Contrôle continu 1 – Fonctions réelles et continuité

La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Pour chaque résultat du cours invoqué, il est nécessaire de rappeler l'ensemble des hypothèses permettant de l'utiliser. Les cinq parties sont indépendantes, il est donc possible de répondre à certaines questions sans avoir fait les précédentes.
Durée : 40 minutes.

Modélisation de la concentration d'un réactif en fonction du temps

Lors d'une réaction chimique, la concentration $C(t)$ d'un réactif (en mol/L) au cours du temps $t \geq 0$ (en heures) est modélisée par l'application suivante :

$$C : \mathscr{D}_C \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto C(t) := C_0 e^{-kt}$$

où $C_0 > 0$ est la concentration initiale du réactif et $k > 0$ est une constante de vitesse de réaction.
L'objectif ici est d'analyser mathématiquement cette fonction et de tirer des conclusions sur l'évolution de la concentration au cours du temps.

1. *Étude des principales propriétés du modèle.*
   (a) Déterminer, à partir de l'énoncé, le domaine de définition $\mathscr{D}_C$ de la fonction C.
   (b) Démontrer que la fonction C est continue sur $\mathscr{D}_C$.
   (c) La fonction C est-elle bijective de $\mathscr{D}_c$ sur $\mathbb{R}$? De $\mathscr{D}_c$ sur $]0, C_0]$?

2. *Étude asymptotique.*
   (a) Calculer $\lim_{t\to 0^+} C(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} C(t)$.
   (b) Interpréter ces limites dans le contexte de la réaction chimique.

3. *Étude variationnelle.*
   (a) Calculer la dérivée $C'(t)$ pour tout $t \geq 0$.
   (b) Étudier le signe de C' et en déduire les variations de C sur son domaine.

4. *Temps caractéristique de décroissance.*
   Résoudre l'équation $C(t) = \frac{C_0}{10}$ pour $t \geq 0$, puis interpréter la solution dans le cadre de la réaction.

5. *Modèle avec oscillations thermiques à partir de t_0.*
   On suppose maintenant que, à partir d'un certain temps $t_0 = \frac{3\pi}{2}$ heures, la concentration est influencée par des oscillations périodiques de température, tel qu'on considère maintenant la fonction

$$\tilde{C}(t) = \begin{cases} C_0 e^{-kt}, & t \in [0, t_0[, \\ (C_0 + A\cos(t))e^{-kt}, & t \geq t_0. \end{cases}$$

   où $A \in [0, C_0[$ est une constante représentant l'amplitude des fluctuations périodiques influençant la concentration.
   (a) Montrer que $\lim_{t\to t_0^-} \tilde{C}(t) = \lim_{t\to t_0^+} \tilde{C}(t)$ et en déduire la continuité de la concentration au point $t_0 = \frac{3\pi}{2}$.
   (b) Calculer $\lim_{t\to+\infty} \tilde{C}(t)$, la comparer avec $\lim_{t\to+\infty} C(t)$ et interpréter cette limite dans le cadre de la réaction chimique avec fluctuations périodiques.
   (c) Résoudre l'équation $\cos(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$.
   (d) En déduire les instants $t \geq t_0$ pour lesquels les concentrations données par le modèle initial C et par le modèle avec oscillation $\tilde{C}$ sont identiques.
   (e) Dessiner "à la main" l'allure du graphe de la fonction $\tilde{C}$ pour $t \geq 0$.

Bonus. Ecrivez à votre encadrant de TD quelque chose que vous n'oseriez pas lui dire de vive voix.