Corrigé de la feuille TD 1 : Logique et ensembles

Exercice 1. La négation de
« tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans » est
« il y a au moins un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus, et qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans »

Exercice 2. (a) $\overline{(A \text{ ou } B) \Rightarrow C} \iff (A \vee B) \wedge \overline{C}$.
(b) $\overline{\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(y)} \iff \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) > g(y)$.

Exercice 3.
(a) « Si c'est lundi, alors c'est raviolis » $\iff$ « Si c'est pas raviolis, alors c'est pas lundi »
(b) « Si les étudiants ne travaillent pas, ils n'apprennent pas de mathématiques »
$\iff$ « Si les étudiants apprennent des mathématiques, alors ils travaillent ».
(c) « $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin \mathbb{Q})$ » $\iff$ « $\forall x \in \mathbb{R}, (x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{Q})$ ».

Exercice 4.
(a) « $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^3$ » est vrai.
Démonstration. Soit $x \in \mathbb{N}$. Alors $y = x^3 + 1 \in \mathbb{N}$, et $y > x^3$.
(b) « $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ » est vrai.
Démonstration. Soit $x \in \mathbb{N}$. Alors $x \in \mathbb{Z}$ et $x^2 \in \mathbb{Q}$, donc la contraposée de l'implication $x^2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ est vraie, et donc la proposition est vraie.
(c) « $\forall x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \notin \mathbb{Q}$ » est faux.
Démonstration. Prenons $x = 1/2$. Alors $x \notin \mathbb{Z}$, mais $x^2 = 1/4 \in \mathbb{Q}$.
(d) « $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, ((n \text{ est pair et } x \geq 0) \text{ ou } (n \text{ est impair et } x \leqslant 0)) \Rightarrow (-1)^n x^3 \geq 0$ » est vrai.
Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair et $x \geqslant 0$, $(-1)^n = 1$ et $x^3 \geqslant 0$, donc $(-1)^n x^3 \geqslant 0$. Si n est impair et $x \leqslant 0$, $(-1)^n = -1$ et $x^3 \leqslant 0$, donc $(-1)^n x^3 \geqslant 0$

Exercice 5. $A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, -3\}$.
(a) $\forall x \in A, \exists y \in B, x + y \in A$. Vrai.
Démonstration. $2 + 1 = 3 \in A$, $3 + 2 = 5 \in A$, $5 + 1 = 6 \in A$, $6 + (-3) = 3 \in A$.
(b) $\forall x \in A, \forall y \in B, x + y \in A$. Faux.
Démonstration. $2 \in A$, $2 \in B$, mais $2 + 2 = 4 \notin A$.
(c) $\exists x \in A, \forall y \in B, x + y \in A$. Faux.
Démonstration. Pour chaque $x \in A$, on montre que la proposition « $\forall y \in B, x + y \in A$ » est fausse :

- $2 \in A$, $2 \in B$, mais $2 + 2 = 4 \notin A$.
- $3 \in A$, $1 \in B$, mais $3 + 1 = 4 \notin A$.
- $5 \in A$, $2 \in B$, mais $5 + 2 = 7 \notin A$.
- $6 \in A$, $1 \in B$, mais $6 + 1 = 7 \notin A$.

(d) $\exists x \in A, \forall y \in B, \exists z \in B, x+y+z \in A$. Vrai.

Démonstration. Prenons $x = 3 \in A$. Alors si $y \in B$, $t = x + y \in C = \{4, 5, 0\}$. Or pour chaque élément $t \in C$, il existe un $z \in B$ tel que $t + z \in A$. En effet : $1 \in B$ et $4 + 1 = 5 \in A$, $1 \in B$ et $5 + 1 = 6 \in A$, $2 \in B$ et $0 + 2 = 2 \in A$. Au total, pour tout $y \in B$, on a bien trouvé $z \in B$ tel que $3 + y + z = x + y + z = t + z \in A$.

Exercice 6.

(a) $1 \in \mathbb{N}$ (b) $\{1\} \subset \mathbb{N}$ (c) $A \subset B \iff \forall y \in A, y \in B$

(d) $\{1, 2\} \subset \mathbb{N}$ (e) $1 \in \{1\}$ (f) $A = B \iff \forall y \in A, y \in B$ et $\forall y \in B, y \in A$

Exercice 7. $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 3, 4\}$ et $C = [-2, 4[$.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cup C = [-2, 4]$, $B \cup C = [-2, 4]$, $A \cap B = \{1, 4\}$,
$A \cap C = \{1, 2\}$, $B \cap C = \{1, 3\}$, $A \setminus B = \{2\}$, $C \setminus A = [-2, 1[\cup]1, 2[\cup]2, 4[$,
$C \cap Z = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $C \cap N = \{0, 1, 2, 3\}$.

Exercice 8. $X = \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$.

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{\heartsuit\}, \{\clubsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\heartsuit, \clubsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit\}, X\}$$

Exercice 9. Soit $A = \{0, 1, 8\}$ et $B = \{\{0\}, \{1, 2\}, \{1\}\}$.

(a) $A \in \mathbb{N}$: Faux (par contre, il est vrai que $A \subset \mathbb{N}$). (b) $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$: Vrai.

(c) $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$: Faux (par contre, il est vrai que $\{A\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$).

(d) $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$: Faux. (e) $B \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$: Vrai.

Exercice 10. Soit $\{a_1, \ldots, a_N\}$ un ensemble de N nombres réels. Soit C un autre réel, et on suppose que

$$a_1 + \cdots + a_N \geq C.$$

Alors il existe $i \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $a_i \geq \frac{C}{N}$.
Pour montrer l'implication

$$\text{(I)} \qquad (a_1 + \cdots + a_N \geqslant C) \Rightarrow \left(\exists i \in \{1, \ldots, N\}, a_i \geqslant \tfrac{C}{N}\right),$$

on va montrer sa contraposée. Supposons donc

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\}, a_i < \frac{C}{N}.$$

Alors

$$a_1 + \cdots + a_N < \underbrace{\frac{C}{N} + \cdots + \frac{C}{N}}_{N \text{ fois}} = C,$$

proposition qui est bien la négation de la proposition de gauche de l'implication (I). Donc le résultat voulu est montré.