Correction

Réponse 1. Il est d'abord nécessaire que f soit continue en 1. On a $f(1) = 1$ et la limite à droite de f en 1 vaut $a + b + 1$. On doit donc avoir $a + b + 1 = 1$, soit $b = -a$.
Étudions maintenant la dérivabilité en 1. La fonction f coïncide avec la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$. La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ étant égale à $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$, f admet une dérivée à gauche en 1 qui vaut $1/2$.
D'autre part, f coïncide sur $[1, +\infty[$ avec la fonction $x \mapsto ax^2 - ax + 1$, donc la dérivée est $x \mapsto 2ax - a$. La fonction f est donc dérivable à droite en 1, de dérivée a.
Finalement, la fonction f sera dérivable en 1 si et seulement si les dérivées à droite et à gauche coïncident. Le seul moyen de définir f de sorte que ce soit une fonction dérivable en 1 est donc de poser $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

Réponse 2. cf. la correction du TD4, exercice 8.

Réponse 3. Calculons les primitives données.

1. L'ensemble sur lequel cette primitive a un sens est $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ (pour avoir $x \neq 2$). On remarque ensuite que
$$\frac{x-3}{x-2} = \frac{(x-2)-1}{x-2} = 1 - \frac{1}{x-2}.$$
Ainsi, l'intégrale se réécrit
$$I_1 = \int \left(1 - \frac{1}{x-2}\right) \mathrm{d}x = \int 1 \, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-2} \, \mathrm{d}x.$$
Les primitives de chaque terme sont
$$\int 1 \, \mathrm{d}x = x + C \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{x-2} \, \mathrm{d}x = \ln|x-2| + C,$$
donc on obtient finalement
$$I_1 = x - \ln|x-2| + C, \qquad \text{où } x \neq 2.$$
2. On travaille ici sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (pour avoir $e^x \neq 1$, donc $x \neq 0$). On effectue le changement de variable $u = e^x$. Ainsi, $\mathrm{d}u = e^x \, \mathrm{d}x$ et $e^x = u$. L'intégrale devient :
$$I_2 = \int \frac{u}{u-1} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{1}{u-1} \, \mathrm{d}u.$$
La primitive de $\frac{1}{u-1}$ est $\ln|u-1|$, donc on obtient
$$I_2 = \ln|u-1| + C.$$
En revenant à la variable x, on a $u = e^x$, d'où
$$I_2 = \ln|e^x - 1| + C, \qquad \text{où } e^x \neq 1 \text{ (c'est-à-dire } x \neq 0).$$

Réponse 4. Soit $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

1. Soit $x \in [1, 2]$. On a
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}.$$
Ainsi, on a
$$\begin{aligned}
& f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}, \quad \forall x \in [1,2] \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}, \quad \forall x \in [1,2] \\
\Leftrightarrow\ & 1 = (a+b)x + a, \quad \forall x \in [1,2] \\
\Leftrightarrow\ & a = 1 \quad \text{et} \quad a + b = 0 \\
\Leftrightarrow\ & a = 1 \quad \text{et} \quad b = -1.
\end{aligned}$$

2. On en déduit que l'on a :

$$J = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\,dx$$
$$= [\ln(x)]_1^2 - [\ln(x+1)]_1^2$$
$$= \ln(2) - (\ln(3) - \ln(2))$$
$$= 2\ln(2) - \ln(3).$$

3. Par la méthode d'intégration par parties, on a :

$$I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt = \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{u'(t)} \underbrace{\ln(1+t)}_{v(t)}\,dt \quad \text{avec } u(t) = -\frac{1}{t}.$$

En appliquant la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$I = [u(t)v(t)]_1^2 - \int_1^2 u(t)v'(t)\,dt$$

$$= \left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)}\,dt.$$

Calculons chaque terme :

$$\left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^2 = -\frac{\ln(3)}{2} + \ln(2),$$

et l'intégrale restante est égale à J. Ainsi :

$$I = -\frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) + J.$$

En remplaçant J par sa valeur calculée :

$$I = -\frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) + (2\ln(2) - \ln(3)).$$

En simplifiant :

$$I = 3\ln(2) - \frac{3\ln(3)}{2}.$$