

## Devoir maison 1 – Fonctions réelles, continuité, dérivation

*Ce devoir est facultatif, et uniquement pour les personnes ayant eu moins de la moyenne au CC1. Vous pouvez vous mettre par deux et rendre une unique copie, en justifiant qui a travaillé sur quoi à la fin. Les étoiles indiquent le niveau de difficulté de l'exercice.*

*La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Pour chaque résultat du cours invoqué, il est nécessaire de rappeler l'ensemble des hypothèses permettant de l'utiliser.*

**Exercice 1 (★).** On considère une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} (ax)^2 & \text{si } x \leq 1, \\ a \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

où  $a \in \mathbb{R}$  est une constante réelle. Pour quelles valeurs de  $a$  la fonction  $f$  est-elle continue ?

**Exercice 2 (★★).** Déterminer toutes les valeurs des constantes  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  telles que la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suivante soit continue :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \alpha e^x + \beta x + \gamma x(e^x - e^{-x}) & \text{si } 0 < x < 1, \\ e^{2-x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

**Exercice 3 (★★).** Résoudre l'équation suivante d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

**Exercice 4 (★★★).** Étudier si les fonctions suivantes sont dérivables et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

**Exercice 5 (Bonus).** Proposer une liste de mots (entre 10 et 457) qui vous font penser à votre encadrant de TD.