Feuille TD 2 : Fonctions Réelles d'une variable réelle

Exercice 1.

$$\begin{aligned} a(x) &= \left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2 = e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-\left(e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}\right) \\ &= e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x} = \boxed{4}. \end{aligned}$$

$$B = e^{-\ln(3)} = \frac{1}{e^{\ln(3)}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$C = \ln\left(e^{-5}\right) = \boxed{-5}$$

$$D = \frac{e^{\ln 7-\ln 2}}{e^{\ln 7+\ln 2}} = \frac{e^{\ln(7/2)}}{e^{\ln(7\cdot 2)}} = \frac{7/2}{7\cdot 2} = \boxed{\frac{1}{4}} \qquad \text{(ou bien} \quad D = e^{\ln 7-\ln 2-\ln 7-\ln 2} = e^{-2\ln 2} = e^{\ln(2^{-2})} = 2^{-2} = \frac{1}{4})$$

$$E = \ln\frac{3}{5}+\ln\frac{5}{3} = \ln\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\right) = \ln 1 = \boxed{0} \qquad \text{(ou bien} \quad E = \ln 3-\ln 5+\ln 5-\ln 3 = 0)$$

$F = \ln(e+1)$ Pas de simplification.

$G = \dfrac{\ln 3}{\ln 5}$ Pas de simplification.

h) L'équation $e^x = -2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, car $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x > 0 > -2$.

i) Si $x\in\mathbb{R}$, $e^{-x} = 2 \iff \ln\left(e^{-x}\right) = \ln 2, \iff -x = \ln 2, \iff \boxed{x = -\ln 2}$.

j) Si $x > 0$, $\ln x = -2 \iff \exp(\ln x) = \exp(-2), \iff \boxed{x = e^{-2}}$.

k) Si $x < 0$, $\ln(-x) = 2 \iff \exp(\ln(-x)) = \exp(2), \iff -x = e^2, \iff \boxed{x = -e^2}$.

l) Si $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 2^{x+3} = 3^{x-7} &\iff \exp\left((x+3)\ln 2\right) = \exp\left((x-7)\ln 3\right) \\ &\iff (x+3)\ln 2 = (x-7)\ln 3 \\ &\iff 3\ln 2+7\ln 3 = x(\ln 3-\ln 2) \\ &\iff \boxed{x = \frac{3\ln 2+7\ln 3}{\ln 3-\ln 2} = \frac{\ln(2^3\cdot 3^7)}{\ln(3/2)}}. \end{aligned}$$

m) Si $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{2x} = e^x+6 &\iff (e^x)^2-e^x-6 = 0 \\ &\iff e^x \text{ est racine du polynôme} \quad z^2-z-6 = (z-3)(z+2) \\ &\iff e^x = 3 \text{ ou } e^x = -2 \\ &\iff e^x = 3 \text{ (l'équation } e^x = -2 \text{ n'a pas de solution dans } \mathbb{R}, \text{Cf h)}) \\ &\iff \boxed{x = \ln 3}. \end{aligned}$$

n) Si $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{2x} = 5e^x-6 &\iff (e^x)^2-5e^x+6 = 0 \\ &\iff e^x \text{ est racine du polynôme} \quad z^2-5z+6 = (z-3)(z-2) \\ &\iff e^x = 3 \text{ ou } e^x = 2 \\ &\iff \boxed{x = \ln 3 \text{ ou } x = \ln 2}. \end{aligned}$$

o) Si $x > 0$ ($]0,+\infty[$ est le domaine de définition du membre de gauche de l'équation),

$$\begin{aligned} (\ln x)^2-\ln\left(x^2\right) = 3 &\iff (\ln x)^2-2\ln x-3 = 0 \\ &\iff \ln x \quad \text{est racine du polynôme} \quad z^2-2z-3 = (z+1)(z-3) \\ &\iff \ln x = -1 \text{ ou } \ln x = 3 \\ &\iff \boxed{x = e^{-1} \text{ ou } x = e^3}. \end{aligned}$$

Exercice 2.

(1) L'image de $[0,1[$ par f est

$$f([0,1[) = \{y\in\mathbb{R} \mid \exists x\in[0,1[, y = f(x)\} = \{f(x) \mid x\in[0,1[\}.$$

(2) L'ensemble des antécédents de 1 par f est

$$f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}.$$

(3) L'ensemble des entiers naturels pairs dont l'image par f est inférieure ou égale à 5 est l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k, f(n) \leqslant 5\}.$$

Exercice 3.
(a) «Il y a au moins un nombre réel qui a deux antécédents par f» s'écrit

$$\exists y \in \mathbb{R}, \exists x_1 \in \mathbb{R},\ \exists x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2 \text{ et } y = f(x_1) = f(x_2).$$

(b) «L'image de f contient au moins deux éléments distincts» s'écrit

$$\exists x_1 \in \mathbb{R},\ \exists x_2 \in \mathbb{R},\ f(x_1) \neq f(x_2).$$

(c) «L'image réciproque de $[50, +\infty[$ par f n'est pas majorée» s'écrit

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \geqslant M, f(x) \geqslant 50.$$

Exercice 4. Si f est une fonction, on note D_f son domaine de définition.
a) $a(x) = \frac{1}{x-1}$. $\quad D_a = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} = \boxed{\mathbb{R}\backslash\{1\}}$.
b) $b(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$. $\quad D_b = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0 \text{ et } x - 1 \neq 0\} = [0, +\infty[\backslash\{1\}$, $\quad \boxed{D_b = [0, 1[\cup]1, +\infty[}$.
c) $c(x) = \sqrt{\frac{x-5}{x^2-6x-7}}$. $\quad D_c = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x - 7 \neq 0 \text{ et } \frac{x-5}{x^2-6x-7} \geqslant 0\right\}$.
On étudie le signe de $\frac{x-5}{x^2-6x-7} = \frac{x-5}{(x-7)(x+1)}$:

x	$-\infty$		-1		5		7		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{x-5}{(x-7)(x+1)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

et on en déduit que $\boxed{D_c =]-1, 5]\cup]7, +\infty[}$.
d) $d(x) = \sqrt{x - x^3}$. $\quad D_d = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x - x^3 \geqslant 0\right\}$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - x^3 = x(1-x)(1+x)$. Le signe de $x - x^3$ est donc donné par le tableau suivant.

x	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-x^3$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

et donc $\boxed{D_d =]-\infty, -1] \cup [0, 1]}$.
e) $e(x) = \frac{1}{4-x^2}$. $\quad D_e = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 \neq 0\right\} = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$, $\quad \boxed{D_e =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[}$.
f) $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$ $\quad D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 - x \neq 0 \text{ et } \frac{2+x}{2-x} > 0\right\}$. Le signe de $\frac{2+x}{2-x}$ est donné par le tableau suivant.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2+x}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Et donc $\boxed{D_f =]-2, 2[}$.
g) $g(x) = \sqrt{\frac{\ln(x)^2-4}{\ln(x+1)}}$. $\quad D_g = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0,\ x + 1 > 0,\ \ln(x+1) \neq 0,\ \frac{(\ln x)^2-4}{\ln(x+1)} \geqslant 0\right\}$. Les contraintes sur x apparaissant dans cette expression de D_g peuvent se simplifier. En effet, la contrainte $x > 0$ implique $x + 1 > 0$ et $\ln(x + 1) > 0$. Donc $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0,\ (\ln x)^2 - 4 \geqslant 0\right\}$. On étudie le signe de $(\ln x)^2 - 4 = (\ln x - 2)(\ln x + 2)$ suivant la valeur de $x > 0$.

x	0		e^{-2}		e^2		$+\infty$
$\ln x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(\ln x)^2 - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc $\boxed{D_g =]0, e^{-2}] \cup [e^2, +\infty[}$.

h) $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \geqslant 1 > 0$, donc $\boxed{D_h = \mathbb{R}}$.
i) $i(x) = \sqrt{1-x^2}$. $D_i = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 \geqslant 0\right\}$. Donc $\boxed{D_i = [-1,1]}$.
j) $j(x) = \sqrt{x^2-1}$. $D_j = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-1 \geqslant 0\right\}$. Donc $\boxed{D_j =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[}$.
k) $k(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$. $D_k = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2+2x-3 \geqslant 0\right\}$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$. Le coefficient dominant de ce polynôme de degré 2 étant positif, x^2+2x-3 est négatif quand x est entre les deux racines -3 et 1, positif sinon. Donc $\boxed{D_k =]-\infty,-3] \cup [1,+\infty[}$.
l) $l(x) = \frac{1}{\ln(x)}$. $D_l = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0\} =]0,+\infty[\setminus\{1\}$. $\boxed{D_l =]0,1[\cup]1,+\infty[}$.
m) $m(x) = \sqrt{\ln(x^2+4)}$. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+4 \geqslant 4$, donc $\ln(x^2+4) \geqslant \ln 4 > 0$, et donc $x \in D_m$. On a donc montré que $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in D_m$, donc $\mathbb{R} \subset D_m$, et donc $\boxed{D_m = \mathbb{R}}$.

Exercice 5.
a) $f(x) = \frac{\tan x}{x^2+4x+4}$ et $g(x) = \cos x$.
$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_{\tan}, x^2+4x+4 \neq 0\right\}$. Comme $D_{\tan} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $x^2+4x+4=0$ si et seulement si $x=-2$,

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}\setminus\left(\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{-2\}\right)}.$$

Par ailleurs, $\boxed{D_g = \mathbb{R}}$, et $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \in D_f\}$. Or

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x \in [-1,1] \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\subset D_f,$$

donc $\boxed{D_{f\circ g} = \mathbb{R}}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f \circ g(x) = \frac{\tan(\cos x)}{(\cos x)^2 + 4(\cos x) + 4}}.$$

b) $f(x) = 2\ln x$ et $g(x) = \exp(\frac{1}{x})$
$\boxed{D_f =]0,+\infty[}$, $\boxed{D_g = \mathbb{R}^*}$, et on a aussi $\boxed{D_{f\circ g} = \mathbb{R}^*}$ car pour tout $x \in D_g = \mathbb{R}^*$, $g(x) > 0$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \boxed{f \circ g(x) = 2\ln(\exp(1/x)) = 2/x}.$$

c) $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$.
$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \geqslant 0\} = \boxed{[1,+\infty[}$ et $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-1 \neq 0\right\} = \boxed{\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}}$. Donc

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1, x \neq 1, \frac{1}{x^2-1} \geqslant 1\right\}.$$

Or, si $x \neq \pm 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-1} \geqslant 1 &\iff (x^2-1>0 \quad \text{et} \quad 1 \geqslant x^2-1) \quad \text{ou} \quad (x^2-1<0 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant x^2-1) \\
&\iff 1 < x^2 \leqslant 2 \quad \text{ou} \quad 2 \leqslant x^2 < 1 \\
&\iff 1 < x^2 \leqslant 2 \\
&\iff -\sqrt{2} \leqslant x < -1 \quad \text{ou} \quad 1 < x \leqslant \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{D_{f\circ g} = [-\sqrt{2},-1[\cup]1,\sqrt{2}]}$, et pour tout $x \in D_{f\circ g}$,

$$\boxed{f \circ g(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2-1} - 1} = \sqrt{\frac{2-x^2}{x^2-1}}}.$$

Exercice 6. $f(x) = x^2-3$, $g(x) = \sqrt{x+3}$. Les domaines de définition de f et g sont respectivement

$$D_f = \mathbb{R} \text{ (car } f \text{ est polynomiale)} \qquad \text{et} \qquad D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x+3 \geqslant 0\} = [-3,+\infty[.$$

Le domaine de $f \circ g$ est

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \in [-3,+\infty[\mid \sqrt{x+3} \in \mathbb{R}\right\} = [-3,+\infty[,$$

et

$$\forall x \in [-3,+\infty[, \qquad f \circ g(x) = \left(\sqrt{x+3}\right)^2 - 3 = x.$$

Le domaine de $g \circ f$ est

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3 \in [-3, +\infty[\} = \mathbb{R},$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g \circ f(x) = \sqrt{x^2 - 3 + 3} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ ne sont donc pas les mêmes (d'une part parce que leurs domaines de définition respectifs sont différents, et d'autre part parce que pour $x \in [-3, 0[$, $f \circ g(x) = x \neq -x = |x| = g \circ f(x)$ (une seule de ces deux raisons suffirait à conclure que $f \circ g \neq g \circ f$).

Exercice 7. $f(x) = x^3 - 3x$.
$f(0) = f(\sqrt{3}) = 0$, donc 0 a au mois 2 antécédents distincts par f (en fait, il y en a 3, qui sont $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$), et donc f n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ sur son image.

Exercice 8. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$,
a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underline{f(-x)} = \frac{-2x}{1+(-x)^2} = -\frac{2x}{1+x^2} \underline{= -f(x)}$, donc f est impaire.
b) Si $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, donc l'unique antécédent de 0 par f est 0 : $\boxed{f^{-1}(\{0\}) = \{0\}}$.
c) Soit $y \neq 0$. Alors $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation $f(x) = y$ si et seulement si $2x = (1+x^2)y$, c'est à dire $\frac{2}{y}x = 1+x^2$. Cette équation est une équation polynomiale de degré 2 en x, qui se réécrit :

$$x^2 - \frac{2}{y}x + 1 = 0.$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = \left(-\frac{2}{y}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4\left(\frac{1}{y^2} - 1\right) = 4\frac{1-y^2}{y^2}.$$

Si $y^2 > 1$ (c'est à dire $y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$), on a donc $\Delta < 0$, et l'équation $y = f(x)$ n'a donc pas de solution réelle, c'est à dire que y n'a pas d'antécédent par f.

Si $y^2 = 1$ (c'est à dire $y = -1$ ou $y = 1$), $\Delta = 0$, et l'équation $y = f(x)$ a une unique solution, donnée par

$$x = \frac{2/y}{2} = \frac{1}{y}.$$

Autrement dit, l'unique antécédent de $y = 1$ par f est $x = 1$, l'unique antécédent de $y = -1$ par f est $x = -1$.

Si $y^2 < 1$ (c'est à dire $y \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, puisqu'on supposé au début de cette question que $y \neq 0$), l'équation $y = f(x)$ a deux solutions, données d'une part par

$$x = \frac{2/y + \sqrt{4(1-y^2)/y^2}}{2} = \frac{1}{y} \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y},$$

(avec un signe $+$ si $y > 0$ et un signe $-$ si $y < 0$), d'autre part par

$$x = \frac{2/y - \sqrt{4(1-y^2)/y^2}}{2} = \frac{1}{y} \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y},$$

(avec un signe $-$ si $y > 0$ et un signe $+$ si $y < 0$). Quel que soit le signe de $y \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, y a donc deux antécédents par f, donnés par

$$\boxed{x = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}}.$$

d) On a vu dans les questions précédentes que tout $y \in [-1, 1]$ avait au moins un antécédent par f, et par contre que si $y \notin [-1, 1]$, y n'avait pas d'antécédent par f. Donc l'image de f est $\boxed{f(\mathbb{R}) = [-1, 1]}$.

e) Si $0 < y < 1$, on a évidemment

$$y < 1 < 1 + \sqrt{1-y^2}.$$

On a aussi $0 < y^2 < 1$, donc $0 < 1 - y^2 < 1$, et donc $\sqrt{1-y^2} < 1$, c'est à dire

$$0 < 1 - \sqrt{1-y^2}.$$

Enfin, en multipliant l'inégalité $\sqrt{1-y} < \sqrt{1+y}$ par $\sqrt{1-y}$, on obtient $1 - y < \sqrt{(1+y)(1-y)}$, d'où on déduit

$$1 - \sqrt{1-y^2} < y.$$

On a donc montré

$$0 < 1 - \sqrt{1-y^2} < y < 1 + \sqrt{1-y^2}.$$

En divisant membre à membre ces 3 inégalités par y (on rappelle que $y > 0$), on obtient

$$0 < \frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} < 1 < \frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}.$$

f) Si $-1 < y < 0$, appliquons le résultat de la question e) à $-y \in]0,1[$:

$$0 < -\frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} < 1 < -\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}.$$

En multipliant ces inégalités par -1, on obtient

$$\frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} < -1 < \frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} < 0.$$

g) Si $y \in]0,1[$, la question e) nous permet de localiser les deux antécédents de y par f trouvés à la question c). En effet,

$$\frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} \in]0,1[, \qquad \frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} \in]1,+\infty[.$$

Si $y \in]-1,0[$, on utilise de la même façon le résultat de f) pour en déduire

$$\frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} \in]-\infty,-1[, \qquad \frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} \in]-1,0[.$$

Ainsi, on va montrer que la restriction de f à $I = [-1,1]$ est bijective de I sur $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$. En effet, on a vu :

- $y = -1$ a un unique antécédent par f : $x = -1$ (Cf question c), cas $y^2 = 1$)
- si $y \in]-1,0[$, parmi les deux antécédents de y par f dans $\mathbb{R}$, un seul appartient à $[-1,1]$, à savoir $x = \frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$.
- $y = 0$ a un unique antécédent par f : $x = 0$ (Cf question b))
- si $y \in]0,1[$, parmi les deux antécédents de y par f dans $\mathbb{R}$, un seul appartient à $[-1,1]$, à savoir $x = \frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$.
- $y = 1$ a un unique antécédent par f : $x = 1$ (Cf question c), cas $y^2 = 1$)

$f_{|I}$ est donc bijective de $\boxed{I = [-1,1]}$ sur $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$, et $\forall y \in [-1,1]$,

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad y = -1 \\ \frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} & \text{si} \quad y \in]-1,0[\\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \\ \frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} & \text{si} \quad y \in]0,1[\\ 1 & \text{si} \quad y = 1 \end{cases}$$

On peut simplifier cette expression en

$$\boxed{f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} & \text{si} \quad y \in [-1,0[\\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \\ \frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} & \text{si} \quad y \in]0,1] \end{cases}}$$

Exercice 9. $M(t) = M_0 e^{-0,000436t}$.
Soit T le temps au bout duquel la masse sera divisée par 2. On cherche donc T solution de l'équation

$$M(T) = \frac{M(0)}{2},$$

qui s'écrit aussi

$$M_0 e^{-0,000436T} = \frac{M_0}{2}.$$

T est solution de cette équation si et seulement si $e^{-0,000436T} = 1/2$ (car $M_0 > 0$), c'est à dire

$$-0,000436T = \ln(1/2) = -\ln 2,$$

ou encore

$$T = \frac{\ln 2}{0,000436} \approx 1590 \text{ ans}.$$

Le temps supplémentaire $\tilde{T}$ qu'on doit attendre pour que la masse soit à nouveau divisée par deux vérifie

$$M(T + \tilde{T}) = \frac{M(T)}{2},$$

c'est à dire

$$M_0 e^{-0,000436(T+\tilde{T})} = \frac{M(T)}{2},$$

soit

$$\underbrace{M_0 e^{-0,000436T}}_{M(T)} e^{-0,000436\tilde{T}} = \frac{M(T)}{2}.$$

En divisant membre à membre par $M(T)$, on trouve que $\tilde{T}$ vérifie $e^{-0,000436\tilde{T}} = 1/2$, c'est à dire la même équation que celle qui nous a donné T. Donc $\tilde{T} = T$. On aurait pu anticiper ce résultat en remarquant que le temps T calculé précédemment ne dépendait pas de M_0. T est le "temps de demi-vie" de ce composant radioctif.

Exercice 10. On cherche une fonction f connaissant g et $f \circ g$.
a) $g(x) = \tan \frac{x}{2}$ n'est bien défini que lorsque $x/2$ est dans le domaine de définition de la fonction tangente, c'est à dire quand $x/2$ n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Donc x est dans le domaine de définition D_g de g si et seulement si x n'est pas de la forme $\pi + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit,

$$D_g = \mathbb{R}\setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

On cherche une fonction f telle que $\forall x \in D_g,\ f \circ g(x) = \sin x$. Or, pour tout $x \in D_g$, on a :

$$\begin{aligned}
\sin x &= 2\sin(x/2)\cos(x/2) \qquad (\text{on utilise la formule trigo } : \sin(2a) = 2\sin a \cos a,\ \text{pour } a = x/2)\\
&= 2\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\cos(x/2)\cos(x/2) \qquad (\text{si } x \in D_g,\ \cos(x/2) \neq 0)\\
&= 2\tan(x/2)\cos^2(x/2)\\
&= 2\tan(x/2)\frac{1}{1+\tan^2(x/2)} \qquad \left(\text{car si } a \in D_g, \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a\right)\\
&= f(\tan(x/2)) = f(g(x)),
\end{aligned}$$

avec

$$\boxed{f(y) = \frac{2y}{1+y^2}}.$$

b) On cherche une fonction f telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = f(g(x))$ avec $g(x) = \sin^2 x$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x = f(\sin^2 x) = f(g(x)),$$

en choisissant

$$\boxed{f(y) = 1 - 2y}.$$

Exercice 11.
a) On va utiliser le résultat suivant :
Lemme. *Si $a \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation $\cos x = \cos a$ sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que*

$$x = a \bmod 2\pi \quad \text{ou} \quad x = -a \bmod 2\pi.$$

Ici, pour $x \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\cos(5x) = \cos(2\pi/3 - x) &\iff 5x = 2\pi/3 - x \bmod 2\pi \quad \text{ou} \quad 5x = -(2\pi/3 - x) \bmod 2\pi\\
&\iff 6x = 2\pi/3 \bmod 2\pi \quad \text{ou} \quad 4x = -2\pi/3 \bmod 2\pi\\
&\iff \boxed{x = \pi/9 \bmod \pi/3 \quad \text{ou} \quad x = -\pi/6 \bmod \pi/2}
\end{aligned}$$

x est donc solution de notre équation si et seulement si, modulo 2π, x est égal à l'un des nombres suivants :

$$\pi/9,\ \pi/9 + \pi/3 = 4\pi/9,\ \pi/9 + 2\pi/3 = 7\pi/9,\ \pi/9 + \pi = 10\pi/9,\ \pi/9 + 4\pi/3 = 13\pi/9,\ \pi/9 + 5\pi/3 = 16\pi/9,$$

$$-\pi/6,\ -\pi/6 + \pi/2 = \pi/3,\ -\pi/6 + \pi = 5\pi/6,\ -\pi/6 + 3\pi/2 = 4\pi/3.$$

b) Considérons le trinôme du second degré $2X^2 - 9X + 4$. Son discriminant est

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 49 = 7^2.$$

Ses racines sont $\frac{9+7}{2\cdot 2} = 4$ et $\frac{9-7}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}$. Comme son coefficient dominant est positif, on sait que $2X^2 - 9X + 4$ est positif quand X n'est pas entre les racines. Autrement dit, si $X \in \mathbb{R}$,

$$2X^2 - 9X + 4 > 0 \qquad \iff \qquad X \in]-\infty, 1/2[\cup]4, +\infty[.$$

On va chercher les solutions de l'inégalité $2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0$ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Comme la fonction cosinus est 2π-périodique, pour avoir les solutions sur $\mathbb{R}$, il suffira de translater d'un nombre entier de fois 2π celles obtenues sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Si $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} 2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0 &\iff X = \cos x \in]-\infty, 1/2[\cup]4, +\infty[\\ &\iff \cos x \in [-1, 1/2[\\ &\iff x \in]\pi/3, 5\pi/3[. \end{aligned}$$

Et donc si $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x \in]\pi/3 + 2k\pi, 5\pi/3 + 2k\pi[}.$$

Exercice 12.

a) $a(x) = \text{Arcsin}(\sin(x))$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \in [-1, 1] = D_{\text{Arcsin}}$. Donc $\boxed{D_a = \mathbb{R}}$.

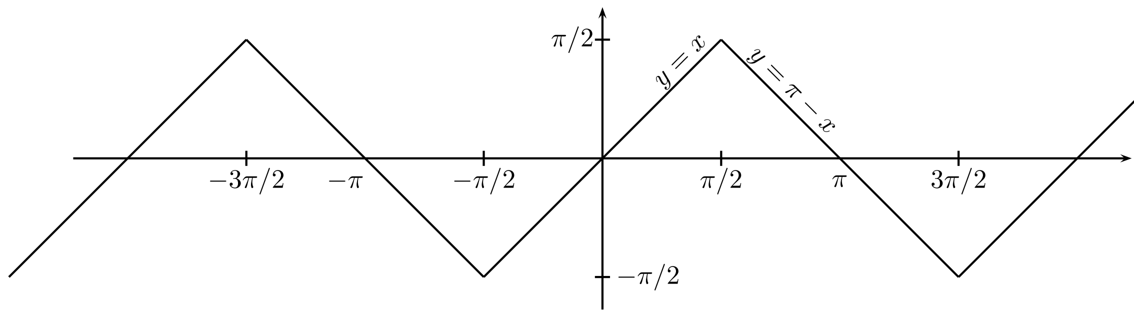
La fonction Arcsinus étant définie comme la bijection réciproque de la restriction de la fonction sinus à $[-\pi/2, \pi/2]$, on a :

$$\boxed{\forall x \in [-\pi/2, \pi/2], \quad a(x) = x}.$$

Pour $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$, on a d'une part que $\pi - x \in [-\pi/2, \pi/2]$, et d'autre part que $\sin(\pi - x) = \sin x$. Donc, d'après ce qui précède,

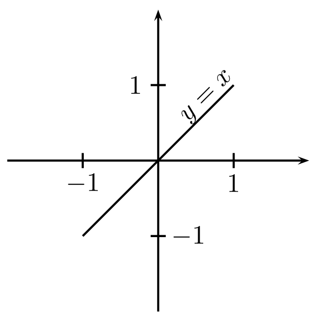
$$\boxed{\forall x \in [\pi/2, 3\pi/2], \quad a(x) = \text{Arcsin}(\sin x) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - x)) = \pi - x}.$$

Comme la fonction sinus est 2π-périodique, la fonction a l'est aussi. Celà se traduit par le fait que le graphe de a est invariant par translation suivant le vecteur $(2\pi, 0)$.



d) $d(x) = \sin(\text{Arcsin}(x))$.

Le domaine de définition de d est $D_d = \{x \in D_{\text{Arcsin}} \mid \text{Arcsin}(x) \in D_{\sin}\} = \{x \in [-1, 1] \mid \text{Arcsin}(x) \in \mathbb{R}\}$, donc $\boxed{D_d = [-1, 1]}$. De plus, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\text{Arcsin}(x)$ est défini comme l'unique antécédent de x par la fonction sinus appartenant à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Quand on applique la fonction sin à Arcsin(x), on retrouve donc x : $\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ d(x) = x}$.



b) $b(x) = \text{Arccos}(\cos(x))$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \in [-1, 1] = D_{\text{Arccos}}$. Donc $\boxed{D_b = \mathbb{R}}$.

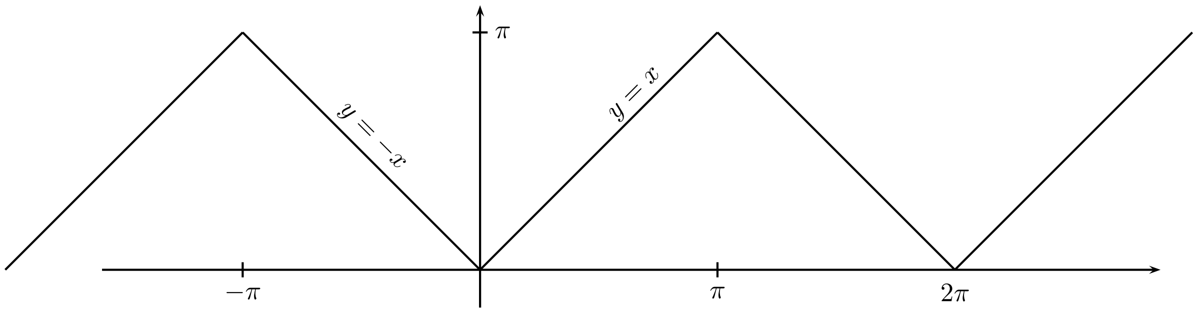
La fonction Arccosinus étant définie comme la bijection réciproque de la restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$,

$$\boxed{\forall x \in [0, \pi], \quad b(x) = x}.$$

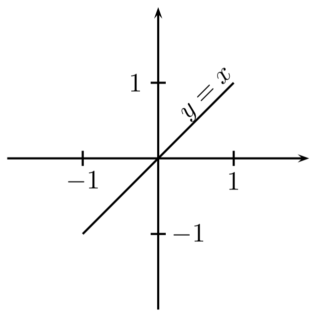
Pour $x \in [-\pi, 0]$, on a d'une part que $-x \in [0, \pi]$, et d'autre part que $\cos(-x) = \cos x$ (parité de la fonction cosinus). Donc, d'après ce qui précède,

$$\boxed{\forall x \in [-\pi, 0], \quad b(x) = \text{Arccos}(\cos x) = \text{Arccos}(\cos(-x)) = -x}.$$

Comme la fonction cosinus est 2π-périodique, la fonction b l'est aussi. Celà se traduit par le fait que le graphe de b est invariant par translation suivant le vecteur $(2\pi, 0)$.



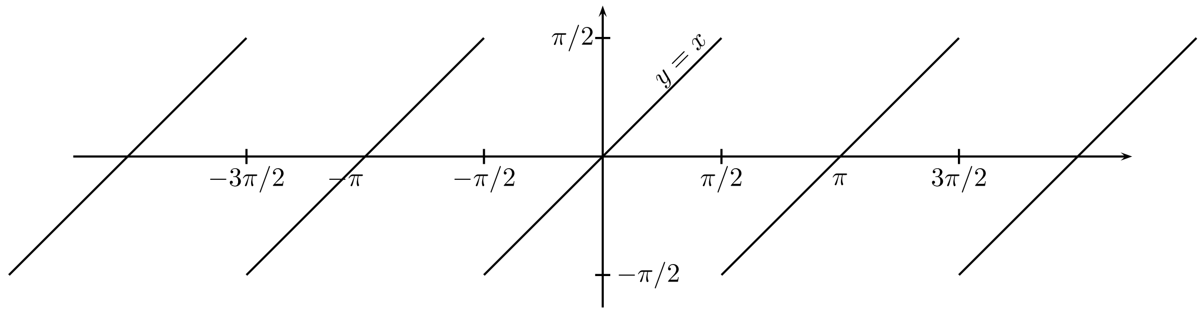
e) $e(x) = \cos(\text{Arccos}(x))$.
Le domaine de définition de e est $D_e = \{x \in D_{\text{Arccos}} \mid \text{Arccos}(x) \in D_{\cos}\} = \{x \in [-1,1] \mid \text{Arccos}(x) \in \mathbb{R}\}$, donc $\boxed{D_e = [-1,1]}$. De plus, pour tout $x \in [-1,1]$, Arccos(x) est défini comme l'unique antécédent de x par la fonction cosinus appartenant à l'intervalle $[0,\pi]$. Quand on applique la fonction cos à Arccos(x), on retrouve donc x : $\boxed{\forall x \in [-1,1],\ e(x) = x}$.



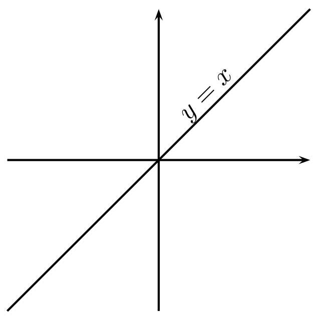
c) $c(x) = \text{Arctan}(\tan(x))$.
Le domaine de définition de la fonction Arctan est $\mathbb{R}$, donc celui de la fonction c est le même que celui de la fonction tangente, à savoir $\boxed{D_c = \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}$.
La fonction Arctan étant définie comme la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à $]-\pi/2,\pi/2[$, on a :

$$\boxed{\forall x \in]-\pi/2,\pi/2[, \quad c(x) = x}.$$

Par ailleurs, la fonction tangente est π-périodique, donc la fonction c l'est aussi. Celà se traduit par le fait que le graphe de a est invariant par translation suivant le vecteur $(\pi, 0)$.



f) $f(x) = \tan(\text{Arctan}(x))$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, Arctan$(x) \in]-\pi/2,\pi/2[\subset D_{\tan}$. Donc le domaine de définition de f est $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, Arctan(x) est l'unique antécédent de x par la fonction tangente appartenant à l'intervalle $]-\pi/2,\pi/2[$. Quand on applique la fonction tangente à Arctan(x), on retrouve donc x : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x}$.



Exercice 13.
a) $a(x) = \ln\left(\ln\left(e^{e^x}\right)\right)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $e^x > 0$, donc $e^{e^x} > e^0 = 1$. Donc $\ln\left(e^{e^x}\right) > \ln(1) = 0$, et donc $x \in D_a$. On a montré l'inclusion $\mathbb{R} \subset D_a$, donc $\boxed{D_a = \mathbb{R}}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{a(x) = \ln(e^x) = x}$.
b) $b(x) = x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln x}}$
$D_b = \{x > 0 \mid \ln x \neq 0,\ \ln x > 0\} = \boxed{]1, +\infty[}$. De plus, pour tout $x \in D_b$,

$$b(x) = \exp\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln x} \cdot \ln x\right) = \exp\left(\ln(\ln(x))\right) = \ln x.$$

Noter que pourtant, le domaine de définition de b est strictement plus petit que celui de ln.
c) $c(x) = \cos(3\mathrm{Arccos}(x))$
$D_c = \{x \in D_{\mathrm{Arccos}},\ 3\mathrm{Arccos}x \in D_{\cos}\} = D_{\mathrm{Arccos}} = \boxed{[-1, 1]}$. En utilisant l'égalité $\cos(\mathrm{Arccos}x) = x$ (Cf exercice 12, question e), et en utilisant successivement les formules

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
- $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$,
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$,
- $\sin^2(a) = 1 - \cos^2 a$

on calcule, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} c(x) = \cos(3\mathrm{Arccos}(x)) &= \cos(\mathrm{Arccos}(x))\cos(2\mathrm{Arccos}(x)) - \sin(\mathrm{Arccos}(x))\sin(2\mathrm{Arccos}(x)) \\ &= x(2\cos^2(\mathrm{Arccos}(x)) - 1) - \sin\mathrm{Arccos}(x) \cdot 2\sin(\mathrm{Arccos}(x))\cos(\mathrm{Arccos}(x)) \\ &= x(2x^2 - 1) - 2\sin^2(\mathrm{Arccos}(x)) \cdot x \\ &= x(2x^2 - 1) - 2(1 - \cos^2(\mathrm{Arccos}(x))) \cdot x \\ &= x(2x^2 - 1) - 2(1 - x^2)x = 2x^3 - x - 2x + 2x^3 = 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall x \in [-1, 1], c(x) = 4x^3 - 3x}$.
d) $d(x) = \cos(\mathrm{Arctan}(x))$.
$D_d = \mathbb{R}$ comme composée de fonctions définies sur $\mathbb{R}$. De plus, si $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{\cos^2 \mathrm{Arctan}x} \qquad (\text{car } \mathrm{Arctan}(x) \in]-\pi/2, \pi/2[, \text{ et donc } \cos\mathrm{Arctan}(x) > 0) \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(\mathrm{Arctan}x)}} \qquad (\text{grâce à la formule trigo } \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a) \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$

e) $e(x, y) = \cos\left(\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arcsin}(y)\right)$.
Si $x \in [-1, 1]$, $\mathrm{Arcsin}x \in [-\pi/2, \pi/2]$, donc $\cos\mathrm{Arcsin}x \geqslant 0$. Comme par ailleurs $\cos^2\mathrm{Arcsin}x + \sin^2\mathrm{Arcsin}x = 1$, on a donc

$$\cos\mathrm{Arcsin}x = \sqrt{1 - \sin^2\mathrm{Arcsin}x} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Dans le calcul suivant, on utilise cette dernière formule, pour $x \in [-1, 1]$ et pour $y \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} e(x, y) &= \cos\mathrm{Arcsin}x \cos\mathrm{Arcsin}y - \sin\mathrm{Arcsin}x \sin\mathrm{Arcsin} \\ &= \boxed{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} - xy}. \end{aligned}$$

f) $f = \mathrm{Arcsin}(3/5) + \mathrm{Arcsin}(4/5)$.
D'après la question précédente,

$$\cos f = \sqrt{1 - (3/5)^2}\sqrt{1 - (4/5)^2} - (3/5) \cdot (4/5) = \sqrt{1 - 9/25}\sqrt{1 - 16/25} - 12/25 = \sqrt{16/25}\sqrt{9/25} - 12/25 = 0.$$

De plus, $\mathrm{Arcsin}(3/5)$ et $\mathrm{Arcsin}(4/5)$ sont tous les deux dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ (parce que $0 \leqslant 3/5, 4/5 \leqslant 1$). Donc $f \in [0, \pi]$. Le seul nombre entre 0 et π dont le cosinus vaut 0 est $\pi/2$. Donc $\boxed{f = \pi/2}$.

Exercice 14.
a) $\exp(2\ln(x)) = 9$. x est solution de l'équation si et seulement si $x > 0$ et $2\ln(x) = \ln(9) = \ln(3^2) = 2\ln 3$, c'est à dire $\boxed{x = 3}$.
b) $\ln\left(\frac{(y+6)(y+3)}{y+2}\right) = 0$.
y est solution de l'équation si et seulement si $y \neq -2$ et $\frac{(y+6)(y+3)}{y+2} = 1$. Cette dernière équation se ré-écrit $(y+6)(y+3) =$

$y+2$, soit $y^2+9y+18 = y+2$, c'est à dire $y^2+8y+16=0$, ou encore $(y+4)^2=0$. L'unique solution de l'équation est donc $\boxed{y=-4}$.

c) $\ln(y+6) - \ln(y+2) + \ln(y+3) = 0$.

Si y est solution de l'équation c), alors $y+6 > y+3 > y+2 > 0$, et y est aussi solution de l'équation de b), donc $y=-4$. Ces contraintes sont incompatibles, puisque $-4+2<0$. Donc l'équation n'a pas de solution.

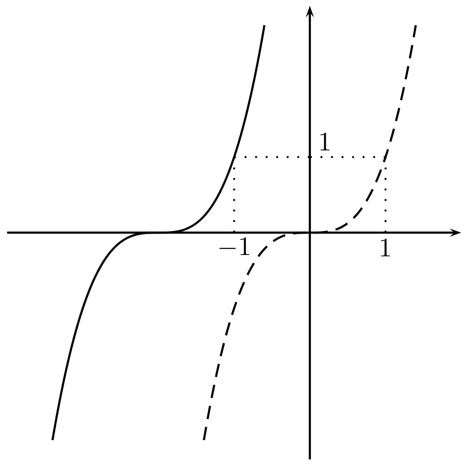
Exercice 15. Dans chaque question, on peut voir sur le dessin, pour la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$: le graphe de f en pointillés, le graphe de la fonction correspondant à la question en trait plein.

a) $a(x) = f(x+2)$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$(x,y) \in \mathcal{C}_a \iff y = a(x) = f(x+2) \iff (x+2,y) \in \mathcal{C}_f \iff (x,y)+(2,0) \in \mathcal{C}_f \iff (x,y) \in (-2,0)+\mathcal{C}_f.$$

$\mathcal{C}_a$ est obtenu par translation de $\mathcal{C}_f$ suivant le vecteur $(-2,0)$.

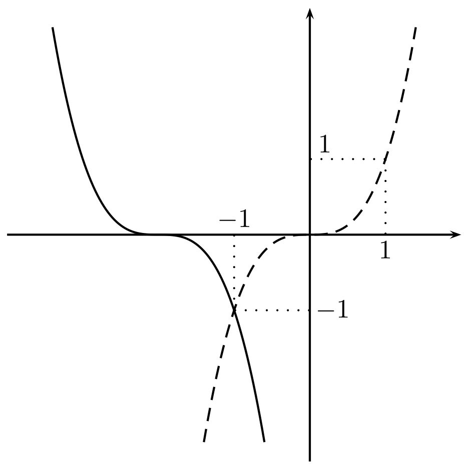


b) $b(x) = -f(x+2)$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$(x,y) \in \mathcal{C}_b \iff y = b(x) = -f(x+2) \iff -y = f(x+2) \iff (x+2,-y) \in \mathcal{C}_f \iff (x,-y) \in (-2,0)+\mathcal{C}_f.$$

$\mathcal{C}_b$ est obtenu à partir de $\mathcal{C}_f$ en faisant une translation de $\mathcal{C}_f$ suivant le vecteur $(-2,0)$, puis une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

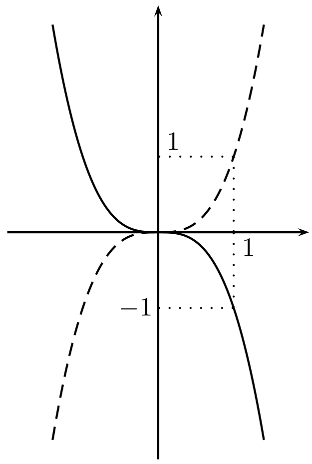


c) $c(x) = -f(x)$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$(x,y) \in \mathcal{C}_c \iff y = c(x) = -f(x) \iff -y = f(x) \iff (x,-y) \in \mathcal{C}_f.$$

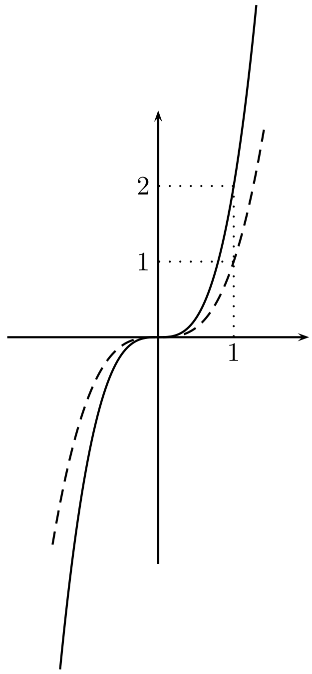
$\mathcal{C}_c$ est obtenu par symétrie de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.



d) $d(x) = 2f(x)$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$(x, y) \in \mathcal{C}_d \iff y = d(x) = 2f(x) \iff y/2 = f(x) \iff (x, y/2) \in \mathcal{C}_f.$$

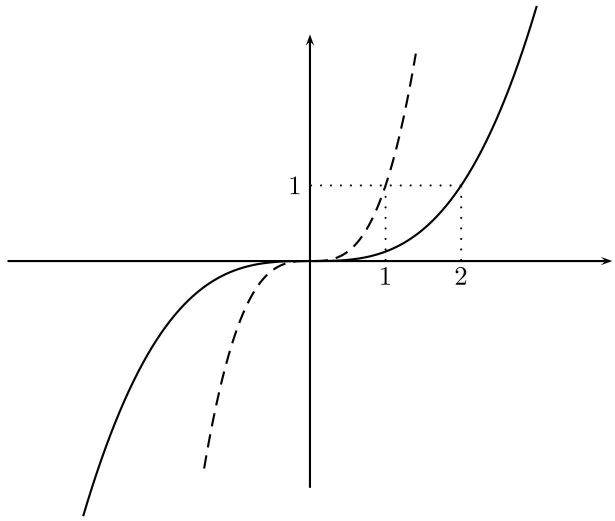
Donc à chaque point $(x, y) \in \mathcal{C}_f$ correspond un point $(x, 2y) \in \mathcal{C}_d$. $\mathcal{C}_d$ est obtenu en «dilatant d'un facteur 2» les ordonnées des points de $\mathcal{C}_f$.



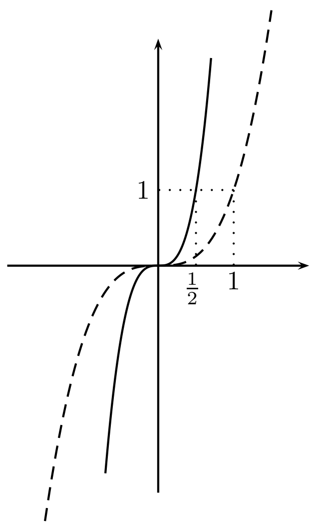
e) $e(x) = f(x/2)$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$(x, y) \in \mathcal{C}_e \iff y = e(x) = f(x/2) \iff (x/2, y) \in \mathcal{C}_f.$$

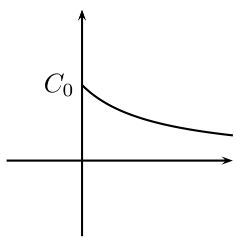
Donc à chaque point $(x, y) \in \mathcal{C}_f$ correspond un point $(2x, y) \in \mathcal{C}_e$. $\mathcal{C}_e$ est obtenu en «dilatant d'un facteur 2» les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$.



g) $g(x) = f(2x)$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors
$$(x, y) \in \mathcal{C}_g \iff y = g(x) = f(2x) \iff (2x, y) \in \mathcal{C}_f.$$
Donc à chaque point $(x, y) \in \mathcal{C}_f$ correspond un point $(x/2, y) \in \mathcal{C}_g$. $\mathcal{C}_g$ est obtenu en «divisant par 2» les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$.



Exercice 16. $C(t) = \frac{C_0}{1+kC_0 t}$.
On connaît bien le graphe de la fonction définie pour $t > 0$ par $f(t) = 1/t$. Pour $t > 0$, $C(t)$ se réécrit $C(t) = \frac{1}{k} \frac{1}{\frac{1}{kC_0}+t} = \frac{1}{k} f(\frac{1}{kC_0} + t)$. En s'inspirant de ce qu'on a vu à l'exercice 15, questions a) et d), le graphe de C s'obtient à partir de celui de f en le «translatant de $1/(k_0 C)$ vers la gauche», puis en dilatant d'un facteur $1/k$ les ordonnées. Par ailleurs, $C(0) = C_0$.



Exercice 17.
Pour $x > 1$, $|x - 1| = x - 1$. Donc
$$\frac{x^2 + |x-1| - 1}{x-1} = \frac{x^2 + x - 1 - 1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x + 2.$$
Donc
$$\lim_{x \to 1,\ x>1} \frac{x^2 + |x-1| - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1,\ x>1} x + 2 = 3.$$

La limite à droite de la quantité qu'on considère est 3.

Pour $x - 1$, $|x-1| = -(x-1)$. Donc

$$\frac{x^2+|x-1|-1}{x-1} = \frac{x^2-(x-1)-1}{x-1} = \frac{(x-1)x}{x-1} = x.$$

Donc

$$\lim_{x\to 1,\ x<1} \frac{x^2+|x-1|-1}{x-1} = \lim_{x\to 1,\ x<1} x = 1.$$

La limite à gauche de la quantité qu'on considère est 1.

La limite à droite et la limite à gauche étant différentes, $\frac{x^2+|x-1|-1}{x-1}$ n'a pas de limite quand x tend vers 1.

Exercice 18.

a)

$$\text{Pour } x \neq 0, \quad \frac{\sin^2(x)}{x} = \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}, \qquad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = 0}.$$

b)

$$\text{Pour } x \neq 0, \quad \frac{\sin(4x)}{x} = 4 \cdot \underbrace{\frac{\sin(4x)}{4x}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1}, \qquad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{x} = 4}.$$

c)

$$\text{Pour } x \neq 0, \quad \frac{3\sin(x)+2x}{x} = 3 \cdot \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1} + 2, \qquad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x)+2x}{x} = 5}.$$

d)

$$\text{Pour } x \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{0\}, \quad \frac{\tan(x)}{3x} = \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{3\cos(x)}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1/3}, \qquad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{3x} = \frac{1}{3}}.$$

e)

$$\text{Pour } x \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{0\}, \quad \frac{\sin(2x)}{x\cos(x)} = \frac{2\sin x \cos x}{x \cos x} = 2\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2, \qquad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x\cos(x)} = 2}.$$

f)

$$\text{Pour } x \neq 0, \quad \frac{\sin(x^2)}{x} = \underbrace{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1} \cdot \underbrace{x}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}, \qquad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0}.$$

Exercice 19.

a) Par croissances comparées, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^4)}{x^3} = 0}$.

b) Pour $x > 0$, $x^2 - \ln(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right)$. Comme $x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et comme, par croissances comparées, $\frac{\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (x^2 - \ln(x)) = +\infty}.$$

c) Par croissances comparées, $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^4 \ln x = 0}$.

d) $e^{x+3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^3 > 0$, donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+3}}{x^3} = +\infty}$

e) $X = -\frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ et, par croissances comparées, $\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}} = -Xe^X \underset{X\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0}$.

f) Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leqslant \sin(1/x) \leqslant 1$, donc $-x^2 \leqslant x^2 \sin(1/x) \leqslant x^2$. Or $\pm x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{x\to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0}$.

g) Pour $x > 0$, $x^2 - x + \cos(1/x) = \underbrace{x^2}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty} \cdot \big(1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\frac{1}{x^2}\cos(1/x)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\big)$. La dernière limite vient du théorème des gendarmes, car pour tout $x > 0$,

$$-\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}\cos(1/x) \leqslant \frac{1}{x^2}$$

et $\pm 1/x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Au total, $\boxed{\lim_{x\to\infty}(x^2 - x + \cos(1/x)) = +\infty}$

h) $\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\frac{1}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\sin\left(\frac{1}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\boxed{\lim_{x\to\infty}\exp(\sin(1/\ln(x))) = \exp(0) = 1}$

i) Pour tout $x \neq 1$, $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, donc $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2}$.