Chapitre 5 : Intégration

1 Primitives

Définition 1.1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que F est une* ***primitive*** *de f si F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.*

Exemple. La fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \frac{x^7}{7} + e^{5x} + 2\ln(x) - 8$ est une primitive de $f(x) = x^6 + 5e^{5x} + \frac{2}{x}$.

Remarque 1.2 *Si F est une primitive de f et $C \in \mathbb{R}$ est une constante, alors $F + C$ est une autre primitive de f. En effet,*

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}C = F'(x) = f(x).$$

En fait, toutes les primitives de f sont de ce type :

Proposition 1.3 *Soit I un intervalle, et $f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sont de la forme $G(x) = F(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.*

Remarque 1.4 *L'hypothèse que I est un intervalle est importante : si f est définie sur une réunion d'intervalles disjoints, on obtient d'autres primitives de f en rajoutant à F des constantes différentes sur chacun de ces intervalles. Par exemple, pour tout couple de constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par*

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F'(x) = \frac{1}{x}.$$

Notation. On note $\int f(x)dx = F(x) + C$, où

$$\underbrace{\int}_{\text{signe intégral}} \quad \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{intégrande} \\ \text{(fonction qu'on intègre)}}} \quad \underbrace{dx}_{\text{variable d'intégration}} \quad = \quad \underbrace{F(x)}_{\text{une primitive de } f} \quad + \quad \underbrace{C}_{\substack{\text{constante d'intégration} \\ \text{(constante indéfinie)}}}$$

Exemples

(i) si $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I,

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

(ii) si $k \in \mathbb{R}$ est une constante,

$$\int kdx = kx + C.$$

(iii) si $n \neq -1$,

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

(la formule est valable pour $x \in \mathbb{R}$ si n est un entier positif, pour $x \in]-\infty, 0[$ ou $x \in]0, +\infty[$ si n est un entier inférieur ou égal à -2 et pour $x \in]0, +\infty[$ si n n'est pas un entier)

(iv) pour $x \in]-\infty, 0[$ ou $x \in]0, +\infty[$,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C.$$

(v) si $k \in \mathbb{R}^*$ est une constante,

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$$

(vi) $$\int \cos x \ dx = \sin x + C$$

(vii) $$\int \sin x \ dx = -\cos x + C$$

(viii) pour $x \in]0, +\infty[$,

$$\int \ln x \ dx = x \ln x - x + C.$$

Proposition 1.5 *Si $k \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$,*

- $\int (kf)(x)dx = k \int f(x)dx$
- $\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Exemples

(i) $$\int \frac{x^2-3x+4}{x}dx = \int \left(x-3+\frac{4}{x}\right)dx$$
$$= \left(\int xdx\right) - 3\left(\int dx\right) + 4\left(\int \frac{dx}{x}\right) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4\ln|x| + C$$

(ii) $$\int \left(e^{-4x} + \frac{6}{x} - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)dx = \left(\int e^{-4x}dx\right) + 6\left(\int \frac{dx}{x}\right) - 2\left(\int \frac{dx}{x^{3/2}}\right)$$
$$= -\frac{e^{-4x}}{4} + 6\ln x + \frac{4}{\sqrt{x}} + C$$

(iii) Cherchons une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$ et $f(1) = 7$. Alors
$$f(x) = \int \left(5x^4 + 6x^2 + 1\right)dx = x^5 + 2x^3 + x + C$$
pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$. Pour trouver la valeur de C, on utilise $f(1) = 7$, qui donne $1^5 + 2 * 1^3 + 1 + C = 7$, et donc $C = 3$. Donc
$$f(x) = x^5 + 2x^3 + x + 3.$$

(iv) La vitesse d'un véhicule au temps t est donnée par $v(t) = 50 + 30e^{-t}$. On veut déterminer la distance parcourue entre $t = 0$ et $t = 1$. On note $d(t)$ la distance parcourue au temps t, avec la convention $d(0) = 0$. On cherche donc $d(1)$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a
$$d'(t) = v(t) = 50 + 30e^{-t}.$$
Donc
$$d(t) = \int \left(50 + 30e^{-t}\right)dt = 50t - 30e^{-t} + C,$$
pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$. Or $d(0) = 0$, donc $50 * 0 - 30e^{-0} + C = 0$, et donc $C = 30$. D'où
$$d(1) = 50 - 30e^{-1} + 30 = 80 - 30e^{-1}\ (\approx 69).$$

(v) On lâche une pierre dans un puits. Elle heurte l'eau après 1,5 secondes. On veut en déduire la profondeur à laquelle se trouve l'eau. On note $z(t)$ la distance parcourue par la pierre au temps t (elle est lâchée à $t = 0$). La pierre est soumise à l'accélération de la pesanteur, donc
$$z''(t) = g\ (= 9,81\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}).$$
Donc
$$z'(t) = \int g dt = gt + C_1, \quad \text{où } C_1 \in \mathbb{R}.$$

Comme $z'(0) = 0$ (la pierre est lâchée, donc sa vitesse est nulle à $t = 0$), on a $C_1 = 0$. On en déduit

$$z(t) = \int gtdt = \frac{1}{2}gt^2 + C_2, \text{ où } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme $z(0) = 0$, on en déduit que $C_2 = 0$, et donc $z(t) = \frac{1}{2}gt^2$. La profondeur recherchée est donc $z(1,5) = g * (1,5)^2/2 \approx 11,25$m.

2 Changement de variable (ou substitution)

Supposons que l'on cherche à calculer une primitive d'une fonction $f(x)$ que l'on peut écrire sous la forme

$$f(x) = g(u(x))u'(x),$$

où g et u sont deux nouvelles fonctions. Supposons par ailleurs que l'on sâche calculer une primitive G de la fonction g:

$$\int g(x)dx = G(x) + C.$$

D'après la formule qui donne la dérivée de la composée de deux fonctions, on sait que

$$\frac{d}{dx}G(u(x)) = G'(u(x))u'(x) = g(u(x))u'(x) = f(x).$$

f est donc la dérivée de $G \circ u$, qui est donc une primitive de f :

$$\int f(x)dx = \int g(u(x))u'(x)dx = \int G'(u(x))u'(x)dx = \int \frac{d}{dx}G(u(x))dx = G(u(x)) + C.$$

Pour alléger les notations, "on pose $u = u(x)$", c'est à dire qu'on considère $u(x)$, qui est une fonction de x, comme une nouvelle variable d'intégration, notée u. Alors $du = u'(x)dx$ (égalité formelle qui "s'obtient" en multipliant l'égalité $u'(x) = \frac{du}{dx}$ par dx). On écrira donc le calcul de la manière suivante:

$$\int f(x)dx = \int g(u(x))u'(x)dx = \int g(u)du = G(u) + C = G(u(x)) + C.$$

Exemples

(i) **Calcul de $\int (2x+3)^{17}dx$.** On pose $u = 2x + 3$. Alors $du = 2dx$, et donc $dx = \frac{du}{2}$. Donc

$$\int (2x+3)^{17}dx = \int u^{17}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{17}du = \frac{1}{2}\frac{u^{18}}{18} + C = \frac{u^{18}}{36} + C = \frac{(2x+3)^{18}}{36} + C.$$

(ii) **Calcul de $\int (5x+4)^{1/3}dx$.** On pose $u = 5x + 4$. Alors $du = 5dx$, d'où $dx = \frac{du}{5}$ et donc

$$\int (5x+4)^{1/3}dx = \int u^{1/3}\frac{du}{5} = \frac{1}{5}\frac{u^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{20}(5x+4)^{4/3} + C.$$

(iii) **Calcul de $\int x^2(3x^3+1)^4 dx$.** On pose $u = 3x^3+1$. Alors $du = 9x^2dx$, d'où $x^2dx = \frac{du}{9}$ et donc

$$\int x^2(3x^3+1)^4dx = \int u^4\frac{du}{9} = \frac{1}{9}\frac{u^5}{5}+C = \frac{1}{45}(3x^3+1)^5+C.$$

(iv) **Calcul de $\int xe^{3x^2+1}dx$.** On pose $u = 3x^2+1$. Alors $du = 6xdx$, d'où $xdx = \frac{du}{6}$ et donc

$$\int xe^{3x^2+1}dx = \int e^u\frac{du}{6} = \frac{1}{6}e^u+C = \frac{1}{6}e^{3x^2+1}+C.$$

(v) **Calcul de $\int \frac{2x^3+3x^2}{x^4+2x^3+1}dx$.** On pose $u = x^4+2x^3+1$. Alors $du = (4x^3+6x^2)dx = 2(2x^3+3x^2)dx$, d'où $(2x^3+3x^2)dx = \frac{du}{2}$ et donc

$$\int \frac{2x^3+3x^2}{x^4+2x^3+1}dx = \int \frac{du/2}{u} = \frac{1}{2}\ln(|u|)+C = \frac{1}{2}\ln(|x^4+2x^3+1|)+C.$$

Résumé : méthode pour calculer $\int f(x)dx$ par substitution.

(i) deviner le changement de variable $u = u(x)$

(ii) calculer $du = u'(x)dx$

(iii) exprimer $f(x)dx$ sous la forme $g(u)du$ pour une certaine fonction g (**il ne doit plus rester de x ni de dx**)

(iv) calculer $\int g(u)du = G(u)+C$

(v) conclure : $\int f(x)dx = G(u(x))+C$

Remarques

- la méthode de changement de variable ne permet pas de calculer toutes les primitives, d'où l'intérêt de connaître d'autre méthodes de calcul de primitives, comme la méthode d'intégration par parties qu'on verra au paragraphe suivant.

- si on fait le mauvais choix de nouvelle variable u, ou bien si la primitive que l'on cherche à calculer ne peut pas se calculer par changement de variable, on s'en rend compte soit à l'étape (iii) (on n'arrive pas à se débarrasser de tous les x dans la réécriture de $f(x)dx$ sous la forme $g(u)du$), soit à l'étape (iv) (si $\int g(u)du$ n'est pas plus simple à calculer que $\int f(x)dx$)

3 Intégration par parties

Supposons que l'on cherche à calculer une primitive d'une fonction $f(x)$ que l'on peut écrire sous la forme

$$f(x) = u(x)v'(x),$$

où u et v sont deux fonctions. D'après la formule de dérivation d'un produit, on sait que

$$(uv)' = uv' + u'v,$$

et donc

$$uv' = (uv)' - u'v.$$

En intégrant cette dernière égalité, on en déduit la formule d'intégration par parties

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Si le calcul de $\int u'(x)v(x)dx$ est "plus simple" que celui de $\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx$, celà peut permettre de calculer $\int f(x)dx$.

Exemples

(i) **Calcul de $\int xe^x dx$.** On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = \int e^x dx = e^x + C_0$. Comme on a le choix de la constante indéterminée C_0, on la prend aussi simple que possible, par exemple $C_0 = 0$. Et donc

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

(ii) **Calcul de $\int \ln x dx$.** On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$. Alors $u'(x) = 1/x$, $v(x) = x$, et donc

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

(iii) **Calcul de $\int x^2 e^{3x} dx$.** On pose $u_0(x) = x^2$ et $v'(x) = e^{3x}$. Alors $u_0'(x) = 2x$, $v(x) = \frac{e^{3x}}{3}$, et donc

$$\int x^2 e^{3x} dx = x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \int 2x \frac{e^{3x}}{3} dx = x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int xe^{3x} dx.$$

On s'est donc ramené à calculer une nouvelle intégrale, ce que l'on va faire à l'aide d'une nouvelle intégration par parties : on pose $u_1(x) = x$, et à nouveau $v'(x) = e^{3x}$. Alors $u_1'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{e^{3x}}{3}$, et donc, en reprenant le calcul précédent,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \left(x \frac{e^{3x}}{3} - \int 1 \cdot \frac{e^{3x}}{3} dx \right) = x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2}{9} \int e^{3x} dx \\ &= x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2}{27} e^{3x} + C \end{aligned}$$

Résumé : méthode pour calculer $\int f(x)dx$ par intégration par parties.

(i) deviner comment écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = u(x)v'(x)$

(ii) calculer $u'(x)$ et $v(x) = \int v'(x)dx$

(iii) appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

(iv) calculer $\int u'(x)v(x)dx$ (directement ou bien en faisant un changement de variable ou une nouvelle intégration par parties) et conclure.

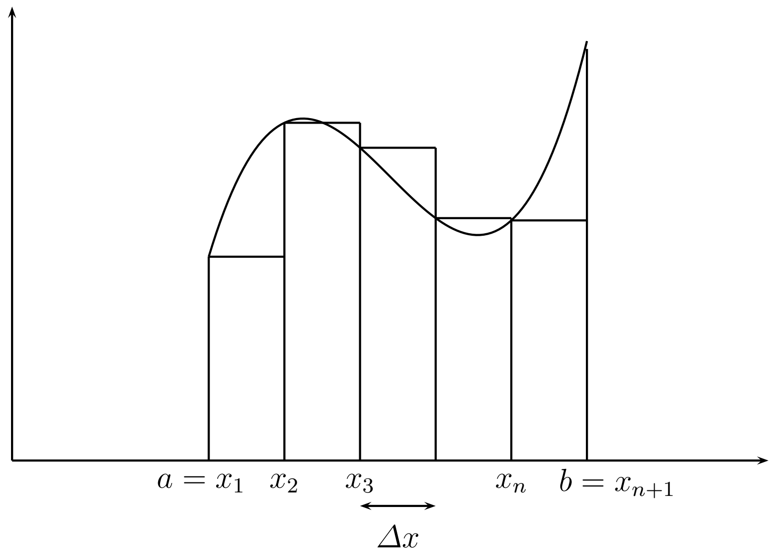
Remarques

- toutes les primitives ne peuvent pas se calculer en utilisant l'intégration par parties
- si on fait des mauvais choix pour u et v' ou bien si la méthode d'intégration par parties n'est pas adaptée au calcul de la primitive qu'on cherche, on peut être bloqué à l'étape (ii) (on n'arrive pas à calculer $v(x)$ à partir de $v'(x)$) ou bien à l'étape (iv) (si la nouvelle primitive à calculer n'est pas "plus simple" à calculer que celle qu'on cherche)
- classés du meilleur au plus mauvais, des choix possibles pour $u(x)$ sont

$$\ln x,\ (\ln x)^2, ..., x,\ x^2,\ x^3, ..., \exp(x).$$

4 Aire sous une courbe et intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ (où a et b sont des réels, et $a < b$). On suppose dans un premier temps que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$. On considère l'aire $\mathcal{A}$ de la surface délimitée par les courbes d'équations $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ (dans un repère orthonormé), c'est à dire "l'aire sous le graphe de f entre a et b".
On subdivise cette surface en n tranches (où n est un nombre entier qu'on peut penser comme étant grand), de bases les intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ (où $x_k = a + (k-1)\frac{b-a}{n}$, avec $k \in \{1, \cdots, n\}$), de largeur $x_{k+1} - x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n}$.



Si n est grand, chaque tranche est très fine, et l'aire de la $k^{\text{ème}}$ tranche est presque celle d'un rectangle de largeur Δx, de hauteur $f(x_k)$, et donc de surface $f(x_k)\Delta x$. L'aire totale peut donc être approchée par la somme des aires de ces rectangles,

$$\mathcal{A} \approx f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \approx (f(x_1) + \cdots + f(x_n))\, \Delta x.$$

L'approximation est d'autant meilleure que n est grand :

$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} (f(x_1) + \cdots + f(x_n))\, \Delta x \quad \text{où} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

C'est cette dernière quantité qu'on va définir comme l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$.

Définition 4.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. L'**intégrale de f entre a et b**, notée $\int_a^b f(x)dx$ est définie par*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} (f(x_1) + \cdots + f(x_n))\, \Delta x \quad \textit{où} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

(l'intervalle $[a, b]$ ayant été subdivisé en n parts égales, x_k appartenant au $k^{\text{ième}}$ sous intervalle).

Remarque. La définition vaut même si f n'est pas positive, mais si de plus $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a, b]$, $\int_a^b f(x)dx$ peut être interprétée comme l'aire sous le graphe de f sur l'intervalle $[a, b]$.

Le théorème suivant fait le lien entre les intégrales que l'on vient de définir et les primitives que l'on a appris à calculer précédemment.

Théorème fondamental du calcul. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ (où $a, b \in \mathbb{R}$), et soit F une primitive de f. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Notation. On note

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque. La quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, si G est une autre primitive de f, elle est du type $G(x) = F(x) + C$ pour une certaine constante C, et donc

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Justification du théorème. On ne donnera de justification que dans le cas où f est positive sur $[a, b]$. Dans ce cas, notons $A(x) = \int_a^x f(t)dt$. On a vu qu'on peut interpréter $A(x)$ comme l'aire sous le graphe de f entre a et x (au moins si $x \geqslant a$). Si $x \in [a, b[$ et $h > 0$ est petit, $A(x+h) - A(x)$ peut donc être interprétée comme l'aire d'une fine tranche entre x et $x + h$ sous le graphe de f. Si h est très petit, cette fine tranche est quasiment un rectangle de base h de hauteur $f(x)$, et donc d'aire $hf(x)$. Donc

$$A(x + h) - A(x) \approx hf(x),$$

et donc

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \approx f(x).$$

Quand $h \to 0$, la limite du membre de gauche est $A'(x)$, celle du membre de droite, qui ne dépend pas de h, est $f(x)$. A la limite $h \to 0$, on obtient donc l'égalité

$$A'(x) = f(x),$$

et donc A est bien une primitive de f sur $[a, b]$. Si F est, comme dans l'énoncé, une primitive de f sur $[a, b]$, il existe donc une constante C telle que pour tout $x \in [a, b]$,

$$A(x) = F(x) + C.$$

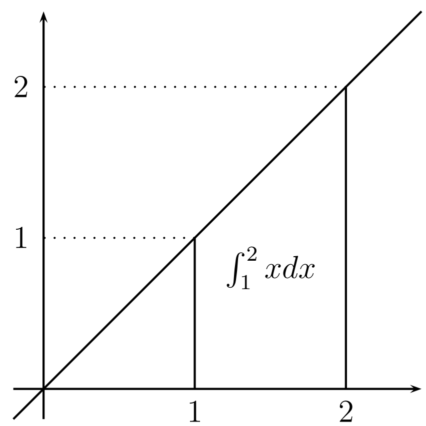
En choisissant $x = a$ dans cette égalité, on obtient que $0 = A(a) = F(a) + C$, donc $C = -F(a)$, et donc pour tout $x \in [a, b]$, on a $\int_a^x f(t)dt = A(x) = F(x) - F(a)$. Pour $x = b$, c'est le résultat annoncé dans le théorème.

Exemples.

(i) On cherche l'aire de la surface délimitée par les courbes d'équation $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = x$. Elle est donnée par

$$\int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

On peut interpréter cette intégrale comme l'aire de la surface indiquée sur le dessin ci-dessous.



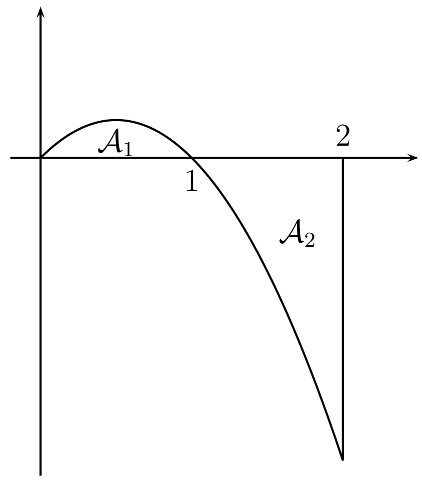
(ii)

$$\int_0^1 e^{3x} dx = \left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^1 = \frac{e^{3\cdot 1}}{3} - \frac{e^{3\cdot 0}}{3} = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(e^3 - 1\right).$$

(iii)

$$\int_0^2 \left(x - x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - 0 = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}.$$

L'intégrale $\int_0^2 (x - x^2)\, dx$ peut être interprétée comme $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$, où $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont les aires des surfaces indiquées sur le dessin ci-dessous.



Propriétés Soit f, g continues sur $[a, b]$ et k une constante

(i) $\int_a^b (kf)(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

(ii) $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(iii) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(iv) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(v) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (relation de Chasles)
On a supposé ici que f est continue sur un intervalle qui contient a, b et c.

Exemples. Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{0} (x+1)dx + \int_{0}^{1} (x-1)^2 dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{0^2}{2} + 0\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right) + \frac{(1-1)^3}{3} - \frac{(0-1)^3}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 f(x)dx - \int_0^{-1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{5}{6}.$$

5 Changement de variable dans le calcul d'une intégrale

Exemples.

(i) **Calcul de $\int_0^1 xe^{2x^2+1}dx$.**
1ère méthode (calcul d'une primitive, puis utilisation du théorème fondamental du calcul)
On pose $u = u(x) = 2x^2 + 1$. Alors $du = 4xdx$, et donc $xdx = \frac{du}{4}$. Donc

$$\int xe^{2x^2+1}dx = \int e^u \frac{du}{4} = \frac{e^u}{4} + C = \frac{e^{2x^2+1}}{4} + C.$$

Donc

$$\int_0^1 xe^{2x^2+1}dx = \frac{e^{2\cdot 1^2+1}}{4} - \frac{e^{2\cdot 0^2+1}}{4} = \frac{e^3}{4} - \frac{e}{4} = \frac{e}{4}(e^2 - 1).$$

2ème méthode (directe)

$$\int_0^1 xe^{2x^2+1}dx = \int_{u(0)}^{u(1)} e^u \frac{du}{4} = \int_1^3 \frac{e^u}{4}du = \left[\frac{e^u}{4}\right]_1^3 = \frac{e^3}{4} - \frac{e}{4}.$$

(ii) **Calcul de $\int_0^1 x^2\sqrt{8x^3+1}dx$.**
On pose $u = 8x^3 + 1$. Alors $du = 24x^2dx$ et $x^2dx = \frac{du}{24}$. En particulier, quand $x = 0$, $u = 1$, et quand $x = 1$, $u = 9$. Donc

$$\int_0^1 x^2\sqrt{8x^3+1}dx = \int_1^9 u^{1/2}\frac{du}{24} = \frac{1}{24}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^9 = \frac{1}{36}\left(9^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$$

Pour résumer, pour calculer par changement de variable une intégrale $\int_a^b f(x)dx$ ou $f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x) = g(u(x))u'(x)$ et G est une primitive de g, on pose $u = u(x)$, de sorte que $du = u'(x)dx$, et alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du = [G(u)]_{u=u(a)}^{u=u(b)} = G(u(b)) - G(u(a)).$$

Noter que lorsqu'on passe de la variable d'intégration x à la variable d'intégration u, les bornes de l'intégrale sont modifiées.

6 Intégration par parties dans une intégrale

La formule suivante se déduit facilement de la formule d'intégration par parties pour les primitives.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Exemple : calcul de $\int_3^5 x \ln x dx$. On pose $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$. On a donc $u'(x) = 1/x$, $v(x) = x^2/2$. On a donc

$$\int_3^5 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_3^5 - \int_3^5 \frac{1}{x}\frac{x^2}{2} dx = \frac{5^2}{2} \ln 5 - \frac{3^2}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \int_3^5 x dx$$
$$= \frac{25}{2} \ln 5 - \frac{9}{2} \ln 3 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^5 = \frac{25 \ln 5}{2} - \frac{9 \ln 3}{2} - 4.$$

7 Valeur moyenne

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, on veut donner un sens à la valeur moyenne de f sur cet intervalle $[a, b]$. Comme dans le paragraphe 4, on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ (pour $1 \leqslant k \leqslant n$), tous de même longueur $x_{k+1} - x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n}$. Alors une valeur approchée de la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est donnée par la moyenne des valeurs de f aux n points $x_1, \cdots, x_n$:

$$V_n = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{b-a}\frac{b-a}{n}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right).$$

Cette approximation est d'autant meilleure que n est grand. La valeur moyenne $\overline{V}$ de f sur $[a, b]$ est donc la limite de V_n quand n tend vers l'infini. On reconnaît dans l'expression de $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$ l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme définie dans la Définition 4.1 :

$$\overline{V} = \lim_{n\to\infty} V_n = \frac{1}{b-a} \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{F(b) - F(a)}{b-a},$$

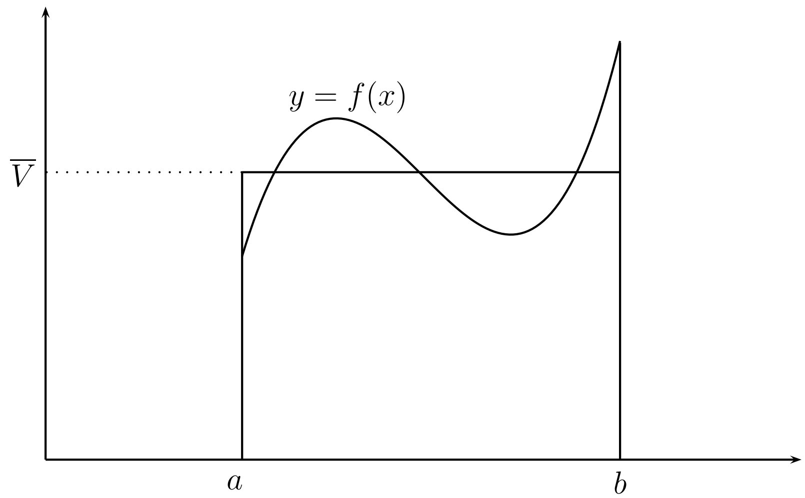
où F est une primitive de f.

Exemple. Une voiture se déplace à une vitesse $v(t) = 50 + 30e^{-t}$ (t est exprimé en heures, $v(t)$ en km/h. La vitesse moyenne $\overline{V}$ pendant les trois premières heures est

$$\overline{V} = \frac{1}{3-0}\underbrace{\int_0^3 (50 + 30e^{-t})dt}_{=d(3)-d(0)} = \frac{1}{3}\left[50t - 30e^{-t}\right]_0^3 = 60 - 10e^{-3}.$$

Interprétation. La moyenne $\overline{V}$ de f sur $[a, b]$ est la hauteur d'un rectangle de base $[a, b]$ et de surface égale à l'aire sous la courbe $y = f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$:

$$\underbrace{\overline{V}(b-a)}_{\text{aire du rectangle}} = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{aire sous le graphe de } f \text{ sur } [a,b]}$$



$y = f(x)$
$\overline{V}$
a
b