Feuille TD 1 : Logique et ensembles

Exercice 1. Quelle est la négation de l'assertion « tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans » ?

Exercice 2. Écrire la négation des propositions suivantes.

(a) $(A \text{ ou } B) \Rightarrow C$. (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(y)$.

Exercice 3. En utilisant la contraposée, donner une proposition équivalente aux propositions suivantes :

(a) Si c'est lundi, alors c'est raviolis

(b) Si les étudiants ne travaillent pas, ils n'apprennent pas de mathématiques

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4. Vrai ou Faux ?

(a) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^3$.

(b) $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \notin \mathbb{Q}$.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, ((n \text{ est pair et } x \geq 0) \text{ ou } (n \text{ est impair et } x \leqslant 0)) \Rightarrow (-1)^n x^3 \geq 0$.

Exercice 5. On considère les ensembles $A = \{2, 3, 5, 6\}$ et $B = \{1, 2, -3\}$. Etablir si les assertions qui suivent sont vraies ou fausses, en justifiant.

(a) $\forall x \in A, \exists y \in B, x + y \in A$.

(b) $\forall x \in A, \forall y \in B, x + y \in A$.

(c) $\exists x \in A, \forall y \in B, x + y \in A$.

(d) $\exists x \in A, \forall y \in B, \exists z \in B, x + y + z \in A$.

Exercice 6. Remplacez les pointillés dans les formules suivantes par le symbole adéquat : « $\in$ », « $\subset$ » ou « $=$ ».

(a) $1 \ldots \mathbb{N}$ (b) $\{1\} \ldots \mathbb{N}$ (c) $A \ldots B \iff \forall y \ldots A, y \ldots B$

(d) $\{1, 2\} \ldots \mathbb{N}$ (e) $1 \ldots \{1\}$ (f) $A \ldots B \iff \forall y \ldots A, y \ldots B$ et $\forall y \ldots B, y \ldots A$

(dans les questions (c) et (f), A et B sont des parties d'un ensemble E).

Exercice 7. On pose $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 3, 4\}$ et $C = [-2, 4[$. Déterminer les ensembles $A \cup B, A \cup C, B \cup C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \setminus B, C \setminus A, C \cap Z$ et $C \cap N$.

Exercice 8. Écrire explicitement l'ensemble des parties de $X = \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$.

Exercice 9. Soit $A = \{0, 1, 8\}$ et $B = \{\{0\}, \{1, 2\}, \{1\}\}$. Vrai ou faux ?

(a) $A \in \mathbb{N}$ (b) $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (c) $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (d) $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (e) $B \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 10. Soit $\{a_1, \ldots, a_N\}$ un ensemble de N nombres réels. Soit C un autre réel, et on suppose que

$$a_1 + \cdots + a_N \geq C.$$

Montrer qu'il existe $i \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $a_i \geq \frac{C}{N}$.