Corrigé de la Feuille TD 5 : Intégration

Exercice 1.

a) $\boldsymbol{a(x) = (x^4 + 2x + 2)(x^5 + 5x^2 + 10x + 1)^{1/4}}$.

On commence par se poser la question de savoir le domaine sur lequel a est défini, et donc sur quel intervalle cela a un sens de calculer une primitive de a. Le domaine de définition de a est $D_a = \{x \in \mathbb{R}, u(x) \geqslant 0\}$ où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x^5+5x^2+10x+1$. u est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 5x^4+10x+10 = 5(x^4+2x+2)$, $u''(x) = 5(4x^3+2) = 20(x^3+1/2)$. $u''(x)$ est donc négative pour $x < -1/2^{1/3}$, positive pour $x > -1/2^{1/3}$. Donc $u'(x)$ atteint un minimum en $x = -1/2^{1/3}$. Ce minimum vaut $u'(-1/2^{1/3}) = 5(\frac{1}{2}\frac{1}{2^{1/3}} - 2\frac{1}{2^{1/3}} + 2) = 5(2 - \frac{3}{2\cdot 2^{1/3}}) > 0$. Donc $u'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $u(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, u est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution, qu'on note x_0 (on peut voir, par méthode de dichotomie par exemple, que $x_0 \approx -0,1$). On conclut que $D_a = [x_0, +\infty[$. On calcule donc les primitives de a sur D_a, en faisant le changement de variables

$$u = x^5 + 5x^2 + 10x + 1.$$

Alors

$$du = (5x^4 + 10x + 10)dx = 5(x^4 + 2x + 2)dx, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{du}{5} = (x^4 + 2x + 2)dx$$

et donc, pour $x \in D_a$,

$$\int (x^4 + 2x + 2)(x^5 + 5x^2 + 10x + 1)^{1/4}dx = \int u^{1/4}\frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int u^{1/4}du = \frac{1}{5}\frac{u^{5/4}}{5/4} + C = \frac{4}{25}u^{5/4} + C.$$

Les primitives de a sur $[x_0, +\infty[$ sont donc de la forme

$$\boxed{\int a(x)dx = \frac{4}{25}(x^5 + 5x^2 + 10x + 1)^{5/4} + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

b) $\boldsymbol{b(x) = \frac{x+3}{x+2}}$.

On calcule les primitives de b sur $]-\infty, -2[$ ou sur $]-2, +\infty[$:

$$\int \frac{x+3}{x+2}dx = \int \frac{x+2+1}{x+2}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)dx,$$

donc les primitives de b sur $]-\infty, -2[$ ou sur $]-2, +\infty[$ sont de la forme

$$\int b(x)dx = x + \ln|x+2| + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Remarque. En écrivant $x+3$ sous la forme $x+3 = (x+2)+1$, on a fait la division euclidienne du numérateur $x+3$ par le dénominateur $x+2$. Il peut être avantageux de faire une telle division euclidienne à chaque fois qu'on cherche à calculer la primitive d'une fonction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont des fonctions polynomiales telles que le degré du polynôme P est supérieur ou égal à celui de Q. Cette méthode consiste à écrire $P(x)$ sous la forme $P(x) = A(x)Q(x) + R(x)$, où $A(x)$ et $R(x)$ sont des polynmes en x et où le degré de R est strictement inférieur à celui de Q. Alors,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x)Q(x) + R(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Ici, $P(x) = x+3$, $Q(x) = x+2$, $A(x) = 1$, $R(x) = 1$. Voir aussi la question d).

c) $\boldsymbol{c(x) = \frac{1}{x\ln(x)}}$.

On calcule les primitives de c sur $]0, 1[$ ou sur $]1, +\infty[$ en faisant le changement de variables

$$u = \ln x.$$

Alors

$$du = \frac{dx}{x}$$

et

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + K,$$

donc les primitives de c sur $]0,1[$ ou sur $]1,+\infty[$ sont de la forme

$$\int c(x)dx = \ln|\ln x| + K,$$

où $K \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

d) $\boldsymbol{d(x) = \frac{x^3+3x^2+5x+1}{x+2}}$.
On commence par faire la division euclidienne du numérateur par le dénominateur (cf correction de la question b) :

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & x^3 & + & 3x^2 & + & 5x & + & 1 & x+2 \\ \cline{9-9}
\ominus & x^3 & + & 2x^2 & & & & & x^2+x+3 \\ \cline{2-8}
 & & & x^2 & + & 5x & + & 1 & \\
 & & \ominus & x^2 & + & 2x & & & \\ \cline{4-8}
 & & & & & 3x & + & 1 & \\
 & & & & \ominus & 3x & + & 6 & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & -5 &
\end{array}$$

La conclusion de ce calcul est que

$$x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = (x^2 + x + 3)(x + 2) - 5.$$

Donc

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 1}{x + 2} dx = \int \frac{(x^2 + x + 3)(x + 2) - 5}{x + 2} dx = \int \left(x^2 + x + 3 - \frac{5}{x + 2}\right),$$

et donc les primitives de d sur $]-\infty,-2[$ ou sur $]-2,+\infty[$ sont les fonctions de la forme

$$\boxed{\int d(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x - 5\ln|x + 2| + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

f) $\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}}$.
Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$. On va donc calculer les primitives de f sur $]-\infty,0[$ ou sur $]0,+\infty[$. On le fait par changement de variable, en posant

$$u = e^x, \qquad \text{et donc} \qquad du = e^x dx.$$

Alors

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int \frac{du}{u - 1} = \ln|u - 1| + C.$$

Donc les primitives de f sur $]-\infty,0[$ ou sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme

$$\boxed{\int f(x)dx = \ln|e^x - 1| + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.
Remarque. Le changement de variable $v = e^x - 1$ marche bien également.

g) $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{e^x-1}}$.
Le domaine de définition de g est $\mathbb{R}^*$. On va donc calculer les primitives de g sur $]-\infty,0[$ ou sur $]0,+\infty[$.
1ère méthode. On commence par réécrire $g(x)$ sous la forme

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{(e^x - 1)e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}},$$

et on fait le changement de variable

$$u = e^{-x}, \qquad \text{et donc} \qquad du = -e^{-x} dx.$$

Alors

$$\int \frac{1}{e^x - 1} dx = \int \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int \frac{-du}{1 - u} = \int \frac{du}{u - 1} = \ln|u - 1| + C,$$

Donc les primitives de g sur $]-\infty,0[$ ou sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme

$$\boxed{\int g(x)dx = \ln|e^{-x} - 1| + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.
2ème méthode. On fait le changement de variable

$$v = e^x, \qquad \text{et donc} \qquad dv = e^x dx, \qquad \text{et} \qquad dx = \frac{dv}{e^x} = \frac{dv}{v}.$$

Alors

$$\int \frac{1}{e^x - 1} dx = \int \frac{1}{v-1} \frac{1}{v} dv.$$

Pour calculer cette primitive, on peut remarquer (voir la méthode utilisée à l'exercice 4, question a) que pour tout $v \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$,

$$\frac{1}{(v-1)v} = \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v},$$

et donc

$$\int \frac{1}{e^x-1} dx = \int \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v}\right) dv = \ln|v-1| - \ln|v| + \tilde{C} = \ln|e^x - 1| - \ln|e^x| + \tilde{C} = \ln \frac{|e^x - 1|}{e^x} + \tilde{C} = \ln|1 - e^{-x}| + \tilde{C},$$

où $\tilde{C}$ est une constante quelconque. On retrouve donc le résultat donné par la première méthode, et les constante C et $\tilde{C}$ sont en fait les mêmes .

h) $h(x) = xe^{x^2}$.
On calcule les primitives de h sur $\mathbb{R}$ en faisant le changement de variable $u = x^2$. Alors $du = 2xdx$, et

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{e^u}{2} + C.$$

Donc les primitives de h sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$\boxed{\int h(x)dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.
Remarque. Le changement de variable $v = e^{x^2}$ permet aussi de mener le calcul à bien.

i) $i(x) = \frac{\ln x}{x}$.
i est définie sur $]0, +\infty[$, intervalle sur lequel on calcule ses primitives grâce au changement de variable $u = \ln x$. Alors $du = \frac{dx}{x}$, et

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C.$$

Donc les primitives de i sur $]0, +\infty[$ sont de la forme

$$\boxed{\int i(x)dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

j) $j(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$.
On calcule les primitives de j sur $\mathbb{R}$ en faisant le changement de variable $u = \cos x$. Alors $du = -\sin x dx$, et

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int \frac{-du}{1+u^2} = -\arctan u + C.$$

Donc les primitives de j sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$\boxed{\int j(x)dx = -\arctan(\cos x) + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

k) $k(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
On commence par remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$. En effet, $x^2 + x + 1$ est un polynôme de degré 2, de coefficient dominant positif, de discriminant $-3 < 0$. Donc on peut chercher les primitives de k sur $\mathbb{R}$, en faisant le changement de variable

$$u = x^2 + x + 1. \qquad \text{Alors} \qquad du = (2x + 1)dx,$$

et donc
$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2}du = \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{u} + C.$$
Donc les primitives de k sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme
$$\boxed{\int k(x)dx = 2\sqrt{x^2+x+1} + C,}$$
où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

l) $\boldsymbol{l(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}}$.
Pour chercher les primitives de l sur $\mathbb{R}$, on commence par réécrire $l(x)$ sous la forme $l(x) = \frac{e^x}{(1+e^{-x})\cdot e^x} = \frac{e^x}{e^x+1}$. On fait le changement de variable $u = e^x$ Alors $du = e^x dx$, et
$$\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{du}{u+1} = \ln(u+1) + C.$$
Donc les primitives de l sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions du type
$$\boxed{\int l(x)dx = \ln(e^x+1) + C,}$$
où C est une constante quelconque.
Remarque. Le changement de variable $v = e^x + 1$ marche bien aussi. On peut aussi faire le changement de variable $w = e^{-x}$, mais le calcul est un peu plus compliqué, comme dans la deuxième méthode de la question g).

m) $\boldsymbol{m(x) = \frac{1}{x^2+4}}$.
On cherche les primitives de m sur $\mathbb{R}$. On commence par réécrire m de la manière suivante :
$$m(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{(x^2/4)+1} = \frac{1}{4}\frac{1}{(x/2)^2+1}.$$
Puis on fait le changement de variable $u = x/2$. Alors $du = dx/2$, et
$$\int \frac{1}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{4}\frac{1}{(x/2)^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{2}\arctan u + C,$$
et donc les primitives de m sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme
$$\int m(x)dx = \frac{1}{2}\arctan(x/2) + C,$$
où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

n) $\boldsymbol{n(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}}$.
n est définie sur $]-2,2[$. C'est sur cet intervalle qu'on va en calculer les primitives. On commence par réécrire n sous la forme
$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{4}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2/4}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}.$$
On fait le changement de variable $u = x/2$. Alors $du = dx/2$, et
$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\frac{dx}{2} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C.$$
Donc les primitives de n sur $]-2,2[$ sont les fonctions de la forme
$$\boxed{\int n(x)dx = \arcsin(x/2) + C,}$$
où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

o) $\boldsymbol{o(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$3 - 2x - x^2 = 4 - 1 - 2x - x^2 = 4 - (1+x)^2.$$

o est définie sur le domaine

$$D_o = \{x \in \mathbb{R} \mid 4-(1+x)^2 \geqslant 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < 1+x < 2\} =]-3,1[.$$

C'est donc sur cet intervalle qu'on va calculer les primitives de o. Pour tout $x \in]-3,1[$, on a

$$o(x) = \frac{1}{\sqrt{4-(1+x)^2}} = n(u(x)),$$

où n est la fonction de la question précédente et $u(x) = x+1$. Comme $u'(x) = 1$, en introduisant la nouvelle variable $u = u(x)$, on a

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int n(u(x))dx = \int n(u)du = \arcsin(u/2) + C,$$

et donc les primitives de o sur $]-3,1[$. sont les fonctions de la forme

$$\int o(x)dx = \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.
Remarque : si on n'avait pas fait la question n) avant, on aurait pu choisir de faire le changement de variable $v = (x+1)/2$.

p) $p(x) = \frac{1}{\cos x}$.
$p(x)$ est défini dès lors que x n'est pas de la forme $\pi/2 + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. Donc le domaine de définition de p est

$$D_p = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[.$$

On va donc chercher les primitives de p sur les intervalles de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, où $k \in \mathbb{Z}$. On fixe $k \in \mathbb{Z}$,[1] et, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, on fait le changement de variable

$$u = \tan\frac{x-k\pi}{2}.$$

Noter que si $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, alors $\frac{x-k\pi}{2} \in]-\pi/4, \pi/4[$, et donc $u \in]-\tan\frac{\pi}{4}, \tan\frac{\pi}{4}[=]-1,1[$. Alors,

$$du = \frac{1}{2}\tan'\frac{x-k\pi}{2}dx = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x-k\pi}{2}\right)dx = \frac{1}{2}(1+u^2)dx, \qquad \text{et donc} \qquad dx = \frac{2du}{1+u^2}.$$

Par ailleurs, $\cos x = (-1)^k \cos(x-k\pi)$ et

$$\cos(x-k\pi) = \cos^2\frac{x-k\pi}{2} - \sin^2\frac{x-k\pi}{2} = \cos^2\frac{x-k\pi}{2}\left(1-\tan^2\frac{x-k\pi}{2}\right) = \frac{1-\tan^2\frac{x-k\pi}{2}}{1+\tan^2\frac{x-k\pi}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}dx &= (-1)^k \int \frac{1+u^2}{1-u^2}\frac{2du}{1+u^2} = (-1)^k \int \frac{2}{1-u^2}du = (-1)^k \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)du \\ &= (-1)^k\left(-\ln(1-u) + \ln(1+u)\right) + C = (-1)^k \ln\frac{1+u}{1-u} + C.\end{aligned}$$

Sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, les primitives de p sont donc les fonctions de la forme

$$\boxed{\int p(x)dx = (-1)^k \ln\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}} + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

q) $q(x) = \frac{1}{2+\sqrt{x}}$.
Le domaine de définition de q est $[0,+\infty[$. On va donc chercher une primitive de q sur cet intervalle, en faisant le changement de variable

$$u = \sqrt{x}. \qquad \text{Alors} \qquad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{2u}, \qquad \text{et donc} \qquad dx = 2udu.$$

1. En première lecture, pour bien comprendre le calcul, on peut se contenter de chercher les primitives sur $]-\pi/2, \pi/2[$, et donc prendre $k = 0$ dans tout ce qui suit.

Donc
$$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}} = \int \frac{2udu}{2+u} = \int \frac{2(u+2)-4}{u+2}du = \int \left(2-\frac{4}{u+2}\right)du = 2\int du - 4\int \frac{du}{u+2} = 2u - 4\ln(u+2) + C.$$
Donc les primitives de q sur $[0,+\infty[$ sont les fonctions du type
$$\boxed{\int q(x)dx = 2\sqrt{x} - 4\ln(\sqrt{x}+2) + C,}$$
où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Exercice 2.
a) $a(x) = x\ln x$.
Pour calculer les primitives de a sur $]0,+\infty[$, on fait une intégration par parties en posant
$$u(x) = \ln x, \qquad v'(x) = x. \qquad \text{Alors} \qquad u'(x) = \frac{1}{x}, \qquad v(x) = \frac{x^2}{2}$$
et
$$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx,$$
donc
$$\boxed{\int a(x)dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C,}$$
où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

b) $b(x) = x(\ln x)^2$.
Pour calculer les primitives de b sur $]0,+\infty[$, on fait une intégration par parties en posant
$$u(x) = (\ln x)^2, \qquad v'(x) = x. \qquad \text{Alors} \qquad u'(x) = \frac{2\ln x}{x}, \qquad v(x) = \frac{x^2}{2}$$
et
$$\int x(\ln x)^2dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int \frac{2\ln x}{x}\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int x\ln x dx$$
La primitive qu'il reste à calculer dans le membre de droite est celle qu'on a calculé à la question a). Donc, en réutilisant le résultat de a),
$$\boxed{\int b(x)dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C,}$$
où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque (pas la même qu'en a).

c) $c(x) = x(2x+3)^{1/3}$.
Pour calculer les primitives de c sur $[-3/2,+\infty[$, on fait une intégration par parties en posant
$$u(x) = x, \quad v'(x) = (2x+3)^{1/3}. \quad \text{Alors} \quad u'(x) = 1, \quad v(x) = \int (2x+3)^{1/3}dx = \int w^{1/3}\frac{dw}{2} = \frac{1}{2}\frac{w^{4/3}}{4/3} = \frac{3(2x+3)^{4/3}}{8},$$
où pour calculer $v(x)$, on a fait le changement de variable $w = 2x+3$, et on a donc utilisé $dw = 2dx$, d'où $dx = dw/2$. La formule d'intégration par parties donne
$$\begin{aligned}\int x(2x+3)^{1/3}dx &= \frac{3(2x+3)^{4/3}}{8}x - \int \frac{3(2x+3)^{4/3}}{8}dx = \frac{3x(2x+3)^{4/3}}{8} - \frac{3}{8}\int w^{4/3}\frac{dw}{2},\\ &= \frac{3x(2x+3)^{4/3}}{8} - \frac{3}{16}\frac{w^{7/3}}{7/3} + C,\end{aligned}$$
où on a réutilisé le changement de variable $w = 2x+3$. Donc
$$\boxed{\int c(x)dx = \frac{3x}{8}(2x+3)^{4/3} - \frac{9}{112}(2x+3)^{7/3} + K,}$$
où $K \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque. En écrivant $(2x+3)^{7/3} = (2x+3)^{4/3}\cdot(2x+3)$, les primitives de c peuvent aussi s'écrire
$$\int c(x)dx = \frac{3}{112}(2x+3)^{4/3}\left(14x - 3(2x+3)\right) + K = \frac{3}{112}(2x+3)^{4/3}(8x-9) + K.$$

d) $\boldsymbol{d(x) = x^3 e^{3x^2+1}}$.
Pour calculer les primitives de d sur $\mathbb{R}$, on fait une intégration par parties en posant

$$u(x) = x^2, \qquad v'(x) = xe^{3x^2+1}. \qquad \text{Alors} \qquad u'(x) = 2x, \qquad v(x) = \int xe^{3x^2+1}dx.$$

Pour calculer $v(x)$, on utilise le changement de variable $w = 3x^2+1$. On a alors $dw = 6xdx$, donc $xdx = dw/6$, et donc

$$v(x) = \int xe^{3x^2+1}dx = \int e^w \frac{dw}{6} = \frac{e^w}{6} = \frac{e^{3x^2+1}}{6}.$$

La formule d'intégration par parties donne alors

$$\int x^3 e^{3x^2+1}dx = x^2\frac{e^{3x^2+1}}{6} - \int 2x\frac{e^{3x^2+1}}{6}dx = \frac{x^2}{6}e^{3x^2+1} - \frac{1}{3}\int xe^{3x^2+1}dx,$$

où la primitive qui reste à calculer dans le membre de droite est celle qu'on a déjà calculé pour trouver $v(x)$. Donc

$$\boxed{\int d(x)dx = \frac{x^2}{6}e^{3x^2+1} - \frac{1}{18}e^{3x^2+1} + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.
Remarque. On a ici fait une intégration par partie, puis le changement de variable $w = 3x^2+1$ pour calculer $v(x)$. On aurait aussi bien pu commencer par faire ce changement de variable pour calculer $\int d(x)dx$. Il y aurait ensuite eu besoin de faire une intégration par parties pour calculer $\int we^w dw$.

f) $\boldsymbol{f(x) = x^3\sqrt{x^2+1}}$.
Pour calculer les primitives de f sur $\mathbb{R}$, on fait une intégration par parties en posant

$$u(x) = x^2, \qquad v'(x) = x\sqrt{x^2+1}, \qquad \text{et donc} \qquad u'(x) = 2x, \qquad v(x) = \int x\sqrt{x^2+1}dx.$$

On calcule $v(x)$ grâce au changement de variable $w = x^2+1$, qui donne $dw = 2xdx$, et donc

$$v(x) = \int x\sqrt{x^2+1}dx = \int w^{1/2}\frac{dw}{2} = \frac{1}{2}\frac{w^{3/2}}{3/2} = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3}.$$

La formule d'intégration par parties donne alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}dx = \frac{x^2}{3}(x^2+1)^{3/2} - \int \frac{2x}{3}(x^2+1)^{3/2}dx.$$

La primitive qui reste à calculer dans le membre de droite peut l'être grâce au même changement de variable $w = x^2+1$:

$$\frac{1}{3}\int 2x(x^2+1)^{3/2}dx = \frac{1}{3}\int w^{3/2}dw = \frac{1}{3}\frac{w^{5/2}}{5/2} + C = \frac{2}{15}(x^2+1)^{5/2} + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$. Au total, on trouve donc comme primitives de f sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\int f(x)dx = \frac{x^2}{3}(x^2+1)^{3/2} - \frac{2}{15}(x^2+1)^{5/2} + K,}$$

où $K \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

g) $\boldsymbol{g(x) = xe^{3x}}$.
Pour calculer les primitives de g sur $\mathbb{R}$, on fait une intégration par parties en posant

$$u(x) = x, \qquad v'(x) = e^{3x}, \qquad \text{et donc} \qquad u'(x) = 1 \qquad v(x) = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}.$$

La formule d'intégration par parties donne alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int xe^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C.$$

Les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions du type

$$\boxed{\int g(x)dx = \frac{3x-1}{9}e^{3x} + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

h) $h(x) = (\ln x)^2$.
Pour calculer les primitives de g sur $]0, +\infty[$, on fait une intégration par parties en posant

$$u(x) = (\ln x)^2, \qquad v'(x) = 1, \qquad \text{et donc} \qquad u'(x) = \frac{2}{x}\ln x \qquad v(x) = x.$$

La formule d'intégration par parties donne alors, pour $x > 0$,

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int \frac{2}{x}\ln x \cdot x dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + C =,$$

Les primitives de h sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions du type

$$\boxed{\int h(x)dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

i) $i(x) = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
Pour calculer les primitives de i sur $]-1, 1[$, on fait une intégration par parties en posant

$$u(x) = \arcsin x, \qquad v'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{et donc} \qquad u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad v(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Pour calculer $v(x)$, on peut faire le changement de variable $w = 1 - x^2$, qui donne $dw = -2xdx$, et donc

$$v(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{-dw/2}{\sqrt{w}} = -\sqrt{w} = -\sqrt{1-x^2}.$$

La formule d'intégration par parties donne alors, pour $x \in]-1, 1[$:

$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \cdot (-\sqrt{1-x^2}) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-\sqrt{1-x^2})dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx.$$

Donc primitives de i sur $]-1, 1[$ sont les fonctions de la forme

$$\boxed{\int i(x)dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Exercice 3. On note $D(t)$ la distance parcourue par le véhicule au temps t. La distance parcourue entre $t = 0$ et $t = 2$ est donc $D(2) - D(0)$. Par ailleurs, à tout instant t, on a $D'(t) = v(t)$. Donc

$$D(t) = \int v(t)dt = \int (80 - 30e^{-t})dt = 80t + 30e^{-t} + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$. Donc

$$D(2) - D(0) = \big(80 \cdot 2 + 30e^{-2} + C\big) - \big(80 \cdot 0 + 30e^{-0} + C\big) = 160 + 30e^{-2} - 30 = \boxed{130 + 30e^{-2}.}$$

Remarque. $D(2) - D(0) = \int_0^2 v(t)dt$.

Exercice 4.
a) Si $a, b \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in= \backslash\{-1, 0\}$, on a

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1) + bx}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}.$$

Si on choisit a et b de sorte que $a + b = 0$ et $a = 1$, c'est à dire $\boxed{\text{a=1 et b=-1,}}$ on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

D'où

$$\int_2^3 \frac{dx}{x(x+1)} = \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = [\ln x - \ln(x+1)]_2^3$$
$$= (\ln 3 - \ln 4) - (\ln 2 - \ln 3) = \ln 3 - 2\ln 2 - \ln 2 + \ln 3 = 2\ln 3 - 3\ln 2 = \ln \frac{3^2}{2^3} = \boxed{\ln(9/8).}$$

b) On fait le changement de variable $t = \sqrt{x}$. Alors $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, donc $dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt$. De plus, pour $x = 1$, on a $t = \sqrt{1} = 1$, et pour $x = e^2$, $t = \sqrt{e^2} = e$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x})} &= \int_1^e \frac{2tdt}{t^2(1+2t)} = 2\int_1^e \frac{dt}{t(1+2t)} = 4\int_1^e \frac{dt}{2t(1+2t)} \\
&= 4\int_1^e \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2t+1}\right) dt \qquad \text{(d'après a))} \\
&= 4\left[\frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_1^e \\
&= 4\left[\left(\frac{1}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln(1+2e)\right) - \left(\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\ln 3\right)\right] \\
&= 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+2e) + \frac{1}{2}\ln 3\right) \\
&= \boxed{2\left(1 - \ln(1+2e) + \ln 3\right) = 2\ln\frac{3e}{1+2e}.}
\end{aligned}$$

Exercice 5.
a) $\boldsymbol{A = \int_1^2 \frac{dx}{(2x+3)^2}}$.
On fait le changement de variable

$$u = 2x+3. \qquad \text{Alors} \qquad du = 2dx \qquad \text{et si} \quad x = 1, \text{ alors } u = 5\ ; \quad \text{si} \quad x = 2, \text{ alors } \ u = 7.$$

Donc

$$A = \int_1^2 \frac{dx}{(2x+3)^2} = \int_5^7 \frac{du/2}{u^2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u}\right]_5^7 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7} - \left(-\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{35} = \boxed{\frac{1}{35}.}$$

b) $\boldsymbol{B = \int_{-1/2}^{-1/2+\sqrt{5}/2} \frac{dx}{2x^2+2x+3}}$.
On commence par écrire

$$\begin{aligned}
2x^2+2x+3 &= 2\left(x^2+x+\frac{3}{2}\right) = 2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = 2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}\right) \\
&= \frac{5}{2}\left(1 + \frac{4}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{5}{2}\left(1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Alors, on pose

$$u = \frac{2x+1}{\sqrt{5}}. \qquad \text{Alors} \qquad du = \frac{2dx}{\sqrt{5}}, \quad dx = \frac{\sqrt{5}}{2}du, \quad \text{et si} \quad x = -\frac{1}{2}, \text{ alors } u = 0\ ; \quad \text{si} \quad x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ alors } \ u = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
B &= \int_{-1/2}^{-1/2+\sqrt{5}/2} \frac{dx}{2x^2+2x+3} = \frac{2}{5}\int_{-1/2}^{-1/2+\sqrt{5}/2} \frac{dx}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\frac{\sqrt{5}}{2}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\arctan u\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\arctan 1 - \arctan 0\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\pi}{4}.}
\end{aligned}$$

c) $\boldsymbol{C = \int_{-1}^2 \frac{2x+1}{2x^2+2x+3}dx}$.
On fait le changement de variable

$$u = 2x^2+2x+3. \qquad \text{Alors} \qquad du = (4x+2)dx = 2(2x+1)dx, \qquad \text{d'où} \quad (2x+1)dx = \frac{du}{2},$$

$$\text{et si} \quad x = -1, \text{ alors } u = 2\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1) + 3 = 3\ ; \quad \text{si} \quad x = 2, \text{ alors } \ u = 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2 + 3 = 15.$$

Donc

$$C=\int_{-1}^{2}\frac{2x+1}{2x^2+2x+3}dx=\int_3^{15}\frac{1}{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int_3^{15}\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\left[\ln u\right]_3^{15}=\frac{1}{2}\left(\ln 15-\ln 3\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{15}{3}=\boxed{\frac{1}{2}\ln 5.}$$

d) $D=\int_0^1 xe^{x^2}dx$.
On fait le changement de variable

$$u=x^2.\qquad \text{Alors}\qquad du=2xdx,\qquad \text{d'où}\quad xdx=\frac{du}{2},$$

$$\text{et si}\quad x=0,\ \text{alors } u=0^2=0\ ;\quad \text{si}\quad x=1,\ \text{alors}\ u=1^2=1.$$

Donc

$$D=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\int_0^1 e^u\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\left[e^u\right]_0^1=\frac{1}{2}(e^1-e^0)=\boxed{\frac{e-1}{2}.}$$

e) $E=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx$.
On fait le changement de variable

$$u=\ln x.\qquad \text{Alors}\qquad du=\frac{dx}{x},\qquad \text{et si}\quad x=1,\ \text{alors } u=\ln 1=0\ ;\quad \text{si}\quad x=e^2\ \text{alors}\ u=\ln(e^2)=2\ln e=2.$$

Donc

$$E=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\int_0^2 udu=\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2=\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\boxed{2.}$$

f) $F=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$.
On fait le changement de variable

$$u=\ln x.\qquad \text{Alors}\qquad du=\frac{dx}{x},\qquad \text{et si}\quad x=e,\ \text{alors } u=\ln e=1\ ;\quad \text{si}\quad x=e^2\ \text{alors}\ u=\ln(e^2)=2\ln e=2.$$

Donc

$$F=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}=\int_1^2\frac{du}{u}=\left[\ln u\right]_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

g) $G=\int_1^2 x\ln x dx$.
On fait une intégration par parties en posant

$$u(x)=\ln x,\quad v'(x)=x.\qquad \text{Alors}\quad u'(x)=\frac{1}{x}\quad \text{et}\quad v(x)=\int xdx=\frac{x^2}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}G&=\int_1^2 x\ln xdx=\left[(\ln x)\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{2}\left((\ln 2)\cdot 2^2-(\ln 1)\cdot 1^2\right)-\frac{1}{2}\int_1^2 xdx\\&=2\ln 2-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=2\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)=2\ln 2-\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\boxed{2\ln 2-\frac{3}{4}.}\end{aligned}$$

h) $H=\int_0^{\ln(3/2)}\frac{e^x}{1+e^x}dx$.
On fait le changement de variable

$$u=1+e^x.\qquad \text{Alors}\qquad du=e^xdx,$$

$$\text{et si}\quad x=0,\ \text{alors } u=1+e^0=2\ ;\quad \text{si}\quad x=\ln(3/2)\ \text{alors}\ u=1+e^{\ln(3/2)}=1+3/2=5/2.$$

Donc

$$H=\int_0^{\ln(3/2)}\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int_2^{5/2}\frac{du}{u}=\left[\ln u\right]_2^{5/2}=\ln(5/2)-\ln 2=\boxed{\ln(5/4).}$$

i) $I=\int_0^1 x^2\arctan(x)dx$.
On fait une intégration par parties en posant

$$u(x)=\arctan x,\quad v'(x)=x^2.\qquad \text{Alors}\quad u'(x)=\frac{1}{1+x^2}\quad \text{et}\quad v(x)=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}.$$

Donc

$$I=\int_0^1 x^2\arctan(x)dx=\left[\frac{x^3}{3}\arctan x\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

La division euclidienne de x^3 par x^2+1 donne $x^3 = x(x^2+1) + (-x)$,et donc

$$\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{x^2+1}.$$

On poursuit donc le calcul de I de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
I = \int_0^1 x^2 \arctan(x)dx &= \left(\frac{1^3}{3}\arctan 1 - \frac{0^3}{3}\arctan 0\right) - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx \\
&= \frac{1}{3}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\int_0^1 xdx + \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{6}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{\ln 2}{6} = \boxed{\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \ln 2\right).}
\end{aligned}$$

j) $\boldsymbol{J = \int_0^{\pi/4} x^2 \cos(x) dx}$.
On fait une intégration par parties, en posant

$$u(x) = x^2, \quad v'(x) = \cos x, \quad \text{et donc} \quad u'(x) = 2x, \quad v(x) = \int \cos x dx = \sin x.$$

Donc

$$J = \int_0^{\pi/4} x^2 \cos(x)dx = \left[x^2 \sin x\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} 2x \sin x dx.$$

Pour calculer la nouvelle intégrale apparaissant dans le membre de droite, on fait une nouvelle intégration par parties, en posant

$$\tilde{u}(x) = 2x, \quad \tilde{v}'(x) = \sin x, \quad \text{et donc} \quad \tilde{u}'(x) = 2, \quad \tilde{v}(x) = \int \sin x dx = -\cos x.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
J &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin\frac{\pi}{4} - \left(\left[2x(-\cos x)\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} 2\cdot(-\cos x)dx\right) \\
&= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} - 2\cdot 0\cos 0 - 2\left[\sin x\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi^2}{16}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\sqrt{2}\left(\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} - 1\right).}
\end{aligned}$$

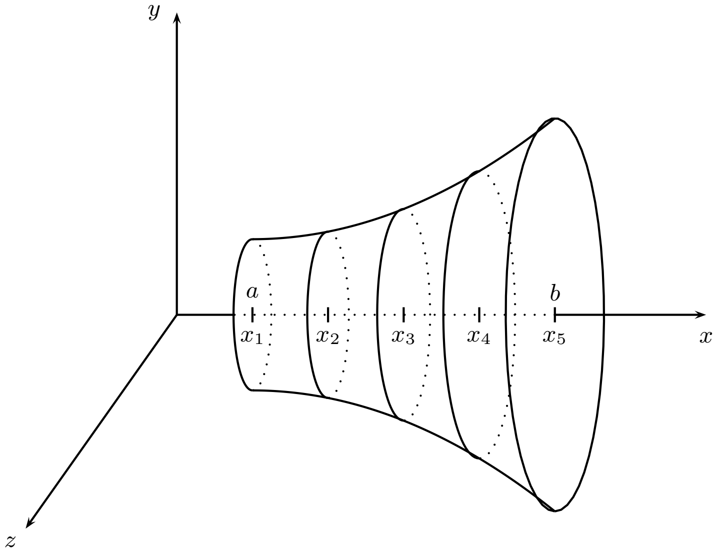
k) $\boldsymbol{K = \int_0^{\pi/3} (\sin x)^3 (\cos x)^2 dx}$.
On fait le changement de variable $u = \cos x$.

$$\text{Alors} \quad du = -\sin x dx, \quad \text{et si} \quad x = 0, \quad \text{alors} \quad u = \cos 0 = 1\ ; \qquad \text{si} \quad x = \frac{\pi}{3}, \quad \text{on a} \quad u = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Donc, en utilisant la formule $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$$\begin{aligned}
K = \int_0^{\pi/3} \sin^3 x \cos^2 x dx &= -\int_0^{\pi/3} \sin^2 x \cos^2 x \cdot (-\sin x)dx \\
&= -\int_0^{\pi/3} (1-\cos^2 x)\cos^2 x \cdot (-\sin x)dx \\
&= -\int_1^{1/2} (1-u^2)u^2 du = \int_{1/2}^1 (1-u^2)u^2 du = \int_{1/2}^1 (u^2 - u^4)du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right]_{1/2}^1 \\
&= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5}\right) - \left(\frac{(1/2)^3}{3} - \frac{(1/2)^5}{5}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160} = \frac{160 - 96 - 20 + 3}{480} = \boxed{\frac{47}{480}.}
\end{aligned}$$

Exercice 6.
a)



Soit $n > 0$ un entier (penser n comme étant grand). On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$: $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \cdots, [x_n, x_{n+1}]$, et on saucissonne le volume en n tranches comme sur le dessin. Si n est grand, pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, la tranche correspondant à l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ est quasiment un mince cylindre, dont la base a pour rayon $f(x_j)$ et dont l'épaisseur est $x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}$. Le volume de la j-ème tranche est donc approximativement égal à celle de ce mince cylindre, dont on peut calculer le volume :

$$\frac{b-a}{n}\pi f(x_j)^2.$$

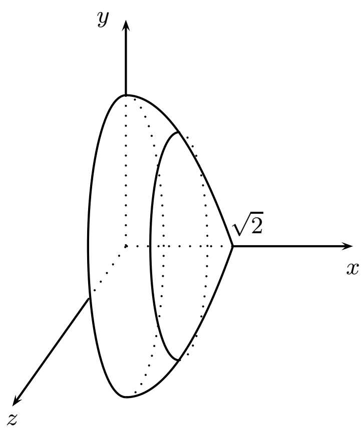
On peut donc approcher le volume total par la somme des volumes des n minces cylindres :

$$V \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n}\pi f(x_j)^2.$$

L'approximation faite en approchant le volume de la j-ème tranche par celui d'un mince cylindre est d'autant plus précise que les tranches sont fines, c'est à dire que n est grand. Donc à la limite $n \to \infty$, l'approximation de la valeur de V ci-dessus devient une vraie égalité :

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n}\pi f(x_j)^2 = \boxed{\int_a^b \pi f(x)^2 dx.}$$

b)

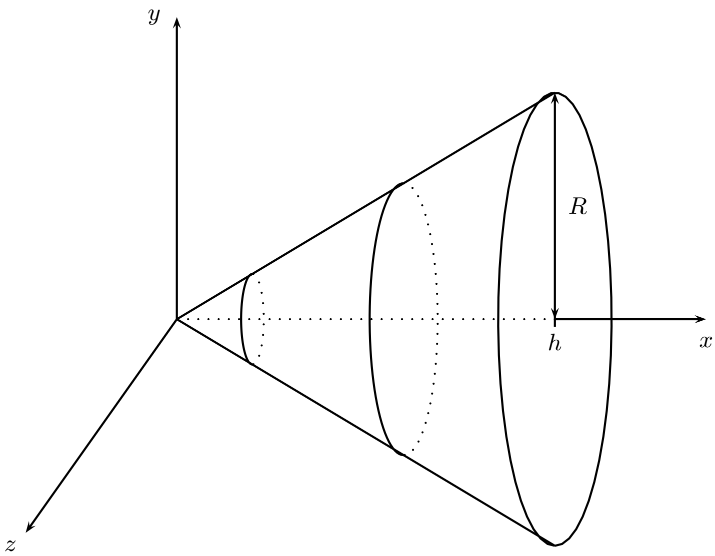


Pour $f(x) = 2 - x^2$, $a = 0$ et $b = \sqrt{2}$,

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} \pi(2-x^2)^2 dx = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 4x^2 + x^4) dx = \pi \left[4x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \pi \left(4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}^3}{3} + \frac{\sqrt{2}^5}{5} - \left(4 \cdot 0 - \frac{4 \cdot 0^3}{3} + \frac{0^5}{5}\right)\right) = \pi\sqrt{2}\left(4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{5}\right) = \boxed{\frac{32\pi\sqrt{2}}{15}.}$$

c)



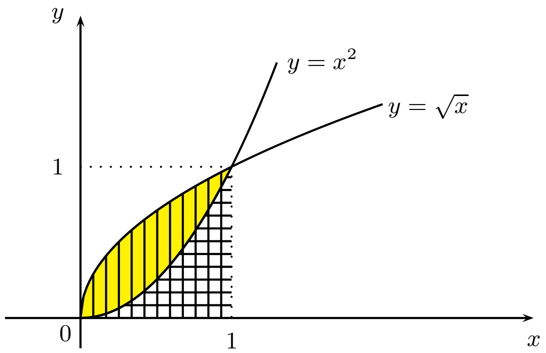
Pour calculer le volume qu'on cherche, on choisit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{R}{h}x,$$

et on prend $a = 0$ et $b = h$. Le volume du cône est alors

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{R}{h}x\right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi \frac{R^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3}\pi R^2 h.}$$

Exercice 7.



Les solutions de l'équation $\sqrt{x} = x^2$ sont 0 et 1. On en déduit que les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$ s'intersectent aux points de coordonnées $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Pour $x \in [0, 1]$, $\sqrt{x} \geqslant x^2$. L'aire A recherchée (coloriée en jaune) est donc celle qui se trouve sous la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ (hachures verticales), à laquelle on retranche l'aire sous la courbe d'équation $y = x^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$ (hachures horizontales) :

$$A = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3/2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}.}$$

Exercice 8.

a) $\int x^\alpha dx$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

On va calculer la primitive sur un intervalle I sur lequel la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie :

- si $\alpha \in \mathbb{N}$, on peut prendre $I = \mathbb{R}$
- si $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, on peut prendre $I =]-\infty, 0[$ ou $I =]0, +\infty[$
- si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, on peut prendre $I =]0, \infty[$ ($x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ n'est défini a priori que sur cet intervalle I, même si, quand $\alpha > 0$ et $\alpha \notin \mathbb{Z}$, on peut étendre la définition par continuité à $x = 0$ (par $0^\alpha = 0$), et donc prendre $I = [0, +\infty[$)

Les primitives de $x \to x^\alpha$ sur l'intervalle I décrit ci-dessus sont du type :

$$\boxed{\int x^\alpha dx = \begin{cases} \int x^{-1}dx = \ln|x| + C & \text{si } \alpha = -1, \\ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \text{si } \alpha \neq -1. \end{cases}}$$

b) $\int x^m (\ln x)^n dx$, où $m \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$ sont des entiers.

On calcule toutes ces primitives sur $I =]0, +\infty[$ (intervalle sur lequel $x^m (\ln x)^n$ est bien défini). On calcule ces primitives en faisant une intégration par parties, avec

$$u(x) = (\ln x)^n, \qquad v'(x) = x^m. \qquad \text{alors} \qquad u'(x) = \frac{n}{x}(\ln x)^{n-1} \qquad \text{et} \qquad v(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

et donc

$$\boxed{\int x^m (\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \int \frac{n}{m+1} x^m (\ln x)^{n-1} dx.} \tag{$*$}$$

Après n utilisations successives de la formule (*) (et donc n intégrations par parties successives), on se ramène à calculer la primitive d'un polynme en x (comme dans la formule (*) pour $n = 1$, où, dans la primitive du membre de droite, le terme $\ln x$, élevé à la puissance 0, disparait), et on peut conclure. Ainsi, en notant $C_1, C_2, \cdots, C_7$ des constantes réelles quelconques,

- en écrivant (*) pour $m = 0$, $n = 1$, on obtient

$$\int \boldsymbol{\ln x dx} = \boxed{x \ln x - x + C_1,}$$

- en utilisant (*) pour $m = 0$, $n = 2$, puis la primitive de $\ln x$ calculée ci-dessus, on a

$$\int \boldsymbol{(\ln x)^2 dx} = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx = \boxed{x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C_2,}$$

- en utilisant (*) pour $m = 0$, $n = 3$, puis la primitive de $(\ln x)^2$ calculée ci-dessus, on a

$$\int \boldsymbol{(\ln x)^3 dx} = x(\ln x)^3 - 3\int (\ln x)^2 dx = \boxed{x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \ln x - 6x + C_3,}$$

- en utilisant (*) pour $m = 0$, $n = 4$, puis la primitive de $(\ln x)^3$ calculée ci-dessus, on a

$$\int \boldsymbol{(\ln x)^4 dx} = x(\ln x)^4 - 4\int (\ln x)^3 dx = \boxed{x(\ln x)^4 - 4x(\ln x)^3 + 12x(\ln x)^2 - 24x \ln x + 24x + C_4,}$$

- en utilisant (*) pour $m = 0$, $n = 5$, puis la primitive de $(\ln x)^4$ calculée ci-dessus, on a

$$\int \boldsymbol{(\ln x)^5 dx} = x(\ln x)^5 - 5\int (\ln x)^4 dx = \boxed{x(\ln x)^5 - 5x(\ln x)^4 + 20x(\ln x)^3 - 60x(\ln x)^2 + 120x \ln x - 120x + C_5,}$$

- en utilisant (*) pour $m = 1$, $n = 2$, puis pour $m = 1, n = 1$, on obtient

$$\int \boldsymbol{x(\ln x)^2 dx} = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx\right) = \boxed{\frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C_6,}$$

- en utilisant (*) pour $m = 2$, $n = 3$, puis pour $m = 2, n = 2$, et enfin pour $m = 2, n = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \int \boldsymbol{x^2(\ln x)^3 dx} &= \frac{x^3}{3}(\ln x)^3 - \int x^2(\ln x)^2 dx = \frac{x^3}{3}(\ln x)^3 - \left(\frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}\int x^2 \ln x dx\right) \\ &= \frac{x^3}{3}(\ln x)^3 - \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx\right) = \boxed{\frac{x^3}{3}(\ln x)^3 - \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 + \frac{2}{9}x^3 \ln x - \frac{2x^3}{27} + C_7.} \end{aligned}$$

c) $\boldsymbol{\int \frac{1}{x+2}dx}$. Les primitives de $x \mapsto 1/(x+2)$ sur $]-\infty,-2[$ ou sur $]-2,+\infty[$ sont données par

$$\boxed{\int \frac{1}{x+2}dx = \ln|x+2| + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int \frac{x+a}{x+b}dx}$. Pour calculer $\int \frac{x+a}{x+b}dx$ sur $]-\infty,-b[$ ou sur $]-b,+\infty[$, on commence par écrire

$$\frac{x+a}{x+b} = \frac{x+b+(a-b)}{x+b} = 1 + (a-b)\frac{1}{x+b}.$$

Noter que la première étape du calcul ci-dessus est la division euclidienne de $x+a$ par $x+b$. Alors on a

$$\int \frac{x+a}{x+b}dx = \int \left(1 + (a-b)\frac{1}{x+b}\right) dx = \boxed{x + (a-b)\ln|x+b| + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque. En particulier, en prenant $a=1$, $b=3$ d'une part, et $a=-1$, $b=2$ d'autre part, on a donc

$$\boxed{\int \frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x+3}}\boldsymbol{dx} = x - 2\ln|x+3| + C_1,} \qquad \boxed{\int \frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{x+2}}\boldsymbol{dx} = x - 3\ln|x+2| + C_2,}$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ et $C_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes quelconques.

d) Toutes les fonctions dont on cherche les primitives dans cette question sont définies et continues sur $\mathbb{R}$. On va donc en calculer des primitives sur $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{\int \frac{1}{x^2+1}dx}$.

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \int \arctan'(x)dx = \boxed{\arctan(x) + C_1,}$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int \frac{x}{x^2+1}dx}$. On fait le changement de variable $u = x^2+1$. Alors $du = 2xdx$, et donc $xdx = du/2$. Donc

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C_2 = \boxed{\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_2,}$$

où $C_2 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int \frac{x^2}{x^2+1}dx}$.On fait la division euclidienne de x^2 par x^2+1, c'est à dire : $x^2 = (x^2+1) - 1$, puis on utilise la primitive de $1/(x^2+1)$ calculée plus haut. Et donc

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \boxed{x - \arctan x + C_3,}$$

où $C_3 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int \frac{x^3}{x^2+1}dx}$. On fait la division euclidienne de x^3 par x^2+1, c'est à dire : $x^3 = x(x^2+1) - x$, puis on utilise la primitive de $x/(x^2+1)$ calculée plus haut. Et donc

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_4,}$$

où $C_4 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

e) Toutes les fonctions dont on cherche les primitives dans cette question sont définies et continues sur $\mathbb{R}$. On va donc en calculer des primitives sur $\mathbb{R}$.

On va toutes les calculer par intégrations par parties, en posant

$$u(x) = \arctan x, \qquad \text{et donc} \qquad u'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$\boldsymbol{\int \arctan(x)dx}$. Pour cette première primitive, on pose aussi :

$$v_1'(x) = 1, \qquad \text{et donc} \qquad v_1(x) = x.$$

On a donc
$$\int \arctan(x)dx = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \boxed{x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1,}$$
où $C_1 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque, et où on a utilisé le résultat du calcul de la primitive de $x/(x^2+1)$ calculée à la question d).

$\boldsymbol{\int x\mathbf{arctan}(x)dx}$. On fait le même choix pour u, et on prend
$$v_2'(x) = x, \qquad \text{et donc} \qquad v_2(x) = \frac{x^2}{2}.$$
Alors
$$\int x\text{arctan}(x)dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right) + C_2 = \boxed{\frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + C_2,}$$
où $C_2 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque, et où on a utilisé le résultat du calcul de la primitive de $x^2/(x^2+1)$ calculée à la question d).

$\boldsymbol{\int x^2\mathbf{arctan}(x)dx}$. On fait le même choix pour u, et on prend
$$v_3'(x) = x^2, \qquad \text{et donc} \qquad v_3(x) = \frac{x^3}{3}.$$
Alors
$$\begin{aligned}\int x^2\text{arctan}(x)dx &= \frac{x^3}{3}\arctan x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right) + C_3 \\ &= \boxed{\frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(x^2+1) + C_3,}\end{aligned}$$
où $C_3 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque et où on a utilisé le résultat du calcul de la primitive de $x^3/(x^2+1)$ calculée à la question d).

f) Les fonctions $\sin^2$ et $\cos^2$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, on va donc en calculer des primitives sur $\mathbb{R}$. Pour cela on va utiliser les formules suivantes :
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right) \qquad \text{et} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right).$$
Si on ne les connait pas, ces deux formules peuvent se retrouver facilement soit en utilisant les formules d'Euler (pour ceux qui connaissent les complexes), soit en faisant respectivement la différence membre à membre et la somme membre à membre des deux autres formules suivantes :
$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x \qquad \text{et} \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$
Des deux premières formules, on déduit :
$$\int \boldsymbol{(\sin x)^2 dx} = \frac{1}{2}\int \left(1 - \cos(2x)\right)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C_1 = \boxed{\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C_1}$$
et
$$\int \boldsymbol{(\cos x)^2 dx} = \frac{1}{2}\int \left(1 + \cos(2x)\right)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C_2 = \boxed{\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C_2,}$$
où $C_1 \in \mathbb{R}$ et $C_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes quelconques. Eventuellement, on aura pu utiliser le changement de variable $u = 2x$ pour le calcul de $\int \cos(2x)dx$.

g) La fonction $\sin^3$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc on va en calculer des primitives sur $\mathbb{R}$. On va faire le changement de variable
$$u = \cos x, \qquad \text{et donc} \qquad du = -\sin x dx.$$
Alors, compte tenu de la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,
$$\int \boldsymbol{(\sin x)^3 dx} = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)\sin x dx = \int (1-u^2)\cdot(-1)du = -\left(u - \frac{u^3}{3}\right) + C = \boxed{\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C,}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

h) La fonction tangente est définie et continue sur tous les intervalles de la forme $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, où $k \in \mathbb{Z}$ est un entier. C'est donc sur un de ces intervalles qu'on va calculer les primitives suivantes. Comme indiqué, on va utiliser le fait que pour tout x dans le domaine de définition de la fonction tangente, $\tan'(x) = \tan^2 x + 1$.

$\boldsymbol{\int (\tan x)^2 dx}$. On a en particulier

$$\int \tan^2 x dx = \int \big((\tan^2 x + 1) - 1\big)\, dx = \int (\tan'(x) - 1) dx = \boxed{\tan x - x + C_1,}$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int (\tan x)^3 dx}$. On a aussi

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x dx &= \int \tan^2 x \cdot \tan x dx = \int \big((\tan^2 x + 1) - 1\big) \cdot \tan x dx \\ &= \int (\tan'(x)\tan x - \tan x)\, dx = \int \tan'(x) \tan x dx - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.\end{aligned}$$

On fait deux changements de variable différents dans chacune des primitives du membre de droite : dans la première, on pose $u = \tan x$, et donc $du = \tan'(x)dx$; dans la seconde primitive, on pose $v = \cos x$, et donc $dv = -\sin x dx$. On obtient donc

$$\int \tan^3 x dx = \int u du + \int \frac{dv}{v} = \frac{u^2}{2} + \ln|v| + C_2 = \boxed{\frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C_2,}$$

où $C_2 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

i) Les quatre fonctions dont on cherche ici les primitives sont définies et continues sur $\mathbb{R}$. On va donc en calculer les primitives sur $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{\int x \sin x dx}$. On calcule les primitives de $x \sin x$ en faisant une intégration par parties, en posant

$$u_1(x) = x, \quad v_1'(x) = \sin x, \qquad \text{et donc} \qquad u_1'(x) = 1, \quad v_1(x) = -\cos x.$$

Alors

$$\int x \sin x dx = x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx = \boxed{-x \cos x + \sin x + C_1,}$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int x^2 \sin x dx}$. On calcule les primitives de $x^2 \sin x$ en faisant une intégration par parties, en posant

$$u_2(x) = x^2, \quad v_1'(x) = \sin x, \qquad \text{et donc} \qquad u_2'(x) = 2x, \quad v_1(x) = -\cos x.$$

Alors

$$\int x^2 \sin x dx = x^2 \cdot (-\cos x) - \int 2x \cdot (-\cos x) dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx.$$

Pour calculer la nouvelle primitive apparaissant au membre de droite, on fait une nouvelle intégration par parties, en posant

$$u_1(x) = x, \quad v_2'(x) = \cos x, \qquad \text{et donc} \qquad u_1'(x) = 1, \quad v_2(x) = \sin x.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx\right) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C_2 \\ &= \boxed{(2 - x^2)\cos x + 2x \sin x + C_2,}\end{aligned}$$

où $C_2 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int x^3 \sin(4x) dx}$. On calcule les primitives de $x^3 \sin(4x)$ en faisant une intégration par parties, en posant

$$u_3(x) = x^3, \quad v_3'(x) = \sin(4x), \qquad \text{et donc} \qquad u_3'(x) = 3x^2, \quad v_3(x) = -\frac{1}{4}\cos(4x).$$

Alors

$$\int x^3 \sin(4x) dx = x^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\cos(4x)\right) - \int 3x^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\cos(4x)\right) dx = -\frac{x^3}{4}\cos(4x) + \frac{3}{4}\int x^2 \cos(4x) dx.$$

Pour calculer la nouvelle primitive apparaissant au membre de droite, on fait une nouvelle intégration par parties, en posant

$$u_2(x) = x^2, \quad v_4'(x) = \cos(4x), \qquad \text{et donc} \qquad u_2'(x) = 2x, \quad v_4(x) = \frac{\sin(4x)}{4}.$$

D'où

$$\int x^3 \sin(4x)dx = -\frac{x^3}{4}\cos(4x) + \frac{3}{4}\left(x^2\frac{\sin(4x)}{4} - \int 2x\frac{\sin(4x)}{4}dx\right) = -\frac{x^3}{4}\cos(4x) + \frac{3x^2}{16}\sin(4x) - \frac{3}{8}\int x\sin(4x)dx$$

Pour calculer la nouvelle primitive apparaissant au membre de droite, on fait encore une intégration par parties, en posant

$$u_1(x) = x, \quad v_3'(x) = \sin(4x), \qquad \text{et donc} \qquad u_1'(x) = 1, \quad v_3(x) = -\frac{\cos(4x)}{4}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int x^3 \sin(4x)dx &= -\frac{x^3}{4}\cos(4x) + \frac{3x^2}{16}\sin(4x) - \frac{3}{8}\left(x\cdot\left(-\frac{\cos(4x)}{4}\right) - \int\left(-\frac{\cos(4x)}{4}\right)dx\right)\\ &= -\frac{x^3}{4}\cos(4x) + \frac{3x^2}{16}\sin(4x) + \frac{3x}{32}\cos(4x) - \frac{3}{32}\int\cos(4x)dx\\ &= \boxed{-\frac{x^3}{4}\cos(4x) + \frac{3x^2}{16}\sin(4x) + \frac{3x}{32}\cos(4x) - \frac{3}{128}\sin(4x) + C_3,}\end{aligned}$$

où $C_3 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int x^2(\sin x)^3 dx}$. Pour calculer les primitives de $x^2(\sin x)^3$, on va commencer par "linéariser" le facteur $(\sin x)^3$, c'est à dire l'exprimer sous la forme d'une somme de termes du type $\sin(\alpha x)$ ou $\cos(\alpha x)$, pour certains nombres α. On présente deux méthodes pour faire cela.
1ère méthode. Si on matrise les nombres complexes, on peut utiliser l'une des formules d'Euler, qui s'écrit $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Alors

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} = -\frac{1}{4}\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} + \frac{3}{4}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = -\frac{\sin(3x)}{4} + \frac{3\sin x}{4}.$$

2ème méthode. Sinon, on commence par réutiliser une expression de $\sin^2 x$ utilisée à la question f) :

$$\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\sin x = \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\sin x.$$

On va donner une autre expression de $\cos(2x)\sin x$ en faisant la différence membre à membre les deux formules suivantes :

$$\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x)$$

et

$$\sin(x) = \sin(2x-x) = \sin(2x)\cos(x) - \cos(2x)\sin(x),$$

qui donne

$$\frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x)) = \cos(2x)\sin(x),$$

et donc

$$\sin^3 x = \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin(3x)-\sin(x)) = \frac{3\sin x}{4} - \frac{\sin(3x)}{4}.$$

Quelle que soit la méthode utilisée, on peut donc écrire

$$\int x^2\sin(x)^3 dx = \int x^2\left(\frac{3\sin x}{4} - \frac{\sin(3x)}{4}\right)dx = \frac{3}{4}\int x^2\sin x dx - \frac{1}{4}\int x^2\sin(3x)dx.$$

On a déjà calculé $\int x^2\sin x dx$ plus haut (2ème primitive de la question i)). Pour calculer $\int x^2\sin(3x)dx$, on peut faire une intégration partie, ou bien, comme on va le faire ici, en faisant un changement de variable pour se ramener au calcul déjà fait de $\int x^2 \sin x dx$, en posant $u = 3x$, et donc $du = 3dx$. Alors

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(3x)dx &= \int\left(\frac{u}{3}\right)^2\sin u\frac{du}{3} = \frac{1}{27}\int u^2\sin u du = \frac{1}{27}\left((2-u^2)\cos u + 2u\sin u\right)\\ &= \frac{1}{27}\left((2-9x^2)\cos(3x) + 6x\sin(3x)\right).\end{aligned}$$

Au total, on a donc

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(x)^3dx &= \frac{3}{4}\left((2-x^2)\cos x+2x\sin x\right)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{27}\left((2-9x^2)\cos(3x)+6x\sin(3x)\right)+C_4\\ &= \boxed{\frac{3}{4}(2-x^2)\cos x+\frac{3x}{2}\sin x+\frac{9x^2-2}{108}\cos(3x)-\frac{x}{18}\sin(3x)+C_4,}\end{aligned}$$

où $C_4\in\mathbb{R}$ est une constante quelconque.

j) Les fonctions dont on cherche ici les primitives sont toutes définies et continues sur $\mathbb{R}$. On va donc en calculer les primitives sur $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{\int e^x\cos(x)dx}$. On commence par calculer $\int e^x\cos(x)dx$. Pour cela, on va faire deux intégrations par parties successives, la première en choisissant

$$u_1(x)=\cos x,\quad v'(x)=e^x,\qquad \text{et donc}\qquad u_1'(x)=-\sin x,\quad v(x)=e^x,$$

qui donne

$$\int e^x\cos(x)dx=e^x\cos x-\int e^x\cdot(-\sin x)dx=e^x\cos x+\int e^x\sin xdx,$$

la seconde en choisissant

$$u_2(x)=\sin x,\quad v'(x)=e^x,\qquad \text{et donc}\qquad u_1'(x)=\cos x,\quad v(x)=e^x,$$

qui donne

$$\int e^x\cos(x)dx=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos xdx.$$

Dans le membre de gauche et dans le membre de droite, on reconnait des primitives de la même fonction. Ces deux primitives, à une constante indéterminée près, sont donc les mêmes. Donc

$$2\int e^x\cos(x)dx=e^x\cos x+e^x\sin x+2C_1,$$

et

$$\boxed{\int e^x\cos xdx=\frac{1}{2}\left(e^x\cos x+e^x\sin x\right)+C_1,}$$

où $C_1\in\mathbb{R}$ est une constante quelconque.
A noter que, dans la première intégration par parties, on aurait aussi pu choisir $u(x)=e^x$ et $v_1'(x)=\cos x$. Mais alors, pour mener le calcul à bien, il aurait fallu choisir $u(x)=e^x$ et $v_2'(x)=\sin x$ pour la deuxième intégration par parties. C'est à dire, il faut soit "intégrer deux fois e^x, soit le "dériver deux fois". Si on l'intègre une fois et qu'on le dérive dans la seconde intégration par parties, on tourne en rond dans le calcul, et on n'aboutit pas au résultat.

$\boldsymbol{\int e^{nx}\sin(mx)dx}$. On procède de la même manière pour calculer $\int e^{nx}\sin(mx)dx$, où $n,m\in\mathbb{R}^*$. A savoir, on fait une première intégration par parties en posant

$$u_1(x)=\sin(mx),\quad v'(x)=e^{nx},\qquad \text{et donc}\qquad u_1'(x)=m\cos(mx),\quad v(x)=\frac{1}{n}e^{nx}.$$

Cela donne

$$\int e^{nx}\sin(mx)dx=\frac{1}{n}e^{nx}\sin(mx)-\frac{m}{n}\int e^{nx}\cos(mx)dx.$$

On fait ensuite une seconde intégration par parties en posant

$$u_2(x)=\cos(mx),\quad v'(x)=e^{nx},\qquad \text{et donc}\qquad u_2'(x)=-m\sin(mx),\quad v(x)=\frac{1}{n}e^{nx}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int e^{nx}\sin(mx)dx &= \frac{1}{n}e^{nx}\sin(mx)-\frac{m}{n}\left(\frac{1}{n}e^{nx}\cos(mx)-\int -\frac{m}{n}e^{nx}\sin(mx)dx\right)\\ &= \frac{1}{n}e^{nx}\sin(mx)-\frac{m}{n^2}e^{nx}\cos(mx)-\frac{m^2}{n^2}\int e^{nx}\sin(mx)dx.\end{aligned}$$

Comme dans le calcul de la primitive précédente, on retrouve la primitive qu'on cherche à calculer dans le membre de droite. On la passe dans le membre de gauche et on déduit :

$$\begin{aligned}\int e^{nx}\sin(mx)dx &= \frac{1}{1+\frac{m^2}{n^2}}\left(\frac{1}{n}e^{nx}\sin(mx)-\frac{m}{n^2}e^{nx}\cos(mx)\right)+C_2\\ &= \boxed{\frac{n}{n^2+m^2}e^{nx}\sin(mx)-\frac{m}{n^2+m^2}e^{nx}\cos(mx)+C_2,}\end{aligned}$$

où $C_2 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

En appliquant cette dernière formule avec $n = m = 1$ d'une part, et avec $n = 3$ et $m = 2$ d'autre part, on btient les deux autres primitives demandées dans la question :

$$\boxed{\int \boldsymbol{e^x \sin(x) dx} = \frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x + C_3}$$

et

$$\boxed{\int \boldsymbol{e^{3x} \sin(2x) dx} = \frac{3}{13}e^{3x} \sin(2x) - \frac{2}{13}e^{3x} \cos(2x) + C_4,}$$

où $C_3 \in \mathbb{R}$ et $C_4 \in \mathbb{R}$ sont des constantes quelconques.

k) $\boldsymbol{\int \sqrt{1-x^2}dx}$. La fonction qui a x associe $\sqrt{1-x^2}$ est définie et continue sur $[-1,1]$. C'est sur cet intervalle qu'on va en calculer les primitives. On fait le changement de variable $y = \arcsin x$ (noter que ça a bien un sens, puisque $x \in [-1,1]$). Alors

$$x = \sin y, \qquad dx = \cos y dy, \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{\cos^2 y} = \cos y$$

(dans ce dernier calcul, on a utilisé le fait que $y \in [-\pi/2\pi/2]$, et donc que $\cos y \geqslant 0$). Donc, en utilisant le résultat du calcul de $\int \cos^x dx$ effectué à la question f) et la formule $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2 y dy = \frac{y}{2} + \frac{\sin(2y)}{4} + C &= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + C \\ = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)}{4} + C &= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C,\end{aligned}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

l) Les deux fonctions dont on cherche ici les primitives sont définies et continues sur $\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$. On va donc en calculer des primitives sur l'un des trois intervalles $]-\infty,-2[$, $]-2,1[$ ou $]1,+\infty[$.

Si $a, b \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)(x+2)}.$$

En choisissant a et b tels que $a + b = 0$ et $2a - b = 1$, c'est à dire $a = 1/3$ et $b = -1/3$, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$,

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}.$$

De la même manière, en choisissant a et b tels que $a + b = 1$ et $2a - b = 1$, c'est à dire $a = 2/3$ et $b = 1/3$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$,

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+2)}.$$

On peut donc en déduire

$$\boxed{\int \boldsymbol{\frac{1}{(x-1)(x+2)}dx} = \int \left(\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}\right) dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C_1,}$$

$$\boxed{\int \boldsymbol{\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}dx} = \int \left(\frac{2}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+2)}\right) dx = \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + C_2,}$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ et $C_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes quelconques.

m) $\boldsymbol{\int \frac{x^3}{x^2+3x+2}dx}$. On commence par remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$ (au besoin, pour cela, on peut calculer le discriminant...). La fonction qui à x associe $\frac{x^3}{x^2+3x+2}$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$, et on va en calculer les primitives sur l'un des trois intervalles $]-\infty,-2[$, $]-2,-1[$ ou $]-1,+\infty[$. Pour cela, on fait d'abord la division euclidienne de x^3 par $x^2 + 3x + 2$:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & x^3 & & & & & & x^2+3x+2 \\ \cline{8-8}
\ominus & x^3 & + & 3x^2 & + & 2x & & x-3 \\ \cline{2-7}
 & & & -3x^2 & - & 2x & & \\
 & & \ominus & -3x^2 & - & 9x & - \; 6 & \\ \cline{4-7}
 & & & & & 7x & + \; 6 &
\end{array}$$

d'où on conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^3 = (x-3)(x^2+3x+2) + (7x+6)$. Et donc

$$\int \frac{x^3}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{(x-3)(x^2+3x+2)+(7x+6)}{x^2+3x+2}dx = \int \left(x - 3 + \frac{7x+6}{x^2+3x+2}\right)dx$$

Si $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$,

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(a+b)x+(2a+b)}{x^2+3x+2}.$$

Si on choisit a et b tels que $a+b=7$ et $2a+b=6$, c'est à dire $a=-1$ et $b=8$, on obtient

$$-\frac{1}{x+1} + \frac{8}{x+2} = \frac{7x+6}{x^2+3x+2}.$$

Donc

$$\int \frac{x^3}{x^2+3x+2}dx = \int \left(x - 3 - \frac{1}{x+1} + \frac{8}{x+2}\right)dx = \boxed{\frac{x^2}{2} - 3x - \ln|x+1| + 8\ln|x+2| + C_1,}$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}dx}$. Le discriminant du polynme x^2+2x+2 est $2^2-4\cdot 1\cdot 2 = -8 < 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+2 > 0$, et donc la fonction dont on cherche une primitive est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. On va donc en calculer les primitives sur $\mathbb{R}$.
On commence par faire la division euclidienne de x^3 par x^2+2x+2 :

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & x^3 & & & & & & & x^2+2x+2 \\
\ominus & x^3 & + & 2x^2 & + & 2x & & & x-2 \\ \cline{2-8}
 & & & -2x^2 & - & 2x & & & \\
 & & \ominus & -2x^2 & - & 4x & - & 4 & \\ \cline{4-8}
 & & & & & 2x & + & 4 &
\end{array}$$

d'où on conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^3 = (x-2)(x^2+2x+2) + (2x+4)$. Et donc

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}dx &= \int \frac{(x-2)(x^2+2x+2)+(2x+4)}{x^2+2x+2}dx = \int \left(x - 2 + \frac{2x+4}{x^2+2x+2}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{2}{x^2+2x+2}dx\end{aligned}$$

Dans la première primitive du membre de droite, on fait le changement de variable $u = x^2+2x+2$, qui donne $du = (2x+2)dx$, tandis que dans la seconde primitive du membre de droite, on pose $v = x+1$, et donc $dv = dx$. On a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}dx &= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{du}{u} + \int \frac{2}{v^2+1}dv = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln u + 2\arctan v + C_2 \\ &= \boxed{\frac{x^2}{2} - 2x + \ln\left(x^2+2x+2\right) + 2\arctan(x+1) + C_2,}\end{aligned}$$

où $C_2 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

n) $\boldsymbol{\int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx}$. Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\sin x + \cos x = 0$ si et seulement si $x = -\pi/4 + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Sur $\mathbb{R}\backslash\{-\pi/4+k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. On va donc calculer ses primitives sur un intervalle du type $]-\pi/4+k\pi, 3\pi/4+k\pi[$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Pour calculer cette primitive, on fait le changement de variable

$$u = \sin x + \cos x. \qquad \text{Alors} \qquad du = (\cos x - \sin x)dx,$$

et donc

$$\int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx = \int -\frac{du}{u} = -\ln|u| + C_1 = \boxed{-\ln|\sin x + \cos x| + C_1,}$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int \frac{\sin(x)}{(\sin x)^2 - 2\cos(x) - 2}dx}$. Si $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(x)^2 - 2\cos(x) - 2 = 1 - \cos^2 x - 2\cos x - 2 = -(1 + 2\cos x + \cos^2 x) = -(1+\cos x)^2.$$

En particulier, $(\sin x)^2 - 2\cos(x) - 2 = 0$ si et seulement si $\cos x = -1$, c'est à dire si et seulement si $x = \pi + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. La fonction qui à x associe $\frac{\sin x}{(\sin x)^2 - 2\cos(x) - 2}$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

On peut donc calculer les primitives demandées sur n'importe quel intervalle du type $]-\pi+k\pi,\pi+k\pi[$, où $k\in\mathbb{Z}$. On calcule ces primitives en faisant le changement de variable $u=\cos x$. Alors $du=-\sin x dx$, et donc

$$\int\frac{\sin(x)}{(\sin x)^2-2\cos(x)-2}dx=\int\frac{-\sin x}{(1+\cos x)^2}dx=\int\frac{du}{(1+u)^2}=-\frac{1}{1+u}+C_2=\boxed{-\frac{1}{1+\cos x}+C_2,}$$

où $C_2\in\mathbb{R}$ est une constante quelconque.

o) $\boldsymbol{\int e^{e^x+x}dx}$. La fonction dont on cherche les primitives étant définie et continue sur $\mathbb{R}$, on en cherche les primitives sur $\mathbb{R}$. On fait le changement de variable $u=e^x$. Alors $du=e^xdx$, et

$$\int e^{e^x+x}dx=\int e^{e^x}e^xdx=\int e^udu=e^u+C_3=\boxed{e^{e^x}+C_3,}$$

où $C_3\in\mathbb{R}$ est une constante quelconque.

p) Dans cette question, toutes les fonctions dont on cherche les primitives sont continues sur $\mathbb{R}$. On va donc en calculer les primitives sur $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{\int\sin(x)^5dx}$. On pose $u=\cos x$. Alors $du=-\sin x dx$ et

$$\begin{aligned}\int\sin(x)^5dx&=\int(\sin^2x)^2\sin x dx=\int(1-\cos^2x)^2\sin x dx=\int(1-u^2)^2\cdot(-1)du\\&=-\int\left(1-2u^2+u^4\right)du=-u+\frac{2}{3}u^3-\frac{u^5}{5}+C_1=\boxed{-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{\cos^5x}{5}+C_1,}\end{aligned}$$

où $C_1\in\mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int\cos(x)^5dx}$. On pose $u=\sin x$. Alors $du=\cos x dx$ et

$$\begin{aligned}\int\cos(x)^5dx&=\int(\cos^2x)^2\cos x dx=\int(1-\sin^2x)^2\cos x dx=\int(1-u^2)^2du\\&=u-\frac{2}{3}u^3+\frac{u^5}{5}+C_2=\boxed{\sin x-\frac{2}{3}\sin^3x+\frac{\sin^5x}{5}+C_2,}\end{aligned}$$

où on s'est aidé du calcul précédent et où $C_2\in\mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int\sin(x)\cos(x)^{200}dx}$. On pose $u=\cos x$. Alors $du=-\sin x dx$ et

$$\int\sin(x)\cos(x)^{200}dx=\int u^{200}\cdot(-1)du=-\frac{u^{201}}{201}+C_3=\boxed{-\frac{(\cos x)^{201}}{201}+C_3,}$$

où $C_3\in\mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int\sin(x)^3\cos(x)^{200}dx}$. On pose $u=\cos x$. Alors $du=-\sin x dx$ et

$$\begin{aligned}\int(\sin x)^3(\cos x)^{200}dx&=\int\sin x(1-(\cos x)^2)(\cos x)^{200}dx=\int(1-u^2)u^{200}\cdot(-1)du=\int\left(u^{202}-u^{200}\right)du\\&=\frac{u^{203}}{203}-\frac{u^{201}}{201}+C_4=\boxed{\frac{(\cos x)^{203}}{203}-\frac{(\cos x)^{201}}{201}+C_4,}\end{aligned}$$

où $C_4\in\mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int\sin(x)^{13}dx}$. On pose $u=\cos x$. Alors $du=-\sin x dx$ et

$$\begin{aligned}\int\sin(x)^{13}dx&=\int\left(\sin^2x\right)^6\sin x dx=\int\left(1-\cos^2x\right)^6\sin x dx=\int(1-u^2)^6\cdot(-1)du\\&=-\int\left(1-6u^2+15u^4-20u^6+15u^8-6u^{10}+u^{12}\right)du\\&=-u+2u^3-3u^5+\frac{20}{7}u^7-\frac{5}{3}u^9+\frac{6}{11}u^{11}-\frac{1}{13}u^{13}+C_5\\&=\boxed{-\cos x+2(\cos x)^3-3(\cos x)^5+\frac{20}{7}(\cos x)^7-\frac{5}{3}(\cos x)^9+\frac{6}{11}(\cos x)^{11}-\frac{1}{13}(\cos x)^{13}+C_5,}\end{aligned}$$

où $C_5 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

q) Dans cette question, toutes les fonctions dont on cherche les primitives sont définies et continues sur le domaine de définition de la fonction tangente, c'est à dire l'ensemble $\underset{k\in\mathbb{Z}}{\cup}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$. On va donc calculer chacune des primitives sur l'un des intervalles $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

$\boldsymbol{\int \tan x dx}$. On pose $u = \cos x$. Alors $du = -\sin x dx$ et

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos x}dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C_1 = \boxed{-\ln|\cos x| + C_1,}$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int (\tan x)^4 dx}$. Pour le calcul de cett primitive et des suivantes, on va utiliser de manière répétée que la dérivée de la fonction tangente est donnée par$\tan'(x) = (\tan x)^2 + 1$.

$$\begin{aligned}\int (\tan x)^4 dx &= \int \tan(x)^2 \cdot \tan(x)^2 dx = \int (1+\tan(x)^2-1)\cdot\tan(x)^2 dx = \int \left(\tan'(x)(\tan x)^2 - (\tan x)^2\right) dx \\ &= \int \left(\tan'(x)(\tan x)^2 - \tan'(x) + 1\right) dx = \boxed{\frac{(\tan x)^3}{3} - \tan x + x + C_2,}\end{aligned}$$

où $C_2 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int (\tan x)^5 dx}$.

$$\begin{aligned}\int (\tan x)^5 dx &= \int \tan(x)^2 \cdot \tan(x)^3 dx = \int (1+\tan(x)^2-1)\cdot\tan(x)^3 dx = \int \left(\tan'(x)(\tan x)^3 - (\tan x)^3\right) dx \\ &= \int \tan'(x)(\tan x)^3 dx - \int (\tan^2(x)+1-1)\tan x dx \\ &= \int \tan'(x)(\tan x)^3 dx - \int \tan'(x)\tan x dx + \int \tan x dx = \boxed{\frac{(\tan x)^4}{4} - \frac{(\tan x)^2}{2} - \ln|\cos x| + C_3,}\end{aligned}$$

où on a utilisé le résultat du calcul fait plus haut des primitives de la fonction tangente, et où $C_3 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

$\boldsymbol{\int (\tan x)^6 dx}$.

$$\begin{aligned}\int (\tan x)^6 dx &= \int \tan(x)^2 \cdot \tan(x)^4 dx = \int (1+\tan(x)^2-1)\cdot\tan(x)^4 dx = \int \left(\tan'(x)(\tan x)^4 - (\tan x)^4\right) dx \\ &= \int \tan'(x)(\tan x)^4 dx - \int (\tan x)^4 dx \\ &= \boxed{\frac{(\tan x)^5}{5} - \frac{(\tan x)^3}{3} + \tan x - x + C_4,}\end{aligned}$$

où on a utilisé le résultat du calcul fait plus haut des primitives de $\tan^4$, et où $C_4 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.