Feuille TD 3: Continuité

Exercice 1. Déterminer les bornes inférieures, bornes supérieures, maximum, minimum des ensembles suivants

a) $]0,1[$ **b)** $[0,1[$ **c)** $[0,1]$ **d)** $[0,+\infty[$ **e)** $[0,\sqrt{2}]$ **f)** $[0,\sqrt{2}]\cap\mathbb{Q}$

Exercice 2. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$. Déterminer l'image par f des ensembles suivants:

a) $[-1,1]$ **b)** $[-2,1[$ **c)** $]-2,1[$

d) $[-2,1]$ **e)** $[-3,-1]$ **f)** $[-3,-1]\cup[-2,1]$ **g)** $[-3,-1]\cap[-2,1]$

h) Comparer les résultats obtenus en d,e,f,g

Exercice 3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\mapsto\mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x\in I$, $f(x)^2=1$. Montrer que $f=1$ ou $f=-1$ (c'est à dire que f est la fonction constante égale à 1 ou la fonction constante égale à -1).

Exercice 4. Etudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante:

a) $a(x)=\begin{cases} x^2\cos(x) & \text{si } x\in\mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ **b)** $b(x)=xE(x)$ (E est la fonction partie entière)

c) $c(x)=\begin{cases} \sin(x)\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x\in\mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ **d)** $d_\alpha(x)=\begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x\in\mathbb{R}^* \\ \alpha & \text{si } x=0\end{cases}$, où $\alpha\in\mathbb{R}$

f) $f(x)=\begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x\in\mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ **g)** $g(x)=\begin{cases} \exp(\frac{1}{x}) & \text{si } x\in\mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

h) $h(x)=\begin{cases} \frac{x\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$

Exercice 5. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<1 \\ x^2 & \text{si } 1\leqslant x\leqslant 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x>4\end{cases}$$

a) Montrer que f est continue et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
b) Tracer le graphe de f.
c) Quelle est la bijection réciproque de f?

Exercice 6. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x^3-5x+3$.
a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution $x_1\in]-3,-2[$, une solution $x_2\in]0,1[$ et une solution $x_3\in]1,2[$.
b) Calculer $f(1/2)$. Pour approcher x_2, peut-on être plus précis que $x_2\in]0,1[$?
c) Décrire un algorithme permettant de donner une valeur approchée de x_2 à 0.1 près.

Exercice 7. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$.
a) Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f est strictement croissante et impaire.
c) Montrer que $f(\mathbb{R})=]-1,1[$. f est-elle bijective de $\mathbb{R}$ sur son image? Si oui, calculer la bijection réciproque.