-1, 0, 1, 2\}$



(iv) pour $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ x/2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ et $I = [-2, 6]$, $f(I) = [-5, -1] \cup]1, 3]$.



Théorème 2.3 *Soit I et J deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur $I \cup J$.*

- $f(I \cup J) = f(I) \cup f(J)$
- $f(I \cap J) \subset f(I) \cap f(J)$

Remarque 2.4 *L'inclusion $f(I \cap J) \subset f(I) \cap f(J)$ peut être stricte, comme le montre l'exemple suivant : Pour $I = [-2, 1]$, $J = [-1, 2]$ et $f(x) = x^2$, on a $f(I \cap J) = f([-1, 1]) = [0, 1]$, alors que $f(I) \cap f(J) = [0, 4] \cap [0, 4] = [0, 4]$.*

Théorème 2.5 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Remarque 2.6 *Si de plus on connaît la monotonie de f sur I, on peut en déduire plus précisément quel est l'intervalle $f(I)$. Par exemple, si $a < b$ et*

- *si f est continue et strictement croissante sur $I = [a, b]$, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$,*
- *si f est continue et strictement croissante sur $I =]a, b]$, alors $f(I) =]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), f(b)]$,*
- *si f est continue et strictement décroissante sur $I = [a, b]$, alors $f(I) = [f(b), f(a)]$,*
- *si f est continue et strictement décroissante sur $I =]a, b]$, alors $f(I) = [f(b), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)[$.*

Le théorème 2.5 a pour conséquence le Théorème des Valeurs Intermédiaires, qui suit.

Théorème 2.7 *Soit $a < b$ deux réels, Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Soit γ un nombre réel "entre $f(a)$ et $f(b)$" (c'est à dire tel que $f(a) < \gamma < f(b)$ ou $f(a) > \gamma > f(b)$, suivant que $f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$). Alors il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \gamma$. Autrement dit, γ admet un antécédent par f sur $]a, b[$.*

Remarque 2.8 *Le théorème dit qu'il y a au moins une valeur de $c \in]a, b[$ telle que $f(c) = \gamma$, mais il peut y en avoir plus d'une.*

Exemple et contre-exemple.

(i) Considérons la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$. f est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$. Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction f, sur trois intervalles différents :

- $f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$ et $0 \in]-1, 3[$, donc l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $]-2, -1[$.

- $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ et $0 \in]-1, 1[$, donc l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $]0, 1[$.

- $f(1) = -1$, $f(2) = 3$ et $0 \in]-1, 3[$, donc l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $]1, 2[$.

On peut donc trouver trois solutions distinctes $x_1 \in]-2, -1[$, $x_2 \in]0, 1[$ et $x_3 \in]1, 2[$ à l'équation $f(x) = 0$. Comme $f(x)$ est un polynôme de degré 3, il n'y en a pas d'autre. Si on souhaite localiser plus précisément une de ces racines, on peut itérer le processus. Par exemple, comme $f(1/2) = -3/8 < 0$, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à f sur l'intervalle $]0, 1/2[$, on en déduit que x_2, dont on savait déjà qu'il appartenait à $]0, 1[$, appartient en fait à $]0, 1/2[$. Pour savoir si $x_2 \in]0, 1/4[$ ou bien si $x_2 \in]1/4, 1/2[$, on peut étudier le signe de $f(1/4)$ etc... Ce procédé s'appelle la méthode de dichotomie.

(ii) Considérons la fonction partie entière. On a $E(0) = 0$, $E(1) = 1$ et $1/2 \in]0, 1[$, mais l'équation $E(x) = 1/2$ n'a pas de solution dans $]0, 1[$. Ceci n'est pas une contradiction avec le théorème des valeurs intermédiaires, car E n'est pas continue sur $[0, 1]$ (elle est continue sur $]0, 1[$, mais pas en $x = 1$ ni en $x = 0$).

3 Théorème de la bijection réciproque

Théorème 3.1 *Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone sur I (c'est à dire strictement croissante ou strictement décroissante). Alors f est bijective de I sur $f(I)$.*

On applique souvent ce résultat pour des fonctions dont on sait en plus qu'elles sont continues sur I. Alors le Théorème 2.5 assure que $f(I)$ est un intervalle qui peut être déterminé comme expliqué dans la Remarque 2.6. Ce résultat est appelé Théorème de la bijection réciproque:

Théorème 3.2 *Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue sur I. Alors f est bijective de I sur l'intervalle $f(I)$.*
Suivant que f est strictement croissante ou décroissante sur I et suivant les bornes de l'intervalle I, $f(I)$ peut être déterminé comme expliqué à la Remarque 2.6.

Exemple. Soit

$$f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^*_- =]-\infty, 0[$ d'une part, et sur $\mathbb{R}^*_+ =]0, +\infty[$ d'autre part (car c'est la somme de deux fonctions qui le sont). Comme

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} +\infty,$$

on en déduit que $f(\mathbb{R}^*_-) = \mathbb{R}$ et le théorème de la bijection réciproque assure que $f_{|\mathbb{R}^*_-}$ est bijective de $\mathbb{R}^*_-$ sur $\mathbb{R}$.
De même, $f_{|\mathbb{R}^*_+}$ est bijective de $\mathbb{R}^*_+$ sur $\mathbb{R}$.
Par contre, f n'est pas bijective de $\mathbb{R}^*$ sur $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}$. Ça ne contredit pas le théorème, car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle et f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$.

4 Théorème des extrema

Définition 4.1 *Si $A \subset \mathbb{R}$, on appelle*

- ***majorant*** *de A tout réel M tel que $\forall x \in A, \quad x \leqslant M$ (s'il en existe)*
- ***minorant*** *de A tout réel M tel que $\forall x \in A, \quad x \geqslant M$ (s'il en existe)*
- ***borne supérieure*** *de A le plus petit des majorants de A. On la note $\sup A$. Si A n'a pas de majorant, on note $\sup A = +\infty$.*
- ***borne inférieure*** *de A le plus grand des minorants de A. On la note $\inf A$. Si A n'a pas de minorant, on note $\inf A = -\infty$.*
- *si $\sup A \in A$, on dit que $\sup A$ est le **maximum** de A, et on note $\max A = \sup A$*
- *si $\inf A \in A$, on dit que $\inf A$ est le **minimum** de A, et on note $\min A = \inf A$*

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un intervalle I et $A = f(I)$, ces quantités sont aussi appellées majorant/minorant/borne supérieure/borne inférieure/maximum/minimum de f sur I.

Exemple. Soit $A = [0,1[$. Alors $\inf A = \min A = 0$, $\sup A = 1$, mais A n'a pas de maximum.

Théorème 4.2 *Soit $a < b$ deux réels, et soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint son maximum et son minimum sur $[a,b]$, c'est à dire : il existe $c, d \in [a,b]$ tels que pour tout $x \in [a,b]$,*

$$f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d).$$

Exemple et contre-exemples.

- $f(x) = \exp(\cos x + \frac{1}{x^2+1} - \ln(x^4+2))$ est continue sur $[0,1]$ comme somme et composée de fonctions continues. Donc on peut appliquer le théorème des extrema à f sur $[0,1]$.

- Considérons $g : \begin{pmatrix}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \exp(-1/x) \end{pmatrix}$

  Alors g est continue sur $]0,1]$ comme composée de fonctions continues, strictement croissante sur $]0,1]$, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ et $g(1) = e^{-1}$. Donc $g(]0,1]) =]0, e^{-1}]$, et g n'atteint pas son minimum sur $]0,1]$. Ça ne contredit pas le théorème car l'intervalle $]0,1]$ n'est pas fermé.

- Considérons $h : \begin{pmatrix} [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 0 & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases} \end{pmatrix}$

  $h([0,2]) = [0,1[$, donc la fonction h n'atteint pas de maximum sur l'intervalle $[0,2]$. Ça ne contredit pas le théorème car h n'est pas continue en $x = 1$.