Chapitre 4 : Dérivation, étude des variations

1 Dérivabilité

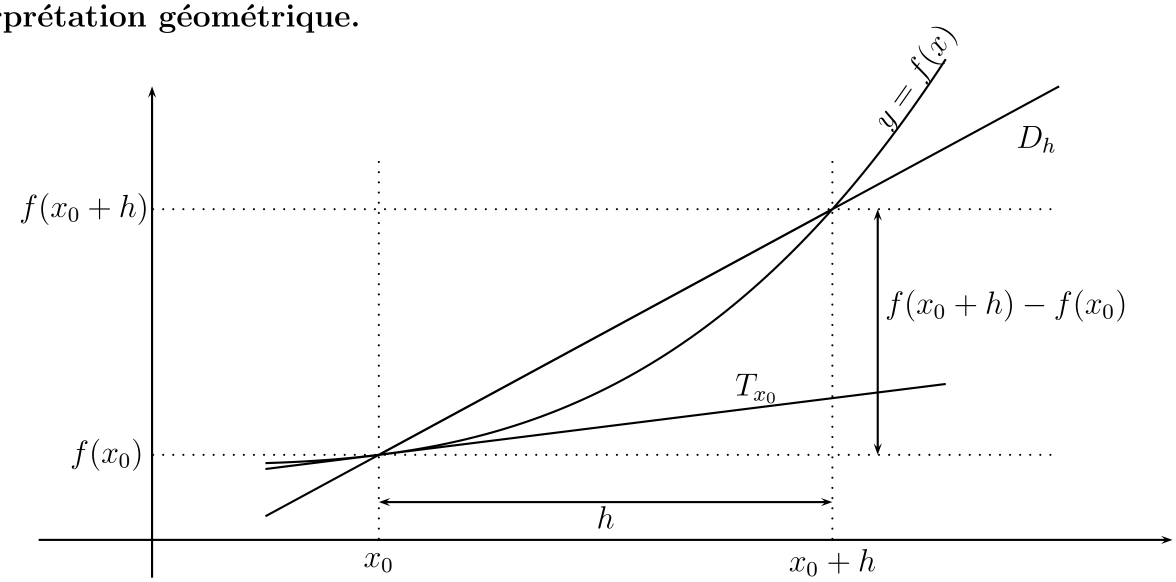
Définition 1.1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est* ***dérivable*** *en x_0 si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe et est un nombre fini. Dans ce cas, ce nombre est appelé ***dérivée de f en x_0*** *et est noté $f'(x_0)$.*
Si f est dérivable en tout $x \in I$, on dit que f est dérivable sur I, et la fonction $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée ***fonction dérivée de f***. *La fonction f' est aussi notée $\frac{df}{dx}$.*

Remarque 1.2 *En posant $x = x_0 + h$, on constate que la limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe si et seulement si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe. Dans ce cas, ces deux limites sont égales.*

Interprétation géométrique.



$f'(x_0)$ est la limite quand $h \to 0$ du taux d'accroissement $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. A $h \neq 0$ fixé, ce taux d'accroissement est la pente (ou coefficient directeur) de la droite D_h passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Or quand $h \to 0$, la droite D_h "tend" vers la tangente T_{x_0} au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. On peut donc interpréter $f'(x_0)$ comme la pente de cette tangente T_{x_0}.

Remarque 1.3

- *Pour que* $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *soit finie, on doit avoir* $\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0))=0$*, c'est à dire que* f *doit être continue en* x_0 *:*
Si f *est dérivable en* x_0*, alors* f *est continue en* x_0*.*

- *L'inverse est faux, comme le montre l'exemple de la fonction valeur absolue en* $x=0$ *: on a*
$$\lim_{h\to 0, h>0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0, h>0}\frac{h}{h}=1$$
et
$$\lim_{h\to 0, h<0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0, h<0}\frac{-h}{h}=-1.$$
Les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement en 0 de la fonction valeur absolue étant différentes, la valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Par contre, elle est bien continue en 0. Sur le graphe de la fonction, celà se traduit par le fait qu'il peut se tracer "sans lever le crayon" en $x=0$ *(continuité), mais qu'il y a une "rupture de pente", qui passe brutalement de* -1 *à* 1 *en* $x=0$*.*

2 Fonction dérivée

2.1 Dérivées de fonctions usuelles

Parmi les fonctions classiques, si $n\in\mathbb{Z}$, les fonctions $x\mapsto x^n$, $x\mapsto x^{-n}$, exp, ln, cos, sin, tan sont toutes dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs. Par contre, pour $n\geqslant 2$, $x\mapsto x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ mais pas en $x=0$ (en $x=0$, la tangente au graphe de la fonction $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ est verticale, c'est à dire que sa pente est infinie). Le tableau suivant donne les formules qui donnent les dérivées de ces fonctions. (le paramètre α est un réel quelconque)

$f(x)$	x^α	$\ln(x)$	$\exp(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$
$f'(x)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\frac{1}{x}$	$\exp(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

Pour $\alpha=0,2,1/2,-1$, la première colonne du tableau donne par exemples les dérivées suivantes :

α	0	2	1/2	-1
$f(x)$	1	x^2	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$
$f'(x)$	0	$2x$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$

2.2 Opérations sur les dérivées.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$ une constante. Alors

- $(ku)' = ku'$ sur I
- $(u+v)' = u' + v'$ sur I
- $(uv)' = u'v + uv'$ sur I
- $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ sur $I \backslash \{x \mid u(x) = 0\}$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ sur $I \backslash \{x \mid v(x) = 0\}$

2.3 Dérivée d'une composée.

Soit I et J deux intervalles, f une fonction dérivable sur I, g une fonction dérivable sur J. On suppose que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)).$$

Autrement dit,

$$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f).$$

Exemples.

- si $h(x) = \cos(x^3 + x)$, alors $h(x) = (g \circ f)(x)$ avec $f(x) = x^3 + x$ et $g(y) = \cos(y)$. Donc $h'(x) = -(3x^2 + 1)\sin(x^3 + x)$.
- si $h(x) = a^x$, alors $h(x) = \exp(x \ln(a)) = (g \circ f)(x)$ avec $f(x) = x \ln a$ et $g(y) = e^y$. Donc $h'(x) = (\ln a) \cdot \exp(x \ln a) = \ln a(a^x)$.

2.4 Application : dérivée d'une bijection réciproque.

Théorème 2.1 *Soit I un intervalle, et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, bijective de I sur l'intervalle $J = f(I)$. Soit $x \in I$ tel que $f'(x) \neq 0$. Alors $f^{-1} : J \mapsto I$ est dérivable en $y = f(x)$, et*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Démonstration de la formule. Comme f et f^{-1} sont bijections réciproques l'une de l'autre, pour tout $y \in J$, on a

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y.$$

En dérivant, on obtient

$$\left(f^{-1}\right)'(y) \cdot f'\left(f^{-1}(y)\right) = 1.$$

Exemples.

- Retrouvons d'abord que $\exp' = \exp$. ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et bijective de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln'(x) = 1/x \neq 0$. Donc la bijection réciproque de ln, qui est la fonction exponentielle, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$\exp'(y) = \frac{1}{1/\exp(y)} = \exp(y).$$

- On a vu que la restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$ était bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, et on a défini sa bijection réciproque arccos. Si $x \in [0, \pi]$, $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$ dès que $x \in]0, \pi[$, c'est à dire $\cos x \in]-1, 1[$. Donc arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour tout $y \in]-1, 1[$,
$$\arccos'(y) = \frac{1}{-\sin(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 \arccos y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$
où on a utilisé la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, qui, pour $x \in]0, \pi[$ (et donc $\sin x > 0$) donne $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$.

- De même, la restriction de la fonction sinus à $[-\pi/2, \pi/2]$ est bijective de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$, et on a défini sa bijection réciproque arcsin. Si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$ dès que $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, c'est à dire $\sin x \in]-1, 1[$. Donc arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour tout $y \in]-1, 1[$,
$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

- Enfin, la restriction de la fonction tangente à $]-\pi/2, \pi/2[$ est bijective de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$, et sa bijection réciproque est arctan. Pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$, donc arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

3 Dérivées et variations d'une fonction

La dérivée d'une fonction en un point donne sa vitesse de variation en ce point. En particulier, le signe de la dérivée nous informe sur la croissance ou la décroissance de la fonction au voisinage de ce point. Le tableau suivant décrit plus précisément ce que l'on peut déduire quant aux variations d'une fonction à partir d'informations sur sa dérivée.

Dans la suite, $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non réduit à un point et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I.

Hypothèse	Conclusion
$f' \geqslant 0$ sur I (c'est à dire : $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$)	f est croissante sur I
$f' > 0$ sur I	f est strictement croissante sur I
$f' \leqslant 0$ sur I	f est décroissante sur I
$f' < 0$ sur I	f est strictement décroissante sur I
$f' = 0$ sur I (c'est à dire : $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$)	f est constante sur I

Définition 3.1
Si $x_0 \in I$, on dit que f atteint un ***maximum local*** *en x_0 si il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 dans I (c'est à dire un intervalle du type $\mathcal{V} =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset I$ pour un certain $\varepsilon > 0$) tel que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.*
De même, on dit que f atteint un ***minimum local*** *en x_0 si il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 dans I tel que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.*
On dit que f atteint un ***extremum local*** *en x_0 si f y atteint un maximum ou un minimum local.*

Remarque 3.2 *Si f atteint un extremum local en x_0, il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset I$. x_0 ne peut donc pas être une des bornes de l'intervalle I.*

Le résultat suivant montre que si une fonction est dérivable, pour trouver les valeurs de x où elle admet éventuellement un extremum, on peut commencer par chercher les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$.

Théorème 3.3 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde $f'(x_0) \neq 0$. Par exemple, supposons $f'(x_0) > 0$ (la preuve est analogue dans l'autre cas). Alors comme $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$, pour $|h| > 0$ assez petit, on a

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant \frac{f'(x_0)}{2} > 0.$$

Si $h > 0$ est assez petit, on a donc

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geqslant \frac{f'(x_0)}{2} h > 0.$$

Il y a donc des valeurs de $x = x_0 + h$ arbitrairement proches de x_0 pour lesquelles $f(x) > f(x_0)$, et donc f n'atteint pas de maximum local en x_0. De même, si $h < 0$ et $|h|$ est assez petit,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant \frac{f'(x_0)}{2} h < 0,$$

et il y a donc aussi des valeurs de x arbitrairement proches de x_0 pour lesquelles $f(x) < f(x_0)$, et donc f n'atteint pas de minimum local en x_0. $\square$

La réciproque du théorème est fausse : si on considère la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$, et donc $f'(0) = 0$. Pourtant f n'atteint pas d'extremum en $x = 0$ (puisque $f(x) < 0 = f(0)$ pour $x < 0$ et $f(x) > 0 = f(0)$ pour $x > 0$).

Pour pouvoir conclure que f a un extremum local en x_0, on doit supposer non seulement que $f'(x_0) = 0$, mais aussi que $f'(x)$ change de signe en $x = x_0$, c'est à dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f'(x) \leqslant 0 \text{ pour } x \in [x_0 - \varepsilon, x_0] \text{ et } f'(x) \geqslant 0 \text{ pour } x \in [x_0, x_0 + \varepsilon] \text{ (minimum local)}$$

ou bien tel que

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ pour } x \in [x_0 - \varepsilon, x_0] \text{ et } f'(x) \leqslant 0 \text{ pour } x \in [x_0, x_0 + \varepsilon] \text{ (maximum local).}$$

Théorème 3.4 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$. Si $f'(x_0) = 0$ et si $f'(x)$ change de signe en $x = x_0$, alors f atteint un extremum local en $x = x_0$.*

Démonstration. Comme $f'(x)$ change de signe en $x = x_0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que
(i) $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0]$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$
ou bien tel que
(ii) $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0]$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$.
Supposons par exemple que l'on soit dans le cas (i). Alors f est décroissante sur $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ et croissante sur $[x_0, x_0 + \varepsilon]$. Donc pour tout $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, $f(x) \geqslant f(x_0)$, et donc f atteint un minimum local en x_0. Dans le cas (ii), on montre de la même façon que f atteint un maximum local en x_0. $\square$

Exemple. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(x^3 + x).$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -(3x^2 + 1)\sin(x^3 + x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ et $x^3 + x = x(x^2 + 1)$ a le même signe que x. De plus, $x^3 + x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $x \in [0, \varepsilon]$, alors $x^3 + x \in [0, \pi/2]$, d'où $\sin(x^3 + x) \geqslant 0$, et donc $f'(x) \leqslant 0$. De même, si $x \in [-\varepsilon, 0]$, $f'(x) \geqslant 0$. Donc f est croissante sur $[-\varepsilon, 0]$, décroissante sur $[0, \varepsilon]$, elle atteint donc un maximum local en $x = 0$.

Tableau de variations d'une fonction. Etudier les variations d'une fonction f, c'est

- déterminer sur quels intervalles cette fonction est croissante ou décroissante (souvent en étudiant le signe de sa dérivée).
- donner les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ atteint un extremum local, et donner la valeur de cet extremum.
- donner les limites de $f(x)$ aux bords de son domaine de définition.

Ces informations permettent de tracer l'allure du graphe de f. On se contentera ici d'illustrer avec un exemple comment on dresse le tableau des variations d'une fonction.

Exemple. On considère la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13.$$

f est un fonction polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1).$$

Cette écriture factorisée de $f'(x)$ permet d'en étudier le signe:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

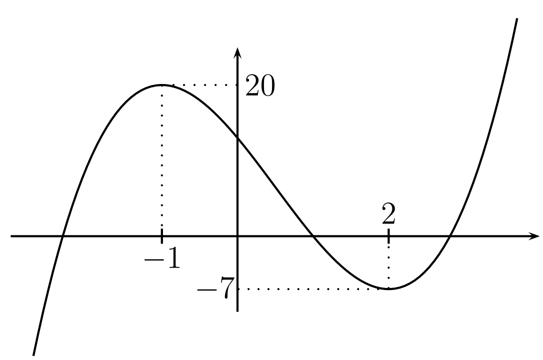
De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

(pour lever l'indétermination, on peut écrire, pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3(2 - \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{13}{x^3})$) Du tableau des signes de $f'(x)$ on déduit le tableau de variations de $f(x)$:

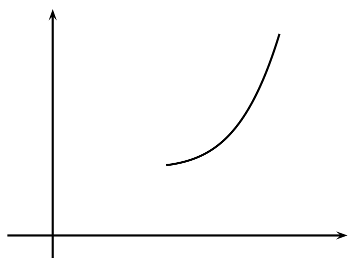
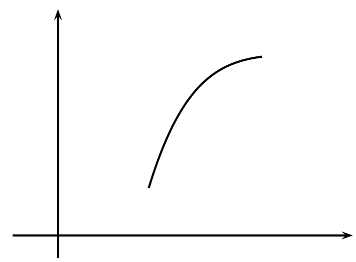
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$f(-1) = 20$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-7		

En particulier, f atteint un maximum local en $x = -1$, ce maximum vaut $f(-1) = 20$, et f atteint un minimum local en $x = 2$, ce minimum vaut $f(2) = -7$. On en déduit l'allure du graphe de f :

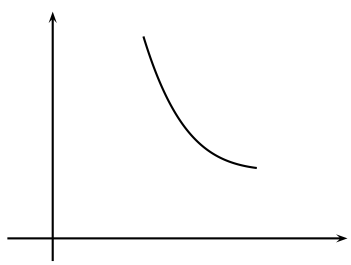
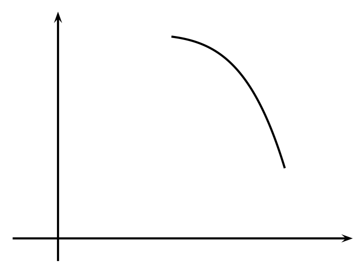


4 Convexité et concavité

Pour tracer plus précisément l'allure du graphe d'une fonction, il peut être intéressant d'avoir plus d'informations que ses seules variations (c'est à dire le fait qu'elle est croissante ou décroissante). Par exemple, une fonction croissante peut croître

comme ça  ou bien comme ça 

et une fonction décroissante peut décroître

comme ça  ou bien comme ça 

Pour les deux graphes de gauche, on dit que la fonction est convexe. Pour les deux graphes de droite, on dit qu'elle est concave.

Définition 4.1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction.*

- *on dit que f est* ***convexe*** *si pour tous points A, B du graphe de f, le segment $[AB]$ (on parle aussi de la corde $[AB]$) se situe au dessus du graphe de f.*

- *on dit que f est* ***concave*** *si pour tous points A, B du graphe de f, le segment $[AB]$ (on parle aussi de la corde $[AB]$) se situe au dessous du graphe de f.*

Théorème 4.2 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose que f' est aussi dérivable sur I. Alors*

- *si $f'' \geqslant 0$ sur I, f est convexe*

- *si $f'' \leqslant 0$ sur I, f est concave*

Ce dernier théorème peut se comprendre de la manière suivante : le fait que $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$ implique que f' est croissante, c'est à dire que la pente de la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(x, f(x))$ augmente avec x, c'est à dire que f est convexe. L'autre assertion se justifie de manière analogue.

Définition 4.3 *On appelle **point d'inflexion de f** un point où le graphe de f passe de convexe à concave ou l'inverse.*

Pour trouver les éventuels points d'inflexions d'une fonction, on sera souvent amené à étudier le signe de f'', et notamment à chercher les valeurs de x pour lesquelles $f''(x)$ s'annule.

Théorème 4.4 *Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, si f et f' sont dérivables sur I, si $x_0 \in I$ est un point d'inflexion de f, alors $f''(x_0) = 0$.*

Remarque 4.5 *La réciproque est fausse. Prenons par exemple la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, et donc $f''(0) = 0$. Mais comme pour tout x, on a $f''(x) \geqslant 0$, f est convexe sur $\mathbb{R}$ et son graphe n'a donc pas de point d'inflexion en $x = 0$.*

Exemple. Reprenons la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$. On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$, et donc $f''(x) = 12x - 6$. Le tableau des signes de f'' est donc

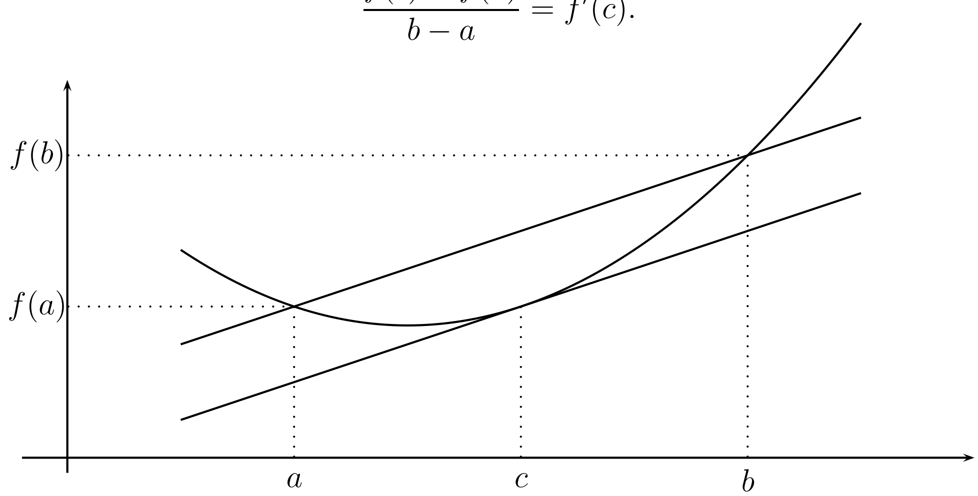
x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

f est donc concave sur $]-\infty, 1/2]$, convexe sur $[1/2, +\infty[$ et admet un point d'inflexion en $x = 1/2$.

5 Accroissements finis

Théorème 5.1 *Soit $a < b$ deux réels, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Remarque 5.2

- *Il peut y avoir plusieurs valeurs de c qui conviennent, le théorème dit qu'il y en a au moins une.*
- *L'hypothèse de dérivabilité sur $]a,b[$ est indispensable, comme le montre l'exemple suivant : prenons $a=-1$, $b=1$, et $f(x)=|x|$. Alors f est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$,*

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

et $f(b)-f(a) = |1|-|-1| = 0$. Donc il n'existe aucun $c \in]-1,1[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Ça ne contredit pas le théorème, car f n'est pas dérivable en $x=0$.

Exemple. On note $d(t)$ la distance parcourue au temps t (exprimé en heures) par un véhicule qui roule sur une autoroute. On suppose que $d(0)=0$ et $d(1)=140km$. On peut en conclure qu'il existe un instant $c \in]0,1[$ où la vitesse $d'(c)$ du véhicule a été égale à $140km/h$.

6 Fonctions de classe C^k

Définition 6.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.*
Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe C^k si f est k fois dérivable sur I et si sa dérivée $k^{\text{ème}}$ est continue sur I.
Si f est de classe C^k sur I pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe C^∞, ou qu'elle est indéfiniment dérivable sur I.

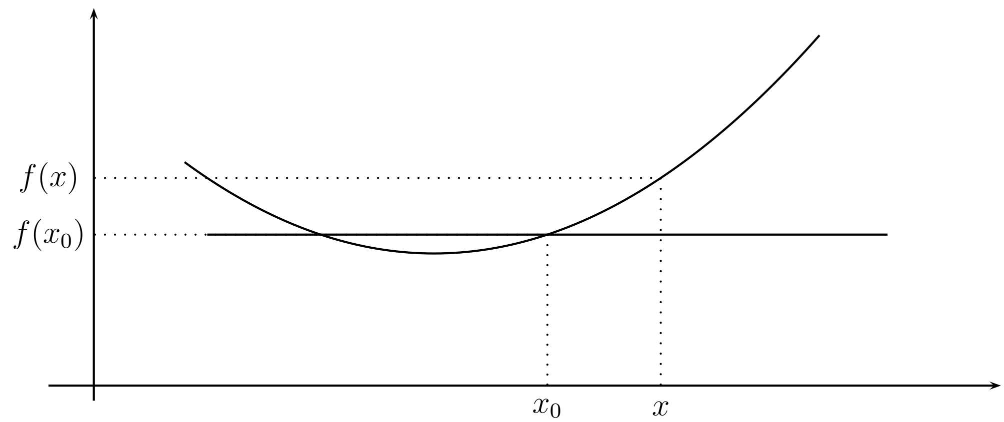
Exemples.
1. Les fonctions polynomiales, inverse, cos, sin, tan, ln, exp sont de classe C^∞ sur leurs domaines de définition respectifs.
2. Pour $k=0$, dire qu'une fonction est de classe C^0 sur un intervalle revient à dire qu'elle est continue sur cet intervalle.
3. Si $k \in \mathbb{N}$, toute fonction de classe C^{k+1} sur I est aussi de classe C^k. La réciproque est fausse (par exemple, pour $k=0$, on connait des fonctions, comme la valeur absolue, qui sont continues sur $\mathbb{R}$ sans être dérivables sur $\mathbb{R}$. On peut aussi construire des fonctions qui sont continues, dérivables, mais pas de classe C^1 : étudier par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0)=0$ et $f(x)=x^2\sin(1/x)$ si $x \neq 0$).

7 Dérivation et comportement local d'une fonction

Dans toute la suite, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$.

Si f est continue sur I, on sait que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$. En particulier, quand x est "proche" (on ne cherchera pas ici à préciser ce que celà signifie) de x_0, on peut approcher $f(x)$ par la constante $f(x_0)$:

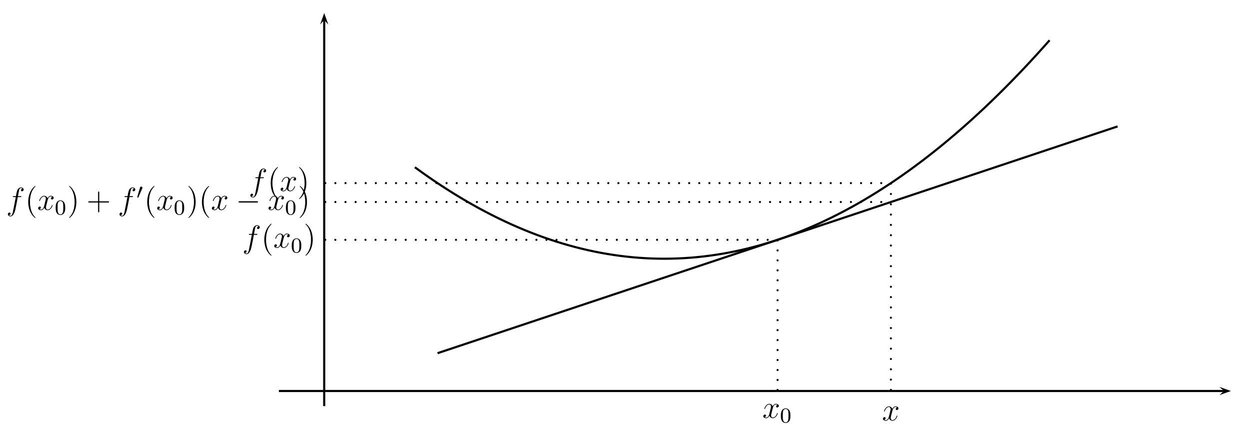
$$f(x) \underset{x \to x_0}{\approx} f(x_0).$$



Si f est dérivable sur I, on peut être plus précis , en approchant $f(x)$ non par une simple constante, mais par un polynôme de degré 1 :

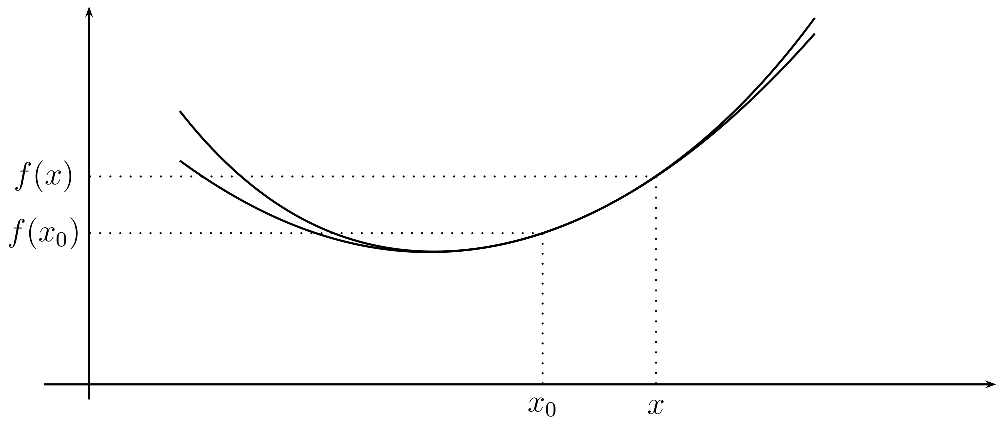
$$f(x) \underset{x \to x_0}{\approx} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(plus précisément, le membre de droite est un polynôme de degré 1 si $f'(x_0) \neq 0$, et est constant sinon).



Si f est deux fois dérivable sur l'intervalle I, on peut être encore plus précis, en approchant $f(x)$ pour x proche de x_0 par un polynôme de degré 2 :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\approx} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$



La différence entre $f(x)$ et $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$
ne se voit plus sur le dessin si x est trop proche de x_0.

Et ainsi de suite... La formule de Taylor-Young généralise et précise ces affirmations.

Théorème 7.1 *Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur un intervalle ouvert I, où $n \geqslant 0$ est un entier. Soit $x_0 \in I$. Alors il existe une fonction $\varepsilon : I \mapsto \mathbb{R}$, telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$, et*

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x).$$

Remarque. Quand x est proche de x_0, $(x-x_0)^k$ est d'autant plus petit que k est grand.

Exemples.

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x),$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x),$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x),$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x),$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x).$$

Application à des calculs de limites.
1. Calcul de $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{\exp(\mathbf{x})-\mathbf{x}-\cos(\mathbf{x})}{\mathbf{x^2+x^4}}$.
Pour $x \neq 0$, et en introduisant deux fonction ε_1 et ε_2 (dont on sait, grâce à la formule de

Taylor-Young à l'ordre 2 pour les fonctions exponentielle et cosinus, qu'elles tendent vers 0 quand x tend vers 0), on calcule :

$$\begin{aligned}\frac{\exp(x) - x - \cos(x)}{x^2 + x^4} &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) - x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)\right)}{x^2(1 + x^2)} \\ &= \frac{x^2 + x^2(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}{x^2(1 + x^2)} = \frac{1 + \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)}{1 + x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.\end{aligned}$$

2. Calcul de $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\ln(\mathbf{1}+\mathbf{2x^2})}{\cos(\mathbf{3x})-\mathbf{1}}$.
De la même manière que dans l'exemple précédent, en introduisant deux fonctions ε_1 et ε_2 qui tendent vers 0 quand $x \to 0$, on a :

$$\frac{\ln(1 + 2x^2)}{\cos(3x) - 1} = \frac{(2x^2) + (2x^2)\varepsilon_1(x)}{1 - \frac{(3x)^2}{2} + (3x)^2\varepsilon_2(x) - 1} = \frac{2x^2(1 + \varepsilon_1(x))}{-\frac{9}{2}x^2(1 + 2\varepsilon_2(x))} = -\frac{4}{9}\frac{1 + \varepsilon_1(x)}{1 - 2\varepsilon_2(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{4}{9}.$$

3. Calcul de $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{e^x}-\mathbf{1}-\mathbf{x}}{\mathbf{x^4}}$.
De la même façon, il existe une fonction ε telle que $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$ et

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^4} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) - 1 - x}{x^4} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon(x)\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

4. Calcul de $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{2}} \frac{\ln(\mathbf{x}-\mathbf{1})}{\mathbf{x}-\mathbf{2}}$.
On a vu qu'il existe une fonction ε telle que $\varepsilon(u) \to 0$ quand $u \to 0$ et, pour $u > -1$ et $u \neq 0$,

$$\ln(1 + u) = u + u\varepsilon(u).$$

Alors

$$\frac{\ln(x - 1)}{x - 2} = \frac{\ln(1 + (x - 2))}{x - 2} = \frac{(x - 2) + (x - 2)\varepsilon(x - 2)}{x - 2} = 1 + \varepsilon(x - 2) \underset{x\to 2}{\longrightarrow} 1.$$