Contrôle continu 2 − Dérivation et intégration

La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Pour chaque résultat du cours invoqué, il est nécessaire de rappeler l'ensemble des hypothèses permettant de l'utiliser.
Durée : 90 minutes.

Exercice 1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit continue et dérivable en 1.

Exercice 2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{a\exp(bt)}{c + \exp(bt)}.$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$f(t) = \frac{a}{c\exp(-bt) + 1}.$$
2. Exprimer $f(0)$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ en fonction des constantes a, b, c.
3. Calculer f' et dresser le tableau des variations de f.
4. Déterminer l'image $f(\mathbb{R}_+)$ et justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+)$.
5. Tracer l'allure du graphe C_f de f.
6. Donner l'équation de la tangente à C_f au point de C_f d'abscisse 0.

Exercice 3. Calculer les primitives suivantes, en précisant l'ensemble sur lequel elles ont un sens :

$$I_1 = \int \frac{x-3}{x-2}\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int \frac{e^x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x.$$

Indication : pour la primitive I_2, on pourra poser le changement de variable $u = e^x$.

Exercice 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

1. Démontrer l'égalité
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$
Indication : commencer par poser $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$, mettre ces fractions sous même dénominateur et montrer que $a = 1$ et $b = -1$.

2. Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale
$$J = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x.$$
3. Calculer l'intégrale
$$I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Indication : procéder par intégration par parties, puis faire apparaître l'intégrale J, déjà calculée...

Exercice 5 (Bonus). Ecrire un court poème décrivant une qualité de votre encadrant de TD.
