# Correction

**Correction 1.** La fonction est clairement continue sur $]1;+\infty[$ et sur $]-\infty;1[$. Pour que $f$ soit continue, il faut et il suffit que $f$ admette une limite à droite et à gauche en $x=1$ et que ces limites coïncident. Mais on a

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \quad \text{tandis que} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = a^2.$$

La fonction $f$ est donc continue en $x=1$ si et seulement si $a^2=a$, c'est-à-dire si et seulement si $a=0$ ou $a=1$.

**Correction 2.** *Condition en $x=0$.* La fonction $g$ est clairement continue sur $]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$. On considère les limites à droite et à gauche en $x=0$. On a :

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \alpha+\beta.$$

*Condition en $x=1$.* D'autre part, on a :

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \alpha e^1 + \beta e^1 + \gamma\left(e^1 - e^{-1}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = e^1.$$

La fonction $g$ est continue si et seulement si le triplet $(\alpha,\beta,\gamma)$ vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1, \\ e^{-1}\alpha + e^1\beta + \left(e^1-e^{-1}\right)\gamma = e^1. \end{cases}$$

*Résolution du système.* On résout ce système, par exemple en retirant $e^{-1}L_1$ à $L_2$. On trouve le système équivalent :

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1, \\ \left(e^1-e^{-1}\right)\beta + \left(e^1-e^{-1}\right)\gamma = e^1-e^{-1}. \end{cases}$$

On peut simplifier par $e^1-e^{-1}$ dans la seconde équation et on trouve :

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1, \\ \beta+\gamma = 1. \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\alpha=\gamma, \quad \beta = 1-\gamma, \quad \gamma=\gamma.$$

Ainsi l'ensemble des triplets $(\alpha,\beta,\gamma)$ pour lesquels la fonction $g$ est continue est donné par :

$$\{(0,1,0)+\gamma(1,-1,1) \mid \gamma\in\mathbb{R}\}.$$

**Correction 3.** En mettant les puissances de 2 et les puissances de 3 dans le même membre, et en factorisant, on trouve :

$$\begin{aligned} & 2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \\ \iff\ & 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \\ \iff\ & 2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1) \\ \iff\ & 3\cdot 2^{2x-1} = 2^2\cdot 3^{x-\frac{1}{2}} \\ \iff\ & 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

On résout alors cette équation en passant au logarithme. Elle est équivalente (car le logarithme est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$) à :

$$(2x-3)\ln(2) = \left(x-\frac{3}{2}\right)\ln(3).$$

Ce qui donne :

$$(2\ln(2)-\ln(3))x = 3\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3).$$

En isolant $x$, on obtient :

$$x = \frac{3\ln(2)-\frac{3}{2}\ln(3)}{2\ln(2)-\ln(3)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{3}{2}.$$

L'équation admet donc une unique solution, $x=\frac{3}{2}$.

**Correction 4.** On remarque d'abord que $f$ est continue en 0, car, pour $x\neq 0$, on a

$$|f(x)-f(0)| = \left|x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2,$$

et $x^2\to 0$ quand $x\to 0$. D'autre part, $f$ est clairement $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
Étudions la dérivabilité en 0 en revenant à la définition, c'est-à-dire en étudiant si le taux d'accroissement admet une limite. On a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

et ceci tend vers 0 quand $x$ tend vers 0, grâce à la majoration $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$. Ainsi, $f$ est dérivable en 0, avec $f'(0)=0$.
Pour déterminer si $f$ est $C^1$ en 0, il faut étudier si la dérivée est continue en 0. Pour $x\neq 0$, on a :

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or, posons $u_n = \frac{1}{2n\pi}$. Alors, $u_n$ tend vers 0, et

$$f'(u_n) = \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \neq f'(0).$$

Ainsi, $f'$ n'est pas continue en 0, et $f$ n'est pas de classe $C^1$.

Concernant $g$, on peut procéder comme pour $f$ pour démontrer que $g$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$, dérivable en 0 avec $g'(0)=0$. De plus, pour $x\neq 0$, on a :

$$g'(x) = 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

De sorte que :

$$|g'(x)-g'(0)| \leq 3|x|^2 + |x|.$$

Ceci entraîne que $g'$ est continue en 0, et donc que $g$ est de classe $C^1$. On peut aussi prouver directement que $g$ est de classe $C^1$ en appliquant le théorème de prolongement d'une dérivée, puisque, pour $x\neq 0$,

$$g'(x) = 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

et que cette quantité tend vers 0 si $x$ tend vers 0.