Feuille TD 4 : Dérivation

Exercice 1. Trouver des réels a et b de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2. Etudier la dérivabilité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

a) $a(x) = \begin{cases} x^2\cos(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **b)** $b(x) = \begin{cases} \sin(x)\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $c(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **d)** $d(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer f', et montrer que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 4. Donner les domaines de définition, les domaines de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes :

a) $a(x) = 7x^4 - 12x^3 + x$ **b)** $b(x) = \sqrt{x^2+1}$ **c)** $c(x) = 3^x - 2^x$

d) $d(x) = \ln\left(x^3 - 2\right)$ **e)** $e(x) = \sin(2x)\cos(7x)$ **f)** $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^4}$

g) $g(x) = \sqrt{1 + x^2\sin^2(x)}$ **h)** $h(x) = \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1}$ **i)** $i(x) = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$

j) $j(x) = (x(x-2))^{1/3}$

Exercice 5. En utilisant la dérivation, montrer :

a) pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

b) pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \text{signe}(x)\frac{\pi}{2}$

Exercice 6.

a) Soit $x \in]0, 1[$. Appliquer la formule des accroissements finis à la fonction ln entre x et 1, et conclure que pour tout $x \in]0, 1]$, $\ln x \leqslant x - 1$.

b) Cette dernière inégalité reste-t-elle vraie pour $x > 1$?

Exercice 7. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{a\exp(bt)}{c + \exp(bt)}.$$

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = \frac{a}{c\exp(-bt)+1}$.

b) Exprimer $f(0)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ en fonction des constantes a, b, c.

c) Calculer f' et dresser le tableau des variations de f.

d) Déterminer l'image $f(\mathbb{R}_+)$ de f et justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+)$.

e) Tracer l'allure du graphe $\mathcal{C}_f$ de f.

f) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.

g) On suppose que $f(t)$ décrit la concentration au cours du temps d'un produit d'une réaction chimique. Quelle est la signification de a ? A quelle condition sur c peut on espérer que la concentration soit doublée au cours du temps ? Sous cette condition, au bout de combien de temps la concentration est elle doublée ?

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (1 + x)e^{-x}.$$

a) Montrer que f est deux fois dérivable, et calculer f' et f''.

b) Etudier les variations et la convexité de f.

c) Tracer l'allure du graphe de f.

d) Justifier que l'équation $f(x) = -1$ admet une solution. Est-elle unique ?

e) Montrer que $f_{|\mathbb{R}_+}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$. Quel est le domaine de définition de sa bijection réciproque ? Tracer le graphe de $\left(f_{|\mathbb{R}_+}\right)^{-1}$.

f) Montrer que $\left(f_{|\mathbb{R}_+}\right)^{-1}$ est dérivable en $y = 2/e$, et calculer $\left(\left(f_{|\mathbb{R}_+}\right)^{-1}\right)'\left(\frac{2}{e}\right)$.

Exercice 9. La distance qui sépare 2 molécules résulte d'un équilibre entre une force attractive en $\frac{1}{r^7}$ et d'une force répulsive en $\frac{1}{r^{13}}$. Le potentiel correspondant est donné par la fonction

$$V : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & \left(\frac{4}{r}\right)^{12} - \left(\frac{4}{r}\right)^6 \end{array} \right.$$

Celà signifie que la force d'intéraction entre les molécules lorsqu'elles sont à une distance r l'une de l'autre est donnée par $F(r) = V'(r)$ (la force est attractive si $F > 0$, répulsive si $F < 0$).

a) Calculer les limites de V en 0^+ et en $+\infty$.

b) Donner le tableau des variations de V et tracer son graphe. Quelle est la distance d'équilibre entre les molécules ?

Exercice 10. Dans une pile électrochimique, la différence de potentiel E entre les électrodes et l'intensité i qui traverse la pile sont liées par la formule

$$E(i) = E^0 + C \ln \frac{i - i_c}{i_a - i},$$

où $E^0 \in \mathbb{R}$, $C > 0$ sont des constantes, ainsi que $i_c < 0 < i_a$ (intensités limites respectives de la cathode et de l'anode).
a) Etudier les variations et la convexité de $E :]i_c, i_a[\longrightarrow \mathbb{R}$ (on calculera notamment les coordonnées des éventuels points d'inflexion de E).
b) Tracer l'allure du graphe de E.
c) Donner l'image $E(]i_c, i_a[)$ de E. Justifier que E réalise une bijection de $]i_c, i_a[$ sur $E(]i_c, i_a[)$, et expliciter la bijection réciproque.

Exercice 11. On munit une plage d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le sable couvre le demi-plan $y < 0$, l'eau le demi-plan $y > 0$. Un maître-nageur se trouve au point de coordonnée $(0, 0)$. Un baigneur se noie au point de coordonnée $(100, 60)$ (les abscisses et les ordonnées sont mesurées en mètres). Le maître nageur court a une vitesse de 5m.s^{-1}, et nage a une vitesse de 3m.s^{-1}. En quel point doit-il entrer dans l'eau pour secourir au plus vite le baigneur ? Combien de temps met-il à arriver sur place ?

Exercice 12. On veut construire une boîte cylindrique qui soit aussi bien isolante que possible, sachant que les échanges thermiques avec l'extérieur sont proportionnels à la surface de la boîte.
a) Exprimer le volume et la surface de la boîte en fonction de la hauteur h du cylindre et du rayon r de sa base.
b) On veut que le volume de la boîte soit de 1L (1dm^3). Sous cette contrainte, quelle relation lie r et h ? Réexprimer la surface de la boîte en fonction de r dans ce cas.
c) Quelle valeur du rayon r permet d'avoir la plus petite surface ? Quelles sont la surface et la hauteur correspondantes ?

Exercice 13. On veut tailler une poutre dans un tronc cylindrique de diamètre D. La résistance de la poutre obtenue est proportionnelle au produit de l'aire de sa section (un rectangle de largeur l et de hauteur h) par sa hauteur h. Quelles dimensions donner à la poutre pour maximiser sa résistance ?

Exercice 14. On considère la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note T_α la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(\alpha, f(\alpha))$.
Le plan est muni d'un repère orthonormé. Si $\alpha \in]0, 1]$, on note $S(\alpha)$ l'aire de la surface délimitée par T_α, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
Pour quel $\alpha \in]0, 1]$ $S(\alpha)$ est-elle minimale ? Quelle est la valeur minimale prise par $S(\alpha)$ quand α varie dans $]0, 1]$?

Exercice 15 Montrer qu'il existe une fonction ε, définie sur $[-1, +\infty[$ et telle que $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, telle que

$$\forall x \geqslant 1, \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x).$$

Exercice 16. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \sin x - 2 \ln(1+x) - e^{x^2} + 1}{x^3}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x/2} - \sqrt{1+x}}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2(x)}{\ln(1+x) + e^{-x} - 1}$ **e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^4 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - x^4 + \frac{x^2}{2} \right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^4 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - x^4 + x^2 \right)$ **g)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^4 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - x^4 + \frac{x^2}{4} \right)$