

## Correction

Soit la fonction  $C : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $C(t) = C_0 e^{-kt}$ , où  $C_0 > 0$  est la concentration initiale du réactif et  $k > 0$  est une constante de vitesse de réaction.

### 1. Étude du domaine de définition et de la continuité.

- La fonction  $C$  est bien définie pour tous les  $t \geq 0$ . Donc, le domaine de définition est  $\mathcal{D}_C = [0, +\infty[$ .
- La fonction  $C(t) = C_0 e^{-kt}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  car elle est composée de fonctions élémentaires (exponentielle et constante), qui sont continues sur leur domaine. Par théorème de continuité des fonctions composées,  $C$  est donc continue sur  $\mathcal{D}_C$ .
- La fonction  $C : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $C(t) = C_0 e^{-kt}$  n'est pas bijective sur  $\mathbb{R}$  car  $C(t)$  prend uniquement des valeurs dans l'intervalle  $]0, C_0]$  lorsque  $t \in \mathbb{R}_+$ . En particulier,  $C$  n'est pas surjective sur  $\mathbb{R}$  car elle ne peut atteindre les valeurs négatives ni les valeurs supérieures à  $C_0$ . Par contre, elle est bien bijective sur  $]0, C_0]$ . En effet, restreinte à cet intervalle, la fonction  $C(t) = C_0 e^{-kt}$  est strictement décroissante et donc injective. De plus, elle prend toutes les valeurs de  $]0, C_0]$  lorsque  $t \in \mathbb{R}_+$ , ce qui garantit qu'elle est également surjective sur cet intervalle.

### 2. Étude asymptotique.

- Calcul des limites :
  - $\lim_{t \rightarrow 0^+} C(t) = C_0 e^{-k \cdot 0} = C_0$ ,
  - $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = C_0 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-kt} = C_0 \cdot 0 = 0$ .
- Au temps initial  $t = 0$ , la concentration est maximale et vaut  $C_0$ . Au fur et à mesure que  $t$  tend vers l'infini, la concentration  $C(t)$  tend vers 0, ce qui signifie que le réactif se consomme progressivement jusqu'à disparaître.

### 3. Étude des variations.

- Calcul de la dérivée :

$$C'(t) = \frac{d}{dt}(C_0 e^{-kt}) = -kC_0 e^{-kt}.$$

- Puisque  $k > 0$  et  $C_0 > 0$ , on a  $C'(t) < 0$  pour tout  $t \geq 0$ . Cela signifie que  $C$  est une fonction décroissante sur  $[0, +\infty[$ .

### 4. Temps caractéristique de décroissance.

On souhaite résoudre l'équation  $C(t) = \frac{C_0}{10}$  pour  $t \geq 0$  :

$$C_0 e^{-kt} = \frac{C_0}{10}.$$

En simplifiant par  $C_0$ , on obtient

$$e^{-kt} = \frac{1}{10},$$

puis en appliquant le logarithme népérien de chaque côté de l'équation, on trouve

$$-kt = \ln\left(\frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(10)}{k} \quad \left(\text{car } \ln\left(\frac{1}{10}\right) = \ln(1) - \ln(10) = -\ln(10)\right).$$

*Interprétation* : Le temps  $t = \frac{\ln(10)}{k}$  est le moment où la concentration du réactif est 10 fois moins importante que sa valeur initiale.

### 5. Impact des oscillations thermiques à partir de $t_0 = \frac{3\pi}{2}$ .

La concentration est désormais, pour  $t \geq t_0$ ,

$$\tilde{C}(t) = (C_0 + A \cos(t))e^{-kt}.$$

- (a) Pour vérifier la continuité en  $t_0$ , calculons les limites de  $\tilde{C}(t)$  quand  $t \rightarrow t_0^-$  et  $t \rightarrow t_0^+$ .

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \tilde{C}(t) = C_0 e^{-kt_0},$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \tilde{C}(t) = (C_0 + A \cos(t_0)) e^{-kt_0}.$$

Or  $\cos(t_0) = 0$  puisque  $t_0 = \frac{3\pi}{2}$ . Donc :

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \tilde{C}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} C(t) = C_0 e^{-kt_0}.$$

Ainsi,  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \tilde{C}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \tilde{C}(t)$ , et donc  $\tilde{C}$  est continue en  $t_0$ .

- (b) Pour  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{C}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (C_0 + A \cos(t)) e^{-kt} = 0,$$

car  $\cos(t) \in [-1, 1]$  pour tout  $t \geq 0$ .

*Interprétation* : Même en tenant compte des oscillations thermiques, la concentration tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Le réactif finit donc par se consommer intégralement.

- (c) En utilisant le cercle trigonométrique, on trouve rapidement que

$$\begin{aligned} \cos(t) = 0 &\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{ou} \quad t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sans prendre compte de la condition  $t \geq t_0$ , les solutions de cette équation sont :

$$t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{pour } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } t \geq t_0.$$

Mais comme on veut les  $t \geq t_0 = \frac{3\pi}{2}$ , la première valeur de  $t$  pour laquelle  $\cos(t) = 0$  et  $t \geq t_0$  est  $t = \frac{3\pi}{2} = t_0$ . Les instants suivants seront ainsi  $t = \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$ . Les solutions sont donc

$$t = \frac{3\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- (d) À chaque instant où  $\cos(t) = 0$ , la contribution oscillatoire  $A \cos(t)$  au modèle de concentration est momentanément nulle. Cela signifie que, même avec les fluctuations thermiques, la concentration suit temporairement une décroissance purement exponentielle au moment où  $\cos(t) = 0$ . Ces instants  $t = \frac{3\pi}{2} + k\pi$  (pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $t \geq t_0$ ) représentent donc les moments où l'influence des oscillations disparaît brièvement, laissant la concentration suivre la loi initiale  $C(t) = C_0 e^{-kt}$ .
- (e) Pour  $t \geq t_0$ , la concentration  $\tilde{C}(t) = (C_0 + A \cos(t)) e^{-kt}$  oscille en raison du terme  $A \cos(t)$  mais décroît globalement vers 0. Les oscillations traduisent l'effet des variations thermiques, mais la tendance générale reste une décroissance exponentielle.

