Examen blanc

Aucune notation ne sera faite ici : il s'agit d'un petit entraînement en vue de se préparer au mieux à l'examen final. Vous pouvez rédiger cela directement dans vos feuilles de TD et pas nécessairement sur une feuille à part.
Durée : 60 minutes.

Exercice 1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit continue et dérivable en 1.

Exercice 2. Calculer les primitives suivantes, en précisant l'ensemble sur lequel elles ont un sens :

$$I_1 = \int \frac{x+3}{x+2}\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int \frac{e^x}{e^x - \pi}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est strictement croissante et impaire.
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$. Est-ce que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur son image ? Si oui, calculer la bijection réciproque.

Exercice 4. Résoudre le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1 + y(t)^2}{2y(t)} & (E) \\ y(0) = 5 & (CI) \end{cases}$$

Exercice 5. Calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$.

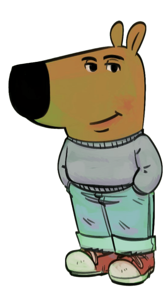

FIGURE 1 – *Juste un prof chill qui vous attend au fond de la classe si vous avez des questions...*