Corrigé de la Feuille TD 4 : Dérivation

Exercice 1. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x > 1. \end{cases}$

- f coïncide sur $[0,1]$ avec la fonction racine carrée, qui est dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc $\underline{f \text{ est dérivable sur }]0,1[}$ et
$$\forall x \in]0,1[, \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
- Quels que soient les réels a et b, f coïncide avec une fonction polynomiale sur $]1,+\infty[$. Donc $\underline{f \text{ est dérivable sur }]1,+\infty[}$ et
$$\forall x > 1, \qquad f'(x) = 2ax + b.$$
- f est dérivable en $x = 1$ si et seulement si $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ a une limite finie quand x tend vers 1. Or,
  - pour $0 < x < 1$,
  $$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x-1} = \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2},$$
  où on a noté g la fonction définie par $\forall x \geqslant 0,\ g(x) = \sqrt{x}$.
  - pour $x > 1$,
  $$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{ax^2+bx+1-\sqrt{1}}{x-1} = \frac{ax^2+bx}{x-1}.$$
  Dans cette fraction, le numérateur $ax^2 + bx$ tend vers $a + b$ quand x tend vers 1. Comme le dénominateur $x - 1$ tend vers 0 quand x tend vers 1, si $a + b \neq 0$,
  $$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} \pm\infty,$$
  avec un signe $+$ si $a + b > 0$, un signe $-$ si $a + b < 0$. Donc $\underline{\text{si } a+b \neq 0,\ f \text{ n'est pas dérivable en } x = 1}$. (En fait, $f(x) - f(1) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} a + b$, donc $a + b \neq 0$ signifie que les limites à gauche et à droite de f ne sont pas les mêmes, donc que f n'est pas continue en $x = 1$, et donc pas dérivable en $x = 1$).
  Inversement, si $a + b = 0$, $b = -a$. Dans ce cas, toujours pour $x > 1$, on a :
  $$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{ax^2-ax}{x-1} = \frac{ax(x-1)}{x-1} = ax \underset{x\to 1}{\longrightarrow} a.$$

  Donc si $a + b = 0$, on a
  $$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = a.$$
  On conclut que $\underline{f \text{ est dérivable en } x = 1 \text{ si et seulement si } a+b = 0 \text{ et } a = 1/2, \text{ c'est à dire } a = 1/2 \text{ et } b = -1/2}$.

Dans le cas où $(a,b) = (1/2,-1/2)$, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1/2 & \text{si } x = 1, \\ 2ax + b & \text{si } x > 1. \end{cases}$$
Si $(a,b) \neq (1/2,-1/2)$, f est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, et
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1, \\ 2ax + b & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 2.
a) Comme $x^2 \cos x$ est bien défini et vaut 0 en $x = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $a(x) = x^2 \cos x$. Les fonctions carré et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $\underline{a \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ comme produit de fonctions dérivables, et
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a'(x) = 2x\cos x + x^2 \cdot (-\sin x) = x(2\cos x - x \sin x)}.$$

b) Comme la fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et comme sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ est dérivable sur R^* en tant que composée de fonctions dérivables. Donc son produit avec la fonction sinus, qui coïncide avec b sur $\mathbb{R}^*$, est $\underline{\text{dérivable sur } \mathbb{R}^*}$ comme produit de fonctions dérivables.

Pour savoir si b est dérivable en $x = 0$, on regarde si $\frac{b(x)-b(0)}{x-0}$ a une limite finie quand $x \to 0$. Or, pour $x \neq 0$,

$$\frac{b(x)-b(0)}{x-0} = \frac{\sin x \sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = \frac{\sin x}{x}\sin\frac{1}{x}.$$

On sait que $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ (car $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos 0 = 1$). Par ailleurs, $\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand $x \to 0$ (car sin n'a pas de limite en $\pm\infty$). Donc $\frac{b(x)-b(0)}{x-0}$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc b n'est pas dérivable en $x = 0$.
Au total, b' est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad b'(x) = \cos x \sin\frac{1}{x} + \sin x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x} = \cos x \sin\frac{1}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\cos\frac{1}{x}}.$$

c) c est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables, et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad c'(x) = \frac{2}{x^3}\exp'\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Pour étudier la dérivabilité de c en $x = 0$, on regarde si $\frac{c(x)-c(0)}{x-0}$ a une limite finie quand $x \to 0$. Or, pour $x \neq 0$,

$$\frac{c(x)-c(0)}{x-0} = \frac{e^{-1/x^2}}{x}.$$

On introduit une nouvelle variable $y = -1/x^2$. En particulier, $y \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, et $x = \pm 1/|y|^{1/2}$. Donc

$$\frac{c(x)-c(0)}{x-0} = \pm|y|^{1/2}e^y \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par résultat de croissances comparées ($|x|^n e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ si $n \in \mathbb{R}$, ici appliqué avec $n = 1/2$). Donc $\frac{c(x)-c(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et donc c en dérivable en $x = 0$, avec $c'(0) = 0$.
Au total, <u>c est dérivable sur $\mathbb{R}$</u>, et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad c'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}}$$

d) Si $x \neq 1$,

$$d(x) = \frac{x\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \frac{x|x-1|}{x-1} = \begin{cases} \frac{x(x-1)}{x-1} = x & \text{si } x > 1, \\ \frac{-x(x-1)}{x-1} = -x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On a donc

$$\lim_{x\to 1^-} d(x) = \lim_{x\to 1^-} -x = -1, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^+} d(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1,$$

et donc d n'est pas continue en $x = 1$, et donc pas dérivable en $x = 1$.
Au total, d est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, pas dérivable en $x = 1$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad d'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 3.
La fonction qui à x associe $\sin(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions qui le sont. Son produit avec la fonction carrée est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions dérivables. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Étudions maintenant la dérivabilité de f en $x = 0$. Si $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leqslant \sin(1/x) \leqslant 1$, donc

$$-|x| \leqslant x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant |x|.$$

Comme $|x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $-|x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, d'après le théorème des gendarmes,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

et donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Au total, on a montré que f était dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée f' est donnée par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}}$$

Pour $x \neq 0$, $f'(x)$ est la somme de $2x\sin(1/x)$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0 (cf plus haut), et de $-\cos(1/x)$, qui n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$, et donc f' n'est pas continue en $x = 0$.
Par contre, f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée, produit et somme de fonctions continues.

Exercice 4.
Dans tout l'exercice, si f est une fonction, on note D_f son domaine de définition et D'_f son domaine de dérivabilité.
a) $a(x) = 7x^4 - 12x^3 + x$.
a est polynomiale, donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{D_a = D'_a = \mathbb{R}, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad a'(x) = 28x^3 - 36x^2 + 1.}$$

b) $b(x) = \sqrt{x^2+1}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \in [1, +\infty[$. Cet intervalle $[1, +\infty[$ étant inclus dans le domaine de définition $[0, +\infty[$ de la fonction racine carrée, b est définie sur $\mathbb{R}$. De la même façon, $[1, +\infty[$ étant inclus dans le domaine de dérivabilité $]0, +\infty[$ de la fonction racine carrée, b est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{D_b = D'_b = \mathbb{R}, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad b'(x) = 2x\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.}$$

c) $c(x) = 3^x - 2^x = \exp(\ln(3)x) - \exp(\ln(2)x)$.
c est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions qui le sont :

$$\boxed{D_c = D'_c = \mathbb{R}, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad c'(x) = \ln(3)\exp(\ln(3)x) - \ln(2)\exp(\ln(2)x) = \ln(3)3^x - \ln(2)2^x.}$$

d) $d(x) = \ln(x^3 - 2)$.
La fonction ln ayant $]0, +\infty[$ comme domaine de définition et comme domaine de dérivabilité,

$$\boxed{D_d = D'_d = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 2 > 0\right\} =]2^{1/3}, +\infty[, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]2^{1/3}, +\infty[, \qquad d'(x) = \frac{3x^2}{x^3-2}.}$$

e) $e(x) = \sin(2x)\cos(7x)$.
La fonction e est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables.

$$\boxed{D_e = D'_e = \mathbb{R}, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad e'(x) = 2\cos(2x)\cos(7x) - 7\sin(2x)\sin(7x).}$$

f) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^4}$.

$$\boxed{D_f = D'_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}, \qquad f'(x) = 2 \cdot \frac{-4}{(2x+1)^5} = -\frac{8}{(2x+1)^5}.}$$

g) $g(x) = \sqrt{1 + x^2\sin^2 x}$.
On justifie comme dans b) que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\boxed{D_g = D'_g = \mathbb{R}, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = \left(2x \cdot \sin^2 x + x^2 \cdot 2\cos x \sin x\right)\frac{1}{2\sqrt{1+x^2\sin^2 x}} = \frac{x\sin^2 x + x^2\cos x \sin x}{\sqrt{1+x^2\sin^2 x}}.}$$

h) $h(x) = \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1}$.
Le domaine de définition de h est

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, \exp(1/x) - 1 \neq 0\}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $1/x \neq 0$, et donc $\exp(1/x) \neq 1$. Donc $D_h = \mathbb{R}^*$. Le domaine de dérivabilité de h se calcule de la même manière. De plus, en introduisant la fonction u définie pour $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $u(y) = \frac{y+1}{y-1} = \frac{y-1+2}{y-1} = 1 + \frac{2}{y-1}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $h(x) = u(\exp(1/x))$. Pour calculer la dérivée de h, on utilise la règle de dérivation d'une composée :

$$\boxed{\forall x \in D_h = D'_h = \mathbb{R}^*, \qquad h'(x) = -\frac{1}{x^2}\exp'\left(\frac{1}{x}\right)u'\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{2\exp(1/x)}{x^2\left(\exp(1/x)-1\right)^2}},$$

où on a utilisé $u'(y) = -2/(y-1)^2$.
i) $i(x) = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) = \ln(-u(\sin x))$,
où on a réutilisée la fonction u introduite dans la correction de la question précédente. Le domaine de définition de i est donné par :

$$D_i = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \neq 1 \text{ et } \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} > 0\right\}.$$

Or si $\sin(x) \neq 1$, $1-\sin(x) > 0$. Donc $\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} > 0$ si et seulement si $1+\sin(x) > 0$, c'est à dire $\sin(x) \neq -1$. Au final, $D_i = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \neq \pm 1\} = \mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Le domaine de dérivabilité de i se calcule de la même façon. Le calcul de la dérivée de i se fait en utilisant la formule de dérivation d'une composée : $\forall x \in D_i = D_i'$,

$$\begin{aligned} i'(x) &= \sin'(x) \cdot (-u'(\sin(x))) \cdot \ln'(-u(\sin(x))) \\ &= \cos(x) \cdot \left(-\frac{-2}{(\sin(x)-1)^2}\right)\left(-\frac{\sin(x)-1}{1+\sin(x)}\right) = \frac{2\cos(x)}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}. \\ &= \frac{2\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \frac{2\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{2}{\cos(x)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{D_i = D_i' = \mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in D_i', \qquad i'(x) = \frac{2}{\cos(x)}.}$$

j) $j(x) = (x(x-2))^{1/3}$.
On commence par remarquer que les racines de $x(x-2)$ sont 0 et 2, et que si $x \in \mathbb{R}$, on a $x(x-2) > 0$ si et seulement si $x < 0$ ou $x > 2$. La fonction racine cubique est définie sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. Le domaine de définition de j est donc

$$\boxed{D_j = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-2) \geqslant 0\} =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[,}$$

et son domaine de dérivabilité est

$$\boxed{D_j = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-2) > 0\} =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[.}$$

De plus,

$$\boxed{\forall x \in D_j', \qquad j'(x) = (2x-2)\frac{1}{3}(x(x-2))^{-2/3} = \frac{2(x-1)}{3(x(x-2))^{2/3}}.}$$

Exercice 5.
a) On considère la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par

$$\forall x \in [-1, 1], \qquad f(x) = \arcsin x + \arccos x.$$

f est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$ comme somme de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad f'(x) = \arcsin'(x) + \arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

donc f est constante sur l'intervalle $]-1, 1[$, c'est à dire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = C$.
Comme f est continue sur $[-1, 1]$,

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} C = C,$$

et de même $f(-1) = C$. Au total, on a donc : $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) = C$.
Enfin, pour déterminer C, on choisit une valeur de $x \in [-1, 1]$. Par exemple, $x = 0$:

$$C = f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

On peut donc conclure que

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

b) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}.$$

g est dérivable sur $]-1, 1[$ comme somme et composée de fonctions dérivables. De plus,

$$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[, \qquad g'(x) = \arctan'(x) + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\arctan'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

On en conclut que g est constante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, c'est à dire :

$$\exists C_- \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \forall x < 0, \quad g(x) = C_-,$$

et que g est aussi constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$:

$$\exists C_+ \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \forall x < 0, \quad g(x) = C_+.$$

A noter qu'on ne peut pas conclure que g est constante sur $\mathbb{R}^*$, car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. On va d'ailleurs voir tout de suite que ce n'est pas le cas, parce qu'on va avoir $C_- \neq C_+$.
Déterminons la valeur de C_+ en calculant (par exemple) $g(1)$:

$$C_+ = g(1) = \arctan 1 + \arctan \frac{1}{1} = 2 \arctan 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour déterminer C_-, on peut de la même manière calculer $g(-1)$, ou bien remarquer que g est impaire (car $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(-x) = \arctan(-x) + \arctan(-1/x) = -\arctan(x) - \arctan(1/x) = -g(x)$), et en conclure que

$$C_- = g(-1) = -g(1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Au total, on a montré que

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

Exercice 6.
a) $x \in]0, 1[$ étant fixé, la fonction ln est continue et dérivable sur l'intervalle $[x, 1]$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un nombre $c_x \in]x, 1[$ tel que

$$\frac{1}{c_x} = \ln'(c_x) = \frac{\ln 1 - \ln x}{1 - x} = -\frac{\ln x}{1 - x}.$$

Comme $0 < c_x < 1$, on a $1/c_x > 1$, et donc

$$-\frac{\ln x}{1 - x} > 1, \quad \text{donc} \quad -\ln x > 1 - x, \quad \text{donc} \quad \ln x < x - 1, \quad \text{donc} \quad \ln x \leqslant x - 1.$$

Pour $x = 1$, l'inégalité reste vraie (et est une égalité, car $\ln 1 = 0 = 1 - 1$). On a donc montré

$$\boxed{\forall x \in]0, 1], \quad \ln x \leqslant x - 1.}$$

b) Si $x > 1$, on applique le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[1, x]$: il existe un nombre $c_x \in]1, x[$ tel que

$$\frac{1}{c_x} = \ln'(c_x) = \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{\ln x}{x - 1}.$$

Comme $c_x > 1$, on a $1/c_x < 1$, et donc

$$\frac{\ln x}{x - 1} < 1, \quad \text{donc} \quad \ln x < x - 1, \quad \text{donc} \quad \ln x \leqslant x - 1.$$

<u>L'inégalité est donc aussi vraie pour $x > 1$.</u>

Exercice 7.
a) Pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = \frac{ae^{bt}}{c+e^{bt}} = \frac{ae^{bt} \cdot e^{-bt}}{(c+e^{bt}) \cdot e^{-bt}} = \frac{a}{ce^{-bt}+1}$.
b) On calcule

$$\boxed{f(0) = \frac{a}{c + 1}.}$$

Comme $b > 0$, $e^{-bt} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc

$$\boxed{f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{0 + 1} = a.}$$

c) Pour tout $t \geqslant 0$,

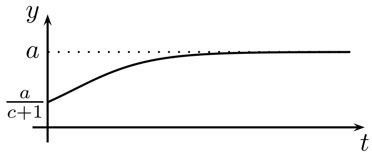
$$\boxed{f'(t) = a \cdot \frac{bce^{-bt}}{(ce^{-bt} + 1)^2}} > 0,$$

donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Son tableau de variations est

t	0		$+\infty$
$f(t)$	$\frac{a}{c+1}$	$\nearrow$	a

d) f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc, d'après le théorème de la bijection réciproque, elle est bijective de $[0, +\infty[$ sur son image $\boxed{f(\mathbb{R}_+) = \left[f(0), \lim_{t\to+\infty} f(t)\right[= \left[\frac{a}{c+1}, a\right[.}$

e)



f) L'équation de la tangente au graphe de f au point $(0, f(0))$ est

$$y = f(0) + f'(0)(t - 0), \qquad \text{c'est à dire} \qquad \boxed{y = \frac{a}{c+1} + \frac{abc}{(c+1)^2}t.}$$

g) a est la concentration limite quand $t \to +\infty$.
La concentration est doublée au bout du temps $T > 0$ si

$$f(T) = 2f(0) = \frac{2a}{c+1}. \qquad (E)$$

Cette solution n'a une solution $T > 0$ que si $\frac{2a}{c+1} \in f([0, +\infty[) = \left[\frac{a}{c+1}, a\right[$, c'est à dire si et seulement si $\frac{2a}{c+1} < a$ (l'inégalité $\frac{2a}{c+1} \geqslant \frac{a}{c+1}$ est automatiquement vraie, puisque $a, c > 0$), c'est à dire $\frac{2}{c+1} < 1$, soit $c + 1 > 2$, ou encore $\boxed{c > 1}$.

Sous cette condition, l'équation (E) équivaut à

$$\begin{aligned}
\frac{a}{ce^{-bT} + 1} = \frac{2a}{c+1} &\iff c + 1 = 2\left(ce^{-bT} + 1\right) \\
&\iff c - 1 = 2ce^{-bT} \\
&\iff e^{-bT} = \frac{c-1}{2c} \\
&\iff -bT = \ln\left(\frac{c-1}{2c}\right) \qquad \text{(on utilise ici l'hypothèse } c > 1\text{)} \\
&\iff \boxed{T = -\frac{1}{b}\ln\left(\frac{c-1}{2c}\right) = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{2c}{c-1}\right).}
\end{aligned}$$

Exercice 8. $f(x) = (1 + x)e^{-x}$.
a) f est le produit de la fonction $x \mapsto (1 + x)$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et de la fonction $x \mapsto e^{-x}$, qui l'est aussi, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

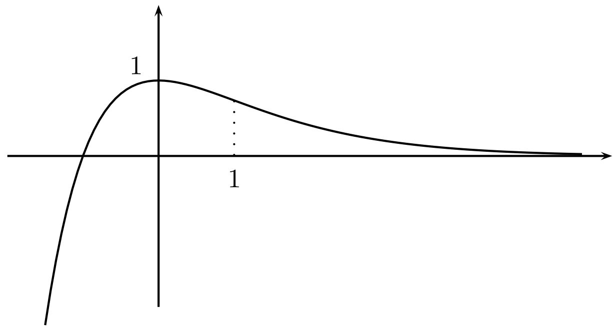
$$\boxed{f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (1 + x) \cdot \left(-e^{-x}\right) = -xe^{-x},}$$

$$\boxed{f''(x) = (-1) \cdot e^{-x} + (-x) \cdot \left(-e^{-x}\right) = (x - 1)e^{-x}.}$$

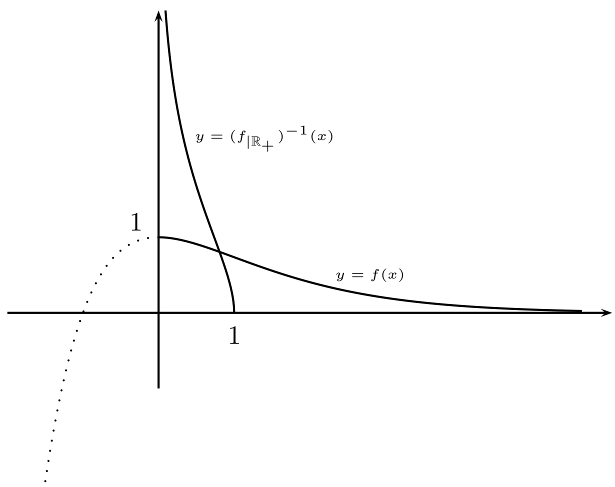
b) Comme $1 + x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $e^{-x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
On a aussi $f(0) = 1$. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-		-	
$f''(x)$		-		-	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$		$\searrow$	0
	f concave				f convexe		

c)



d) D'après le tableau de variations de f, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$. Donc l'équation $f(x) = -1$ n'a pas de solution sur $[0, +\infty[$.
Toujours d'après le tableau de variations de f, f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$. De plus, elle est continue sur cet intervalle. Donc elle (ou, plus exactement, sa restriction à $]-\infty, 0]$) est bijective de $]-\infty, 0]$ sur $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)] =]-\infty, 1]$. Comme $-1 \in]-\infty, 1]$, l'équation $f(x) = -1$ a une unique solution dans $]-\infty, 0]$.
Au total, l'équation $f(x) = -1$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$, cette solution est dans $]-\infty, 0]$.
e) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc sa restriction à $\mathbb{R}_+$, $f_{|\mathbb{R}_+}$, est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(0)] =]0, 1]$.
La bijection réciproque $\left(f_{|\mathbb{R}_+}\right)^{-1}$ est définie sur $]0, 1]$.



f) On remarque que $f(1) = 2/e$, et $f'(1) = -e^{-1} \neq 0$. Donc $(f_{|\mathbb{R}_+})^{-1}$ est dérivable en $y = 2/e$, $(f_{|\mathbb{R}_+})^{-1}(2/e) = 1$ et

$$\boxed{\left((f_{|\mathbb{R}_+})^{-1}\right)'(2/e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-e^{-1}} = -e.}$$

Exercice 9. Pour $r > 0$, on a $V(r) = \left(\frac{4}{r}\right)^{12} - \left(\frac{4}{r}\right)^6 = g\left(\left(\frac{4}{r}\right)^6\right)$, où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^2 - x.$$

a) On a $\left(\frac{4}{r}\right)^6 \underset{r\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\boxed{V(r) \underset{r\to0^+}{\longrightarrow} +\infty}$.

On a aussi $\left(\frac{4}{r}\right)^6 \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\boxed{V(r) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} g(0) = 0}$.

b) Pour tout $r > 0$,

$$V'(r) = 4^6 \cdot (-6) \cdot r^{-7} g'\left(\left(\frac{4}{r}\right)^6\right), \qquad \text{où} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2x - 1.$$

Donc

$$V'(r) = -\frac{6 \cdot 4^6}{r^7}\left(2 \cdot \left(\frac{4}{r}\right)^6 - 1\right).$$

$V'(r) = 0$ si et seulement si $2 \cdot \left(\frac{4}{r}\right)^6 - 1 = 0$, c'est à dire $r^6 = 2 \cdot 4^6$, c'est à dire $r = 4 \cdot 2^{1/6}$.

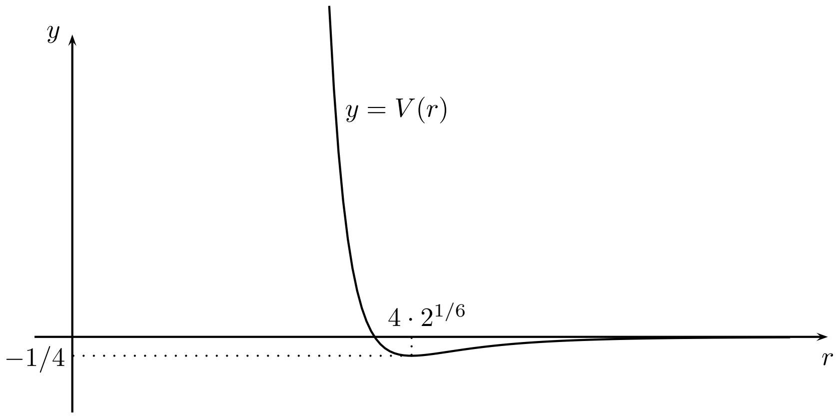
Pour compléter le tableau des variations de V qu'on va donner ci-dessous, on calcule aussi

$$V(4\cdot 2^{1/6}) = \left(\frac{4}{4\cdot 2^{1/6}}\right)^{12} - \left(\frac{4}{4\cdot 2^{1/6}}\right)^{6} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

On a donc comme tableau des variations de V :

r	0		$4\cdot 2^{1/6}$		$+\infty$
$F(r) = V'(r)$		$-$	0	$+$	
$V(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

La distance d'équilibre entre les particules est celle pour laquelle les forces attractives et répulsives s'annulent, c'est à dire $\boxed{r = 4\cdot 2^{1/6}}$.



Exercice 10. On considère la fonction E, définie pour $i \in I =]i_c, i_a[$ par

$$E(i) = E^0 + C\ln\frac{i - i_c}{i_a - i}$$

E est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I comme quotient et composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
a) Pour tout $i \in I$,

$$E'(i) = \frac{C}{i - i_c} + \frac{C}{i_a - i} = C\frac{i_a - i + i - i_c}{(i - i_c)(i_a - i)} = C\frac{i_a - i_c}{(i - i_c)(i_a - i)} > 0.$$

Donc <u>E est strictement croissante sur I</u>. De plus,

$$\lim_{i\to i_c^+} E(i) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{i\to i_a^-} E(i) = +\infty.$$

D'où le tableau des variations de E :

i	i_c		i_a
$E(i)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

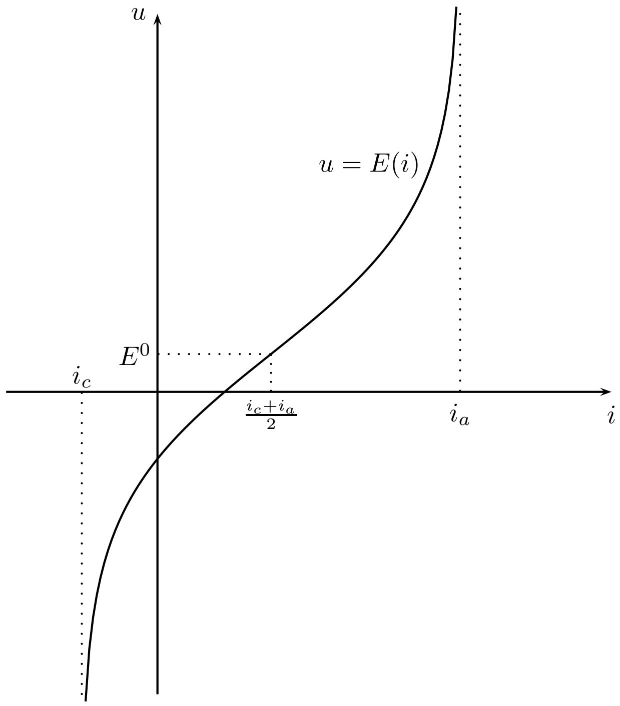
En vue d'étudier la convexité de E, on calcule aussi la dérivée seconde de E. Pour tout $i \in I$, on a

$$E''(i) = C(i_a - i_c)\frac{2i - i_a - i_c}{(i - i_c)^2(i_a - i)^2}.$$

i	i_c		$\frac{i_c+i_a}{2}$		i_a
$E''(i)$		-	0	$+$	
E		concave		convexe	

E est donc concave sur l'intervalle $]i_c, (i_a + i_c)/2[$ et convexe sur l'intervalle $](i_a + i_c)/2, i_a[$.
<u>E a un point d'inflexion en $i = \frac{i_a+i_c}{2}$</u>, et $E(\frac{i_a+i_c}{2}) = E^0 + C\ln\left(\frac{i_a-i_c}{2}\cdot\frac{2}{i_a-i_c}\right) = E^0 + C\ln 1 = E^0$.

b)



c) E est continue et strictement croissante sur I, donc E est bijective de I sur l'image de E, donnée par

$$E(I) =]\lim_{i \to i_c^+} E(i), \lim_{i \to i_a^-} E(i)[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

Pour expliciter la bijection réciproque de E, on fixe $u \in \mathbb{R}$ et on résoud l'équation $u = E(i)$. $i \in I$ est solution de cette équation si et seulement si

$$\begin{aligned} u = E^0 + \ln \frac{i - i_c}{i_a - i} &\iff e^{u - E^0} = \frac{i - i_c}{i_a - i} \\ &\iff (i_a - i)e^{u-E^0} = i - i_c \\ &\iff i_a e^{u-E^0} + i_c = i(1 + e^{u-E^0}) \\ &\iff i = \frac{i_a e^{u-E^0} + i_c}{1 + e^{u-E^0}}. \end{aligned}$$

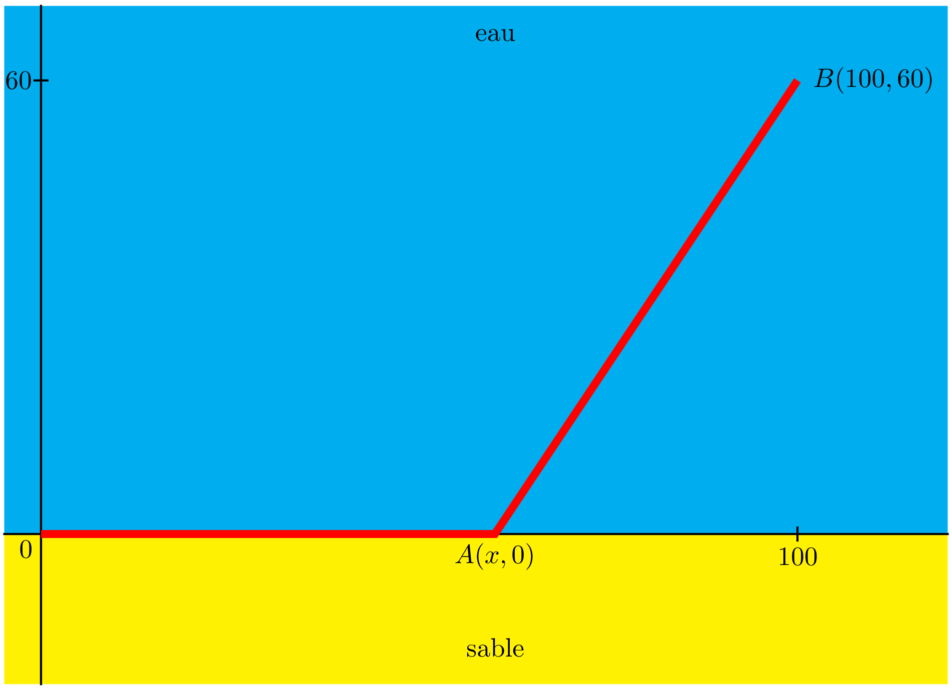
La bijection réciproque de E est donc la fonction définie pour tout $u \in \mathbb{R}$ par

$$\boxed{E^{-1}(u) = \frac{i_a e^{u-E^0} + i_c}{1 + e^{u-E^0}} = \frac{i_a e^u + i_c e^{E^0}}{e^{E^0} + e^u}.}$$

On remarquera qu'on retrouve bien :

$$\lim_{u \to +\infty} E^{-1}(u) = i_a, \qquad \lim_{u \to -\infty} E^{-1}(u) = i_c, \qquad E^{-1}(E^0) = \frac{i_a + i_c}{2}.$$

Exercice 11.



Pour $0 \leqslant x \leqslant 100$, on considère le point A, de coordonnées $(x, 0)$, et le point B, de coordonnées $(100, 60)$. Le trajet du maître nageur va consister à courir sur le segment OA, puis à nager sur le segment AB. Le but de l'exercice est de trouver la valeur de $x \in [0, 100]$ pour laquelle ce trajet est le plus rapidement parcouru.
La distance 0A est x (en mètres).
Le temps mis à parcourir OA est $x/5$ (en secondes).
D'après Pythagore, la distance AB est $\sqrt{60^2 + (100 - x)^2}$ (en mètres).
Le temps mis à parcourir AB est $\frac{\sqrt{60^2+(100-x)^2}}{3}$ (en secondes).
Le temps total mis par le maître nageur pour rejoindre le baigneur est donc (en secondes)

$$T(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{60^2 + (100 - x)^2}}{3}.$$

On va étudier les variations de T, qui est une fonction dérivable sur $[0, 100]$. Pour tout $x \in [0, 100]$,

$$T'(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2(x - 100)}{2\sqrt{60^2 + (100 - x)^2}} = \frac{1}{5} - \frac{100 - x}{3\sqrt{60^2 + (100 - x)^2}}.$$

Donc $T'(x) = 0$ si et seulement si

$$3\sqrt{60^2 + (100 - x)^2} = 5(100 - x),$$

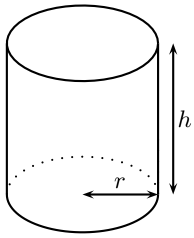
ce qui, étant donné que $0 \leqslant x \leqslant 100$, équivaut à

$$9(60^2 + (100 - x)^2) = 25(100 - x)^2,$$

c'est à dire $9 \cdot 60^2 = (25 - 9)(100 - x)^2 = 16(100 - x)^2$, ou encore $3 \cdot 60 = 4(100 - x)$, c'est à dire $45 = 100 - x$, soit $x = 55$.
$T'(x) < 0$ pour $x \in [0, 55[$ et $T'(x) > 0$ pour $x \in]55, 100]$. En effet, comme T' est continue sur $[0, 100]$, si $T'(x)$ changeait de signe sur l'un des intervalles $[0, 55[$ ou $]55, 100]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $T'(x)$ s'annulerait sur $[0, 100]$ en une autre valeur que 55, ce qui n'est pas le cas d'après le calcul précédent. Or on peut par exemple calculer $T'(20) = -1/15 < 0$ et $T'(100) = 1/5 > 0$.
On conclut donc que T a un minimum local en $\boxed{x = 55 \text{ mètres.}}$ Ce minimum vaut

$$T(55) = 11 + \frac{\sqrt{60^2 + 45^2}}{3} = 11 + \frac{\sqrt{15^2(4^2 + 3^2)}}{3} = 11 + \frac{15}{3}\sqrt{25} = \boxed{36 \text{ secondes.}}$$

Exercice 12.



a) Le volume de la boite est

$$\boxed{V = \pi r^2 h.}$$

La surface de la boite est

$$\boxed{S = 2\pi r h + 2\pi r^2.}$$

b) Si $V = 1$, on a donc $\boxed{1 = \pi r^2 h}$, et donc $h = \frac{1}{\pi r^2}$. La surface S de la boite est alors donnée par

$$\boxed{S(r) = 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2.}$$

c) La fonction S définie à la question précédente sur $]0, +\infty[$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $r > 0$,

$$S'(r) = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r = \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{1}{2\pi}\right).$$

On en déduit le tableau de variations de $S(r)$:

r	0		$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/3}$		$+\infty$
$S'(r)$		-	0	$+$	
$S(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$3 \cdot (2\pi)^{1/3}$	$\nearrow$	$+\infty$

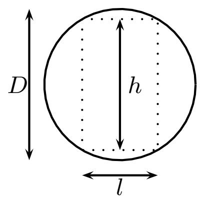
S atteint un minimum pour $r = (1/2\pi)^{1/3}$, ce minimum vaut

$$S\left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/3}\right) = 2 \cdot (2\pi)^{1/3} + \frac{2\pi}{(2\pi)^{2/3}} = \boxed{3 \cdot (2\pi)^{1/3}.}$$

La hauteur est alors

$$h = \frac{1}{\pi\left(\frac{1}{(2\pi)^{1/3}}\right)^2} = \boxed{\frac{2}{(2\pi)^{1/3}}.}$$

Exercice 13.



L'aire de la section de la poutre est hl. La résistance R de la poutre est proportionnelle à cette quantité, donc il existe une constante $C > 0$ telle que

$$R = Chl.$$

De plus, d'après Pythagore, h et l sont liées par la relation $h^2 + l^2 = D^2$, donc

$$l = \sqrt{D^2 - h^2}, \qquad \text{et} \qquad R = Ch\sqrt{D^2 - h^2}.$$

Etudions la fonction f, définie sur $[0, D]$ par

$$f(h) = h\sqrt{D^2 - h^2}.$$

f est continue sur $[0, D]$, dérivable sur $[0, D[$, et pour tout $h \in [0, D[$, on a

$$f'(h) = 1 \cdot \sqrt{D^2 - h^2} + h \cdot \frac{-2h}{2\sqrt{D^2 - h^2}} = \sqrt{D^2 - h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{D^2 - h^2}} = \frac{D^2 - 2h^2}{\sqrt{D^2 - h^2}}.$$

Pour $h \in [0, D[$, $f'(h) = 0$ si et seulement si $h = D/\sqrt{2}$. On en déduit le tableau de variations de f :

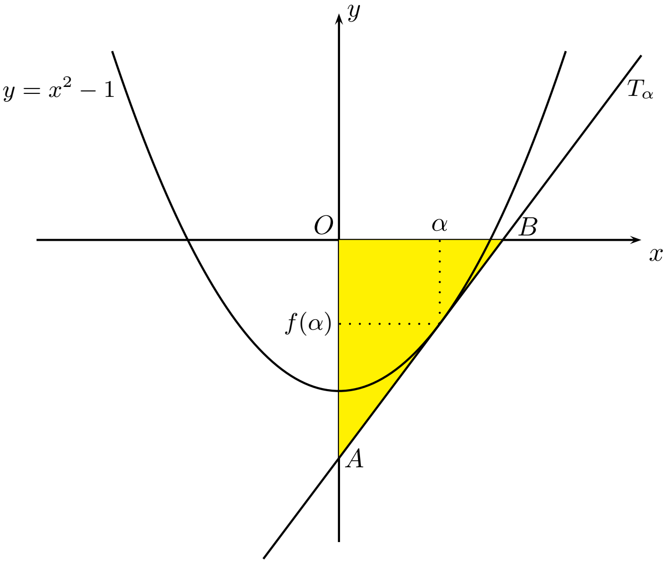
h	0		$\frac{D}{\sqrt{2}}$		D
$f'(h)$		$+$	0	-	
$f(h)$	0	$\nearrow$	$\frac{D^2}{2}$	$\searrow$	0

f est maximale pour $\boxed{h = D/\sqrt{2}.}$ Dans ce cas, on a

$$l = \sqrt{D^2 - (D/\sqrt{2})^2} = D/\sqrt{2}.$$

La résistance est donc maximale quand la section est carrée.

Exercice 14.



L'équation de T_α est

$$y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha),$$

c'est à dire

$$y = \alpha^2 - 1 + 2\alpha(x - \alpha),$$

qui s'écrit encore :

$$y = -\alpha^2 - 1 + 2\alpha x.$$

On note A le point d'intersection de T_α avec l'axe des ordonnées, B son point d'intersection avec l'axe des abscisses. La surface dont on cherche l'aire est donc le triangle OAB.
Comme $B \in T_\alpha$ et que son ordonnée est nulle, son abscisse x_B est donnée par

$$0 = -\alpha^2 - 1 + 2\alpha x_B, \qquad \text{c'est à dire} \qquad x_B = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}.$$

Comme $A \in T_\alpha$ et que son abscisse x_A vaut 0, son ordonnée y_A vaut

$$y_A = -\alpha^2 - 1.$$

Donc

$$A = (0, -(\alpha^2 + 1)), \qquad B = \left(\frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}, 0\right).$$

La surface $S(\alpha)$ du triangle OAB est donc

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 1) \cdot \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} = \frac{(\alpha^2 + 1)^2}{4\alpha} = \frac{\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1}{4\alpha} = \frac{\alpha^3}{4} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4\alpha}.$$

Pour étudier les variations de $S(\alpha)$ quand α varie dans $]0, 1]$, on calcule d'abord $S'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$:

$$\forall \alpha \in]0, 1], \qquad S'(\alpha) = \frac{3\alpha^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4\alpha^2} = \frac{3\alpha^4 + 2\alpha^2 - 1}{4\alpha^2} = \frac{(\alpha^2 + 1)(3\alpha^2 - 1)}{4\alpha^2}.$$

Dans le dernier calcul, on a remarqué (ou calculé, en utilisant le discriminant, etc...) et utilisé le fait que les racines de $3X^2 + 2X - 1$ sont -1 et $1/3$, et que donc $3X^2 + 2X - 1 = 3(X + 1)(X - 1/3)$.

Pour compléter le tableau de variations, on calcule

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{\alpha^3}{4}+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4\alpha}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{\alpha\to 1}\left(\frac{\alpha^3}{4}+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4\alpha}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1,$$

$$S(1/\sqrt{3})=\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{3}^3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{4/\sqrt{3}}=\frac{1}{12\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{36}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{36}(1+6+9)=\frac{16\sqrt{3}}{36}=\frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

α	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$S'(\alpha)$		-	0	$+$	
$S(\alpha)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	1

$S(\alpha)$ est minimale pour $\alpha=1/\sqrt{3}$, cette aire minimale vaut $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

Exercice 15. On définit une fonction f sur $[-1,+\infty[$ par

$$\forall x\geqslant 1,\qquad f(x)=\sqrt{1+x}.$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ comme composée de la fonction polynomiale $x\mapsto 1+x$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et de la fonction racine carrée, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. De plus, $\forall x>-1$,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\qquad\text{et}\qquad f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}.$$

En particulier,

$$f(0)=1,\qquad f'(0)=\frac{1}{2},\qquad f''(0)=-\frac{1}{4}.$$

Donc, d'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonction ε définie sur $[-1,+\infty[$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0, et telle que $\forall x\in[-1,+\infty[$,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}=f(x)&=1+\frac{1}{2}x+(-\frac{1}{4})\cdot\frac{1}{2!}x^2+x^2\varepsilon(x)\\&=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Exercice 16.

a) D'après la formule de Taylor-Young, il existe deux fonctions ε_1 et ε_2, définies sur $\mathbb{R}$ et qui tendent vers 0 en 0, telles que

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x),\qquad e^u=1+u+u\varepsilon_2(u).$$

Alors, pour tout $x\neq 0$,

$$\frac{\cos x-e^{x^2}}{x^2}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x)-\left(1+x^2+x^2\varepsilon_2(x^2)\right)}{x^2}=\frac{-3x^2/2+x^2(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x^2))}{x^2}=-\frac{3}{2}+(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x^2)),$$

et donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{x^2}}{x^2}=-\frac{3}{2}$$

b) D'après la formule de Taylor-Young, il existe trois fonctions ε_1, ε_2 et ε_3, définies sur $]-1,+\infty[$ pour ε_2, sur $\mathbb{R}$ pour ε_1 et ε_3, qui tendent toutes les trois vers 0 en 0, telles que

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_1(x),\qquad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_2(x),\qquad e^u=1+u+\frac{u^2}{2}+u^2\varepsilon_3(u).$$

Alors, pour tout $x\in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}\frac{2\sin x-2\ln(1+x)-e^{x^2}+1}{x^3}&=\frac{2\left(x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_1(x)\right)-2\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_2(x)\right)-\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+x^4\varepsilon_3(x^2)\right)+1}{x^3},\\&=\frac{-2x^3/6-2x^3/3+x^3\left(2\varepsilon_1(x)-2\varepsilon_2(x)-x/2-x\varepsilon_3(x^2)\right)}{x^3}\\&=-1+2\varepsilon_1(x)-2\varepsilon_2(x)-x/2-x\varepsilon_3(x^2),\end{aligned}$$

et donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2\ln(1+x)-e^{x^2}+1}{x^3}=-1.$$
c) D'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonction ε_1 définie sur $\mathbb{R}$ et une fonction ε_2 définie sur $[-1,+\infty[$, qui tendent toutes les deux vers 0 en 0, telles que
$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2}+u^2\varepsilon_1(u),\qquad \sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon_2(x).$$
Alors, pour $x\in[1,+\infty[\setminus\{0\}$,
$$\begin{aligned}\frac{e^{x/2}-\sqrt{1+x}}{x^2}&=\frac{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^2}{4}\varepsilon_1(x/2)\right)-\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon_2(x)\right)}{x^2}\\&=\frac{x^2/4+x^2\left(\varepsilon_1(x/2)/4-\varepsilon_2(x)\right)}{x^2}=\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon_1(x/2)}{4}-\varepsilon_2(x),\end{aligned}$$
et donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x/2}-\sqrt{1+x}}{x^2}=\frac{1}{4}.$$
d) D'après la formule de Taylor-Young, il existe trois fonctions ε_1, ε_2 et ε_3 , définies sur $]-1,+\infty[$ pour ε_2, sur $\mathbb{R}$ pour ε_1 et ε_3, qui tendent vers 0 en 0, telles que
$$\sin x=x+x\varepsilon_1(x),\qquad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_2(x),\qquad e^u=1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+u^3\varepsilon_3(u).$$
Alors, pour $x\in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$,
$$\begin{aligned}\frac{\sin^2(x)}{\ln(1+x)+e^{-x}-1}&=\frac{(x+x\varepsilon_1(x))^2}{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_2(x)\right)+\left(1-x+\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{6}+(-x)^3\varepsilon_3(-x)\right)-1}\\&=\frac{x^2+x^2\left(2\varepsilon_1(x)+\varepsilon_1(x)^2\right)}{\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{6}+x^3\left(\varepsilon_2(x)-\varepsilon_3(-x)\right)}\\&=\frac{1}{x}\frac{1+\left(2\varepsilon_1(x)+\varepsilon_1(x)^2\right)}{\frac{1}{6}+\left(\varepsilon_2(x)-\varepsilon_3(-x)\right)}\end{aligned}$$
et donc
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2(x)}{\ln(1+x)+e^{-x}-1}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2(x)}{\ln(1+x)+e^{-x}-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{\ln(1+x)+e^{-x}-1}=+\infty\text{ n'existe pas.}$$
e) D'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonctions ε, définie sur $[-1,+\infty[$, qui tend vers 0 en 0, telle que pour tout $u\in[-1,+\infty[$,
$$\sqrt{1+u}=1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+u^2\varepsilon(u).$$
Alors, pour tout $x>1$, $u=-1/x^2\in]-1,0[$, et
$$x^4\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-x^4+\frac{x^2}{2}=x^4\left(1-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\frac{1}{x^4}\varepsilon(-1/x^2)\right)-x^4+\frac{x^2}{2}=-\frac{1}{8}+\varepsilon(-1/x^2),$$
et donc
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^4\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-x^4+\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{1}{8}.$$
f) On reprend la fonction ε de la question e). Alors, pour tout $x>1$, $u=-1/x^2\in]-1,0[$, et
$$x^4\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-x^4+x^2=x^4\left(1-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\frac{1}{x^4}\varepsilon(-1/x^2)\right)-x^4+x^2=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}+\varepsilon(-1/x^2),$$
et donc
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^4\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-x^4+\frac{x^2}{2}\right)=+\infty.$$
On peut faire les deux remarques suivantes :
- il n'était en fait pas nécessaire d'être aussi précis qu'à la question e) dans le développement de $\sqrt{1+u}$: on aurait pu se contenter d'écrire $\sqrt{1+u}=1+u/2+u\tilde{\varepsilon}(u)$, pour une nouvelle fonction $\tilde{\varepsilon}$

- ayant fait auparavant la question e), on pouvait conclure directement le résultat, puisque la différence entre les fonctions dont on cherche la limite en e) et en f) est $x^2/2$, qui tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.

g) On reprend la fonction ε de la question e). Alors, pour tout $x > 1$, $u = -1/x^2 \in]-1, 0[$, et

$$x^4\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - x^4 + \frac{x^2}{4} = x^4 \left(1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + \frac{1}{x^4}\varepsilon(-1/x^2)\right) - x^4 + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} + \varepsilon(-1/x^2),$$

et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^4\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - x^4 + \frac{x^2}{4}\right) = -\infty.$$

Les deux remarques faites à la question f) restent valables pour la question g).