

## Devoir maison 1 – Fonctions réelles, continuité, dérivation

Ce devoir est facultatif, et uniquement pour les personnes ayant eu moins de la moyenne au CC1. Vous pouvez vous mettre par deux et rendre une unique copie, en justifiant qui a travaillé sur quoi à la fin. Les étoiles indiquent le niveau de difficulté de l'exercice.

La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Pour chaque résultat du cours invoqué, il est nécessaire de rappeler l'ensemble des hypothèses permettant de l'utiliser.

**Exercice 1 (★).** On considère une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} (ax)^2 & \text{si } x \leq 1, \\ a \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

où  $a \in \mathbb{R}$  est une constante réelle. Pour quelles valeurs de  $a$  la fonction  $f$  est-elle continue ?

**Exercice 2 (★★).** Déterminer toutes les valeurs des constantes  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  telles que la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suivante soit continue :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \alpha e^x + \beta x + \gamma x(e^x - e^{-x}) & \text{si } 0 < x < 1, \\ e^{2-x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

**Exercice 3 (★★).** Résoudre l'équation suivante d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

**Exercice 4 (★★★).** Étudier si les fonctions suivantes sont dérivables et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

**Exercice 5 (Bonus).** Proposer une liste de mots (entre 10 et 457) qui vous font penser à votre encadrant de TD.