Correction

Réponse 1. Soit $f\ : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction, telle que son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ vérifie que si $x \in \mathscr{D}_f$ alors $-x \in \mathscr{D}_f$.

1. Une fonction f est dite **paire** si, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a :
$$f(-x) = f(x).$$
2. Une fonction f est dite **impaire** si, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a :
$$f(-x) = -f(x).$$

Réponse 2.
1. Si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
2. Si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
3. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\quad \ln(a^n) = n\ln(a)$.

Réponse 3. L'ensemble des éléments de $\mathbb{Q}$ tels qu'ils s'écrivent comme le produit de deux nombres impairs est
$$\{q \in \mathbb{Q} \mid \exists k, l \in \mathbb{Z},\ q = (2k+1)(2l+1)\}.$$

Réponse 4. Soit Γ une fonction définie comme
$$\Gamma\ : \mathscr{D}_\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{\tan(x)}{x}.$$

1. La fonction Γ est définie lorsque $x \neq 0$ (car x est au dénominateur) et lorsque $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est définie, c'est-à-dire lorsque $x \neq \frac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$. On remarque d'ailleurs que si $k = 0$, alors $\frac{k\pi}{2} = 0$. Ainsi, le domaine de définition est simplement
$$\mathscr{D}_\Gamma = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \setminus \mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
2. En simplifiant l'expression $x\cos(x)\Gamma(x)$, on a :
$$x\cos(x) \cdot \frac{\tan(x)}{x} = \cos(x) \cdot \tan(x) = \sin(x),$$
l'équation devient donc :
$$\sin(x) = \frac{1}{2}.$$
Les solutions sur $[0, \pi]$ sont donc
$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6},$$
tandis que les solutions sur $\mathbb{R}$ sont données par :
$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Réponse 5. Posons $u = e^x$. L'équation devient alors
$$u^2 - u - 6 = 0.$$
Résolvons cette équation du second degré :
$$u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$u_1 = 3 \quad \text{ou} \quad u_2 = -2 \quad \text{(solution impossible car } u = e^x > 0\text{)}$$
Donc $e^x = 3$, ce qui donne l'unique solution $x = \ln(3)$.