Chapitre 6 : Equations différentielles

1 Introduction

1.1 Qu'est ce qu'une équation différentielle?

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui donne une relation entre

- la valeur de cette fonction en un point
- la valeur de ses dérivées, dérivées secondes, etc... au même point
- la valeur de la variable en ce point

Dans les exemples suivants, on note y la fonction inconnue et t sa variable (réelle). Les équations différentielles qu'on va écrire sont donc des relations entre t, $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$... Par exemple,

(i) $y'(t) = y(t)^2 + e^t$

(ii) $y''(t) + y(t) = 0$

(iii) $y'(t) = t^2 - 1$

(iv) $y'(t) = 2y(t)$

On dit qu'une équation différentielle est du **premier ordre** si elle ne fait pas intervenir les dérivées d'ordre 2 ou plus de la fonction inconnue. Avec les notations introduites précédemment, celà signifie qu'on peut l'écrire comme une égalité liant t, $y(t)$ et $y'(t)$. Dans les exemples précédents, (i), (iii), (iv) sont du premier ordre, mains pas (ii).
Etant donnée une équation différentielle du premier ordre, on cherchera soit à en trouver toutes les solutions, soit à trouver, parmi ces solutions, celle qui vérifie une **condition initiale** spécifiant la valeur prise par la fonction en un point (par exemple, $y(0) = 1$).

Remarque. On sait déjà résoudre un type très particulier d'équations du premier ordre : si $f(t)$ est une fonction connue, résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$y'(t) = f(t) \tag{1.1}$$

revient à chercher les primitives de f. Si on note F une primitive de f, les solutions de (1.1) sont les fonctions qui s'écrivent sous la forme

$$y(t) = F(t) + C,$$

où C est une constante arbitraire.
Pour résoudre une équation différentielle du premier ordre plus compliquée, on cherchera à se ramener à résoudre une équation de type (1.1) , c'est à dire à un calcul de primitive.

1.2 Pourquoi vouloir résoudre des équations différentielles?

Voici trois contextes différents où il est intéressant de savoir résoudre une équation différentielle :

- **En chimie.** Considérons une réaction chimique où, dans une solution aqueuse, un réactif R se transforme pour donner un produit P : R $\longrightarrow$ P. On veut connaître la concentration de R au temps t (notée $[\mathrm{R}](t)$), connaissant la concentration initiale $[\mathrm{R}](0) = \mathrm{R}_0$. La chimie de la réaction permet de déterminer que la vitesse de cette réaction (ou vitesse de disparition de R) est donnée par

$$-\frac{d}{dt}[\mathrm{R}](t) = f\left([\mathrm{R}](t)\right),$$

  où f est une fonction connue (donnée par la chimie). $[\mathrm{R}](t)$ est donc solution de l'équation différentielle

$$-y'(t) = f(y(t)),$$

  avec condition initiale

$$y(0) = \mathrm{R}_0.$$

- **En biologie.** On considère une population, dont le nombre d'individus au temps t est noté $N(t)$. La vitesse de variation $N'(t)$ de $N(t)$ au temps t peut souvent être exprimée sous la forme

$$N'(t) = (\text{taux de natalité}) * N(t) - (\text{taux de mortalité}) * N(t),$$

  où les taux de natalité et de mortalité, déterminés par le biologiste, peuvent éventuellement eux-mêmes dépendre de $N(t)$.

- **En physique.** Considérons une masse m se déplaçant le long d'une droite, dont on note $y(t)$ la position au temps t. D'après la relation fondamentale de la dynamique, à tout temps t, la quantité $my''(t)$ est égale à la somme des forces exercées sur cette masse. Par exemple, la masse peut être soumise à la résistance de l'air, proportionnelle au carré de la vitesse : $F_{air} = -\alpha(y'(t))^2$, à une force élastique de rappel (ressort), proportionnelle à l'écart avec la position d'équilibre y_0 : $F_{ressort} = -\beta(y(t) - y_0)$, à la gravité mg. Au total, $y(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$my''(t) = -\alpha(y'(t))^2 - \beta(y(t) - y_0) + mg,$$

  où m, α, β, y_0, g sont des nombres connus donnés par la physique.

2 Comment obtenir une équation différentielle à partir d'un problème concret?

On va répondre à cette question par un exemple de problème de mathématiques financières. Le raisonnement permettant d'obtenir une équation différentielle dans d'autres cadres est souvent du même genre.

Un compte bancaire rapporte des intérêts à raison de 5% par an (on pose $r = 0.05$). Au temps initial $t = 0$, le solde sur le compte est $S_0 = 1000$€. On verse continuellement de l'argent sur le compte, à raison de $f = 1200$€/an. On veut déterminer, pour tout $t \geqslant 0$, le solde $S(t)$ sur le compte au temps t.
Pour celà, à $t \geqslant 0$ fixé, on commence par faire un bilan sur un court intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ (où $\Delta t > 0$ est un nombre pensé comme étant très petit, t et Δt étant exprimés en années):

$$\begin{pmatrix} \text{solde au} \\ \text{temps } t + \Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{solde au} \\ \text{temps } t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{intérêts produits} \\ \text{pendant } [t, t + \Delta t] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{argent versé} \\ \text{pendant } [t, t + \Delta t] \end{pmatrix}$$

Explicitons chacun des quatre termes apparaissant dans ce bilan. Les soldes sur le compte aux temps $t+\Delta t$ et t sont respectivement $S(t+\Delta t)$ et $S(t)$. Pendant l'intervalle $[t, t+\Delta t]$, la somme d'argent versée sur le compte est $f\Delta t$ euros. En partant d'un capital de S euros, en un an, les intérêts rapporteraient approximativement rS euros (en considérant que le solde S n'a pas eu le temps de changer beaucoup en un an, autrement dit que les intérêts acquis représentent un petit montant par rapport au capital total). Sur un intervalle de temps d'une durée de Δt années, les intérêts rapportent donc environ $rS\Delta t$ euros. Au total, le bilan s'écrit donc

$$S(t + \Delta t) \approx S(t) + rS(t)\Delta t + f\Delta t.$$

D'où

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \approx rS(t) + f. \tag{2.1}$$

De plus, cette approximation est d'autant plus précise que Δt est petit (car plus Δt est petit, moins le solde du compte a le temps de changer pendant l'intervalle $[t, t+\Delta t]$, rendant plus précise notre approximation du montant des intérêts produits durant cet intervalle). Passons donc à la limite $\Delta t \to 0$ dans (2.1). Le membre de droite ne dépend pas de Δt, donc tend vers lui-même quand $\Delta t \to 0$. Quant au membre de gauche, sa limite quand $\Delta t \to 0$ est $S'(t)$. La fonction $S(t)$ est donc solution du problème

$$\begin{cases} S'(t) = rS(t) + f & \text{(équation différentielle)} \\ S(0) = S_0 & \text{(condition initiale)} \end{cases}$$

3 Méthode de séparation des variables

On va voir ici une méthode qui permet de résoudre certaines équations différentielles du premier ordre (mais pas toutes). On dit qu'on peut *séparer les variables* dans une équation différentielle du premier ordre (dont on note $y(t)$ la fonction inconnue) si on peut l'écrire sous la forme

$$y'(t) = \frac{h(t)}{g(y(t))}, \tag{3.1}$$

où g et h sont deux fonctions connues. Dans ce cas, en multipliant l'équation par $g(y(t))$ et en intégrant par rapport à la variable t, on obtient

$$\int g(y(t))y'(t)dt = \int h(t)dt.$$

Si G est une primitive de g et H une primitive de h, on en déduit qu'il existe une constante C telle que

$$G(y(t)) = H(t) + C,$$

équation qui n'est plus une équation différentielle (la dérivée de la fonction inconnue y n'y apparaît plus). Si la fonction G n'est pas trop compliquée, celà peut permettre d'exprimer explicitement $y(t)$ en fonction de t (et de la constante C, qui, elle, peut être déterminée grâce à une condition initiale).
On pourra mener les calculs de la manière suivante, en considérant comme une nouvelle variable l'inconnue y, bien qu'elle soit a priori une fonction de la variable t. Plus précisément, on réécrit (3.1) sous la forme

$$\frac{dy}{dt} = \frac{h(t)}{g(y)},$$

que l'on multiplie formellement par $g(y)dt$ à gauche et à droite, de sorte que

$$g(y)dy = h(t)dt.$$

On a *séparé les variables*, dans le sens où tous les y sont à gauche et tous les t à droite. Il n'y a alors plus qu'à intégrer les deux membres de cette "égalité" formelle, à gauche en utilisant y comme variable d'intégration, à droite en utilisant t :

$$\int g(y)dy = \int h(t)dt,$$

et donc

$$G(y) = H(t) + C.$$

Exemples.

(i) Revenons à l'équation différentielle obtenue à la section 2:

$$\begin{cases} S'(t) = rS(t) + f & (\mathrm{E}_1) \\ S(0) = S_0 & (\mathrm{CI}) \end{cases}$$

où $r = 0.05$ an^{-1}, $f = 1200$ €/an et $S_0 = 1000$ €. On commence par réécrire (E_1) sous la forme

$$\frac{dS}{dt} = rS + f.$$

Puis on sépare les variables :

$$\frac{dS}{rS+f} = dt.$$

On intègre :

$$\int \frac{dS}{rS+f} = \int dt,$$

qui donne

$$\frac{1}{r}\ln(rS+f) = t + C,$$

où C est une constante que l'on détermine en utilisant la condition initiale (CI) qui nous dit que pour $t=0$, $S=S_0$. Donc

$$C = \frac{1}{r}\ln(rS_0+f),$$

d'où

$$\frac{1}{r}\ln(rS+f) = t + \frac{1}{r}\ln(rS_0+f).$$

On en déduit

$$rS+f = (rS_0+f)e^{rt},$$

et donc

$$S(t) = -\frac{f}{r} + \left(S_0 + \frac{f}{r}\right)e^{rt} \quad (= -24000 + 25000e^{rt}).$$

On vérifie qu'il s'agit bien d'une solution de (E_1)-(CI)

(ii) On considère le problème

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{t}{y(t)^4} & (\mathrm{E}_2) \\ y(0) = y_0 & (\mathrm{CI}) \end{cases}$$

où $y_0 > 0$. L'équation différentielle (E_2) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y^4}.$$

On sépare les variables :

$$y^4 dy = t dt,$$

on intègre

$$\frac{y^5}{5} = \int y^4 dy = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C,$$

où C est une constante qu'on obtient grâce à la condition initiale :

$$\frac{y_0^5}{5} = \frac{0^2}{2} + C$$

d'où $C = y_0^5/5$ et

$$y^5 = y_0^5 + \frac{5t^2}{2},$$

et donc

$$y(t) = \left(y_0^5 + \frac{5t^2}{2}\right)^{1/5}.$$

Réciproquement, on vérifie qu'il s'agit bien d'une solution de (E_2)-(CI)

(iii) On considère, pour $t > 0$, l'équation différentielle

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t^2}. \qquad (\mathrm{E}_3)$$

L'équation (E_3) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t^2},$$

qui donne par séparation des variables et intégration (là où y ne s'annule pas)

$$\ln(|y|) = \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C_0,$$

où C_0 est une constante. On applique la fonction exponentielle aux deux membres de cette égalité. On obtient

$$|y| = e^{C_0 - 1/t},$$

et donc

$$y = \pm e^{C_0} e^{-1/t} = Ce^{-1/t},$$

où $C = \pm e^{C_0}$ est une nouvelle constante (non nulle). La fonction constante égale à 0 est aussi solution de (E_3). Réciproquement, on vérifie que les fonctions du type

$$y(t) = Ce^{-1/t},$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire, sont bien des solutions de (E_3).

Remarque. La méthode de séparation des variables ne permet pas de résoudre toutes les équations différentielles du premier ordre. Reprenons par exemple l'équation (E_1) en supposant que f, au lieu d'être constant, dépend de t : $f = f(t)$. Si on reprend les calculs effectués pour résoudre (E_1), on obtient

$$\frac{dS}{rS + f(t)} = dt.$$

Mais ici, les variables ne sont pas séparées, puisqu'il "reste du t" à gauche. On verra au second semestre d'autres méthodes qui permettent de résoudre d'autres équations différentielles du premier ordre, comme par exemple (E_1) avec un f qui dépend de t.