Feuille TD 2: Fonctions Réelles d'une variable réelle

Exercice 1. Simplifier (ou pas) les expressions suivantes.

a) $a(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$ **b)** $B = e^{-\ln(3)}$ **c)** $C = \ln\left(e^{-5}\right)$

d) $D = \frac{e^{\ln 7 - \ln 2}}{e^{\ln 7 + \ln 2}}$ **e)** $E = \ln\frac{3}{5} + \ln\frac{5}{3}$ **f)** $F = \ln(e+1)$ **g)** $G = \frac{\ln 3}{\ln 5}$.

Résoudre les équations suivantes.

h) $e^x = -2$ **i)** $e^{-x} = 2$ **j)** $\ln x = -2$ **k)** $\ln(-x) = 2$ **l)** $2^{x+3} = 3^{x-7}$

m) $e^{2x} = e^x + 6$ **n)** $e^{2x} = 5e^x - 6$ **o)**$(\ln x)^2 - \ln\left(x^2\right) = 3$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire les ensembles suivants en langage mathématique.

(1) L'image de $[0, 1[$ par f.

(2) L'ensemble des antécédents de 1 par f.

(3) L'ensemble des entiers naturels pairs dont l'image par f est inférieure ou égale à 5.

Exercice 3. Formaliser avec des quantificateurs les assertions suivantes portant sur une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(a) Il y a au moins un nombre réel qui a deux antécédents par f.

(b) L'image de f contient au moins deux éléments distincts.

(c) L'image réciproque de $[50, +\infty[$ par f n'est pas majorée.

Exercice 4. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

a) $a(x) = \frac{1}{x-1}$ **b)** $b(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$ **c)** $c(x) = \sqrt{\frac{x-5}{x^2-6x-7}}$

d) $d(x) = \sqrt{x - x^3}$ **e)** $e(x) = \frac{1}{4-x^2}$ **f)** $f(x) = \ln\frac{2+x}{2-x}$ **g)** $g(x) = \sqrt{\frac{\ln(x)^2-4}{\ln(x+1)}}$

h) $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$ **i)** $i(x) = \sqrt{1-x^2}$ **j)** $j(x) = \sqrt{x^2-1}$

k) $k(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$ **l)** $l(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ **m)** $m(x) = \sqrt{\ln(x^2+4)}$

Exercice 5. Déterminer $f \circ g$ et donner les ensembles de définition de f, g et $f \circ g$.

a) $f(x) = \frac{\tan x}{x^2+4x+4}$ et $g(x) = \cos x$

b) $f(x) = 2\ln x$ et $g(x) = \exp(\frac{1}{x})$

c) $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

Exercice 6. Soient f et g les fonctions numériques définies par $f(x) = x^2 - 3$ et $g(x) = \sqrt{x+3}$. Expliciter les domaines de définition de f et g, ainsi que les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x$. La fonction f est-elle bijective de $\mathbb{R}$ sur son image?

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est impaire.

b) Quels sont les antécédents de 0 par f?

c) Si $y \neq 0$, trouver les antécédents de y par f.

d) Déduire des questions précédentes l'image de f.

e) Si $0 < y < 1$, montrer que $0 < 1 - \sqrt{1-y^2} < y < 1 + \sqrt{1-y^2}$,

et en déduire que $0 < \frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} < 1 < \frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$.

f) Si $-1 < y < 0$, déduire de e) que

$$\frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} < -1 < \frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} < 0.$$

g) Trouver un intervalle I tel que $f_{|I}$ soit une bijection de I sur $f(\mathbb{R})$, et calculer la bijection réciproque.

Exercice 9. Le radium se désintègre au cours du temps en obéissant à la loi suivante:

$$M(t) = M_0 e^{-0{,}000436t}$$

où $M(t)$ est la masse présente au temps t (exprimé en années). Après $t = 0$, combien de temps faut-il attendre pour que la masse présente se soit réduite de moitié ? Combien de temps supplémentaire doit-on attendre pour que cette masse soit à nouveau réduite de moitié ?

Exercice 10. Déterminer f connaissant g et $f \circ g$.

a) $f \circ g(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \tan\frac{x}{2}$ **b)** $f \circ g(x) = \cos(2x)$ et $g(x) = \sin^2(x)$

Exercice 11.

a) Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation $\cos(5x) = \cos(2\pi/3 - x)$.

b) Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient l'inégalité $2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0$.

Exercice 12. Déterminer le domaine et tracer le graphe des fonctions suivantes

a) $a(x) = \text{Arcsin}(\sin(x))$ **b)** $b(x) = \text{Arccos}(\cos(x))$ **c)** $c(x) = \text{Arctan}(\tan(x))$

d) $d(x) = \sin(\text{Arcsin}(x))$ **e)** $e(x) = \cos(\text{Arccos}(x))$ **f)** $f(x) = \tan(\text{Arctan}(x))$

Exercice 13. Déterminer le domaine des fonctions suivantes et simplifier leur expression:

a) $a(x) = \ln\left(\ln\left(e^{e^x}\right)\right)$ **b)** $b(x) = x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln x}}$

c) $c(x) = \cos(3\mathrm{Arccos}(x))$ **d)** $d(x) = \cos(\mathrm{Arctan}(x))$

Simplifier les expressions suivantes:

e) $e(x, y) = \cos\left(\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arcsin}(y)\right)$ **f)** $f = \mathrm{Arcsin}(3/5) + \mathrm{Arcsin}(4/5)$

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes:

a) $\exp(2\ln(x)) = 9$ **b)** $\ln\left(\frac{(y+6)(y+3)}{y+2}\right) = 0$ **c)** $\ln(y+6) - \ln(y+2) + \ln(y+3) = 0$

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction, dont on note $\mathcal{C}_f$ le graphe. Quelle(s) transformation(s) géométrique(s) appliquer à $\mathcal{C}_f$ pour obtenir le graphe de chacune des fonctions suivantes?

a) $a(x) = f(x+2)$ **b)** $b(x) = -f(x+2)$ **c)** $c(x) = -f(x)$

d) $d(x) = 2f(x)$ **e)** $e(x) = f(x/2)$ **g)** $g(x) = f(2x)$

Tracer les graphes de ces fonctions dans le cas où $f(x) = x^3$.

Exercice 16. La concentration d'un réactif d'une réaction chimique (dite ici du second ordre) est donnée au cours du temps par la loi

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + kC_0 t},$$

où $k > 0$ est une constante de cinétique chimique. Tracer l'allure du graphe de $t \mapsto C(t)$ et interpréter la constante C_0.

Exercice 17. La quantité $\frac{x^2+|x-1|-1}{x-1}$ admet elle une limite à droite ou une limite à gauche quand $x \to 1$? La limite $\lim\limits_{x\to 1,\ x\neq 1} \frac{x^2+|x-1|-1}{x-1}$ existe-t-elle?

Exercice 18. Sachant que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, calculer

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\sin(x)+2x}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{3x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x\cos(x)}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$

Exercice 19. Calculer les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^4)}{x^3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - \ln(x))$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^4 \ln x$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{x+3}}{x^3}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x})$ **g)** $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - x + \cos(1/x))$ **h)** $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(\sin(1/\ln(x)))$ **i)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$