Corrigé de la feuille TD 3 : Continuité

Exercice 1.

	$]0,1[$	$[0,1[$	$[0,1]$	$[0,+\infty[$	$[0,\sqrt{2}]$	$[0,\sqrt{2}]\cap\mathbb{Q}$
borne inférieure	0	0	0	0	0	0
borne supérieure	1	1	1	$+\infty$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
maximum	/	/	1	/	$\sqrt{2}$	/
minimum	/	0	0	0	0	0

Exercice 2.
a) $f([-1,1]) = [0,1]$
b) $f([-2,1[) = [0,4]$
c) $f(]-2,1[) = [0,4[$
d) $f([-2,1]) = [0,4]$
e) $f([-3,-1]) = [1,9]$
f) $f([-3,-1]\cup[-2,1]) = f([-3,1]) = [0,9]$
g) $f([-3,-1]\cap[-2,1]) = f([-2,-1]) = [1,4]$
h) On a donc bien $f([-3,-1]\cup[-2,1]) = f([-3,-1])\cup f([-2,1])$. On a aussi $f([-3,-1]\cap[-2,1]) = [1,4] = [1,9]\cap[0,4] = f([-3,-1])\cap f([-2,1])$.
Attention ! L'image de l'intersection de deux intervalles n'est forcement pas égale à l'intersection des images de ces intervalles. Par exemple, $f([-1,3]) = [0,9]$, $f([-2,1]) = [0,4]$ d'où $f([-1,3])\cap f([-2,1]) = [0,9]\cap[0,4] = [0,4]$, mais $f([-1,3]\cap[-2,1]) = f([-1,1]) = [0,1]$.

Exercice 3. Pour tout $x\in I$, on a $f(x)^2 = 1$, donc $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$. On veut en déduire que (pour tout $x\in I$, $f(x) = 1$) ou (pour tout $x\in I$, $f(x) = -1$). Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe donc au moins une valeur de $x\in I$ (notons la x_-) telle que $f(x_-)\neq 1$ (et donc $f(x_-) = -1$, puisque $f(x)$ ne peut prendre que les valeurs 1 et -1) et de la même façon, il existe une valeurs de $x\in I$ (notons la x_+) telle que $f(x_+) = 1$.

Supposons que $x_- < x_+$. Comme f est continue sur l'intervalle I et que $x_-, x_+\in I$, alors f est continue sur $[x_-, x_+]$. Maintenant, comme $f(x_-) = -1$ et $f(x_+) = 1$ et $-1 < 0 < 1$ alors, d'après le Théorème des valeurs intermédiaires il existe $x_0 \in]x_-, x_+[\subset I$ telle que $f(x_0) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

On aboutit de même à une contradiction dans le cas $x_+ < x_-$, en considérant, dans ce cas, l'intervalle $[x_+, x_-]$.

Exercice 4.
a) Comme, par définition, $a(0) = 0 = 0^2\cos 0$ alors nous avons, en fait, que $a(x) = x^2\cos x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (pas seulement en $\mathbb{R}^*$). Comme les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$$

sont continues sur $\mathbb{R}$ alors a est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues.

b) Nous avons que sur tous les intervalles de la forme $]n, n+1[$, où $n \in \mathbb{Z}$, E est une constante et donc continue. On en déduit donc que sur ces intervalles b est continue comme produit de fonctions continues.

Maintenant, soit $n \in \mathbb{Z}$, on calcule
$\lim\limits_{x\to n^+} b(x) = \lim\limits_{x\to n^+} xE(x) = \lim\limits_{x\to n^+} xn = n^2$.
$\lim\limits_{x\to n^-} b(x) = \lim\limits_{x\to n^-} xE(x) = \lim\limits_{x\to n^-} x(n+1) = n(n-1) = n^2 - n$.

Nous avons que $b(n)$ est continue en n si et seulement si $\lim\limits_{x\to n^+} b(x) = \lim\limits_{x\to n^-} b(x)$, c'est-à-dire si et seulement si $n^2 = n^2 - n$, ou encore si et seulement si $n = 0$. b n'est donc pas continue en n si $n \in \mathbb{Z}^*$, tandis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^*$.

c) Comme $\sin x$ et $1/x$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$ alors $\sin(\frac{1}{x})$ est continue comme composée de fonctions continues. Par ailleurs, c est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions continues.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leqslant \sin(\frac{1}{x}) \leqslant 1$ et donc $-|\sin x| \leqslant \sin x \sin \frac{1}{x} \leqslant |\sin x|$ et comme $\lim\limits_{x\to 0} |\sin x| = 0$, d'après le théorème de gendarmes, on a

$$\lim_{x\to 0} c(x) = \lim_{x\to 0} \sin x \sin \frac{1}{x} = 0 = c(0)$$

donc c est aussi continue en $x = 0$. On conclut que c est continue sur $\mathbb{R}$.

d) La fonction d_α est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions continues.

Maintenant, si $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leqslant \cos \frac{1}{x} \leqslant 1$ et donc $-x^2 \leqslant x^2 \cos \frac{1}{x} \leqslant x^2$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = 0$ alors, d'après le théorème de gendarmes, nous obtenons que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$. Donc, d_α est continue en $x = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = d_\alpha(0) = \alpha$. On conclut que si $\alpha = 0$, d_0 est continue sur $\mathbb{R}$ et que si $\alpha \neq 0$, d_α est continue sur $\mathbb{R}^*$, mais pas en 0.

f) La fonction f est continue en $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continue. D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to -\infty} e^y = 0$ impliquent que $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$. Donc, f est aussi continue en 0. On conclut que f est continue sur $\mathbb{R}$.

g) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continue. D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \exp(\frac{1}{x}) = +\infty \neq 0 = g(0)$, donc g n'est pas continue en $x = 0$. On conclut que g est continue sur $\mathbb{R}^*$, mais pas en $x = 0$.

h) Supposons que $x \neq 1$. Nous avons

$$h(x) = \frac{x\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} = \frac{x\sqrt{(x-1)^2}}{x - 1} = \frac{x|x-1|}{(x-1)} = \begin{cases} x \text{ si } x - 1 > 0 \text{ c-à-d } x > 1 \\ -x \text{ si } x - 1 < 0 \text{ c-à-d } x > 1 \end{cases}$$

La fonction h est donc continue sur $]-\infty, 1[$ d'une part, et sur $]1, +\infty[$ d'autre part. De plus,

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1 \text{ et } \lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} -x = -1$$

Nous avons que la limite à gauche en $x = 1$ de $h(x)$ est différente de la limite à droite, donc h n'est pas continue en $x = 1$.

Exercice 5.

a) f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$ car f coïncide avec des fonctions polynomiales sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, 4[$, et avec la fonction $x \mapsto 8\sqrt{x}$ sur $]4, +\infty[$, dont on sait qu'elle est continue sur $[0, +\infty[$. Maintenant,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1 \text{ et } \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1^2 = 1$$

Comme $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1^2 = 1$ alors f est continue en $x = 1$. Aussi,

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} x^2 = 4^2 = 16 \text{ et } \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} 8\sqrt{4} = 16$$

Comme $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4) = 4^2 = 16$ alors f est continue en $x = 4$.

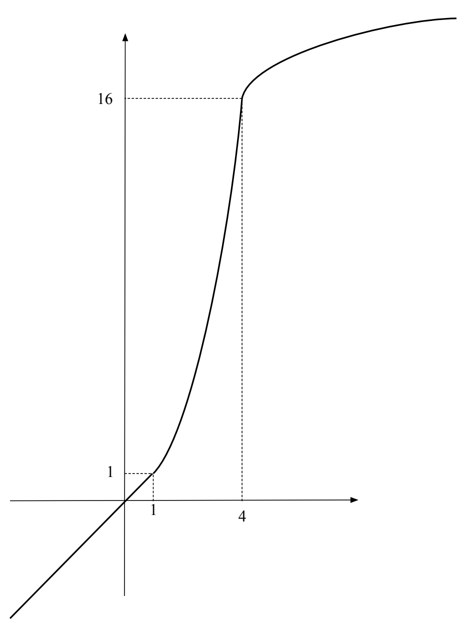
On conclut donc que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Nous avons que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$, sur $]1, 4[$ et sur $]4, +\infty[$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, f est aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection réciproque, f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. De plus,

$$f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)[=]\lim_{x\to -\infty} x, \lim_{x\to +\infty} 8\sqrt{x}[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

b)



c) Cherchons les antécédents de chaque $y \in \mathbb{R}$.

- Si $y < 1$, on a $f(y) = y$ donc y est un antécédent de y par f (et c'est le seul car f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$).

- Si $1 \leqslant y \leqslant 16$, on a $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$ car $1 \leqslant \sqrt{y} \leqslant 4$, et donc $\sqrt{y}$ est l'unique antécédent de y par f.(On a deviné avant de faire ce dernier calcul que $\sqrt{y}$ allait être l'antécédent de y en résolvant l'équation $y = x^2$.)

- Si $y > 16$, on a $\frac{y^2}{64} > \frac{16^2}{64} = 4$. Donc $f(\frac{y^2}{64}) = 8\sqrt{\frac{y^2}{64}} = 8\frac{y}{\sqrt{64}} = y$. On a deviné avant de faire ce dernier calcul que $\frac{y^2}{64}$ allait être l'antécédent de y en résolvant l'équation $y = 8\sqrt{x}$. On a donc

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{si } y < 1 \\ \sqrt{y} & \text{si } 1 \leqslant y \leqslant 16 \\ \frac{y^2}{64} & \text{si } y > 16. \end{cases}$$

Exercice 6.

a) f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur l'intervalle $[-3, -2]$. De plus, $f(-3) = -9$ et $f(-2) = 5$, comme $-9 < 0 < 5$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x_1 \in]-3, -2[$ tel que $f(x_1) = 0$.

On procède de la même manière pour les autres deux intervalles. Nous trouvons donc qu'il existe $x_2 \in]0, 1[$ tel que $f(x_2) = 0$ (car $3 = f(0) > 0 > f(1) = -1$) et qu'il existe $x_3 \in]1, 2[$ tel que $f(x_3) = 0$ (car $-1 = f(1) < 0 < f(2) = 1$).

b) - c) Nous avons

- $f(1/2) = 5/8$. Comme $f(1) = -1$, le TVI sur $[\frac{1}{2}, 1]$ donne $x_2 \in]\frac{1}{2}, 1[$.
- $f(3/4) = -21/64 < 0 < f(1/2)$, donc le TVI sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ donne $x_2 \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$.
- $f(5/8) = 61/512 > 0 > f(3/4)$, donc le TVI sur $[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]$ donne $x_2 \in]\frac{5}{8}, \frac{3}{4}[$.
- $f(11/16) = -461/4090 < 0 < f(5/8)$, donc le TVI sur $[\frac{5}{8}, \frac{11}{16}]$ donne $x_2 \in]\frac{5}{8}, \frac{11}{16}[$.

Ce dernier intervalle est de longueur inférieur à $0,1$ donc $x_2 \approx \frac{5}{8}$ à $0,1$ près (ou encore $x_2 \approx \frac{11}{16}$, ou n'importe quel nombre dans $]\frac{5}{8}, \frac{11}{16}[$).

Exercice 7.

a) f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

b) Si $x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{-x}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+|x|} = -f(x)$ et donc f est impaire.

Si $x \geq 0, f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ qui est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En effet, $x \to 1 + x$ est croissante donc $x \to \frac{1}{1+x}$ est décroissante et donc $x \to -\frac{1}{1+x}$ est croissante. Comme f est impaire et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors, d'après le théorème de la bijection réciproque, f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[$. Or $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{1+x} = 1$. Par imparité, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Donc $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.

Si $y \in [0, 1[$, résolvons l'équation $y = \frac{x}{1+x}$. Si x est solution de cette équation, alors $y(x + 1) = x$ donc $y = x - xy = x(1 - y)$, et donc $x = \frac{y}{1-y}$. Vérifions que $\frac{y}{1-y}$ est l'unique antécédent de y par f.

Si $y \in [0,1[$ alors $\frac{y}{1-y} > 0$ et donc $f(\frac{y}{1-y}) = \frac{\frac{y}{1-y}}{1+\frac{y}{1-y}} = \frac{y}{1-y+y} = y$. Donc, pour $y \in [0,1[$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$.

Si $y \in]-1,0[$ alors $-y \in [0,1[$ et

$$y = f(x) \underset{\text{par imparité de } f}{\iff} -y = f(-x) \underset{\text{d'après le cas précédent}}{\iff} -x = \frac{-y}{1-(-y)} \iff x = \frac{y}{1+y}$$

donc si $y \in]-1,0[$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$.

On conclut que

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{1-y} & \text{si } y \in [0,1[\\ \frac{y}{1+y} & \text{si } y \in]-1,0] \end{cases}$$

Autrement dit,

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$