Feuille TD 5: Intégration

Exercice 1. Calculer les primitives des fonctions suivantes:

a) $a(x) = (x^4+2x+2)(x^5+5x^2+10x+1)^{1/4}$ **b)** $b(x) = \frac{x+3}{x+2}$ **c)** $c(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$
d) $d(x) = \frac{x^3+3x^2+5x+1}{x+2}$ **f)** $f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$ **g)** $g(x) = \frac{1}{e^x-1}$
h) $h(x) = xe^{x^2}$ **i)** $i(x) = \frac{\ln x}{x}$ **j)** $j(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ **k)** $k(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$
l) $l(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ **m)** $m(x) = \frac{1}{x^2+4}$ **n)** $n(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
o) $o(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ **p)** $p(x) = \frac{1}{\cos x}$ **q)** $q(x) = \frac{1}{2+\sqrt{x}}$

Exercice 2. Calculer les primitives des fonctions suivantes:

a) $a(x) = x\ln x$ **b)** $b(x) = x(\ln x)^2$ **c)** $c(x) = x(2x+3)^{1/3}$
d) $d(x) = x^3e^{3x^2+1}$ **f)** $f(x) = x^3\sqrt{x^2+1}$ **g)** $g(x) = xe^{3x}$
h) $h(x) = (\ln x)^2$ **i)** $i(x) = \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 3. Une voiture se déplace à une vitesse $v(t) = 80 - 30e^{-t}$ km.h^{-1} (t est exprimé en heures). Quelle est la distance parcourue entre $t=0$ et $t=2$?

Exercice 4.
a) Trouver des réels a et b tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$, puis calculer

$$\int_2^3 \frac{dx}{x(x+1)}$$

b) En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x}$, calculer $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x})}$.

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes:

a) $A = \int_1^2 \frac{dx}{(2x+3)^2}$ **b)** $B = \int_{-1/2}^{-1/2+\sqrt{5}/2} \frac{dx}{2x^2+2x+3}$ **c)** $C = \int_{-1}^2 \frac{2x+1}{2x^2+2x+3}dx$
d) $D = \int_0^1 xe^{x^2}dx$ **e)** $E = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx$ **f)** $F = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ **g)** $G = \int_1^2 x\ln x dx$
h) $H = \int_0^{\ln(3/2)} \frac{e^x}{1+e^x}dx$ **i)** $I = \int_0^1 x^2\arctan(x)dx$ **j)** $J = \int_0^{\pi/4} x^2\cos(x)dx$
k) $K = \int_0^{\pi/3} \sin^3 x\cos^2 x dx$

Exercice 6. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue sur $[a,b]$.
a) Montrer que le volume de $\mathbb{R}^3$ (muni d'un repère orthonormé) délimité par:

- le plan d'équation $x = a$,
- le plan d'équation $x = b$,
- la surface de révolution obtenue par rotation autour de l'axe Ox de la courbe d'équations $y = f(x)$, $z = 0$,

est $V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$.
b) Calculer V dans le cas $f(x) = 2 - x^2$, $a = 0$, $b = \sqrt{2}$.
c) Retrouver la formule qui donne le volume d'un cône de hauteur h, de base de rayon R.

Exercice 7. Calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$.

Exercice 8. Calculer les primitives suivantes, en précisant l'intervalle de travail:
a) $\int x^\alpha dx$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) $\int \ln(x)dx$, $\int \ln(x)^2dx$, $\int \ln(x)^3dx$, $\int \ln(x)^4dx$, $\int \ln(x)^5dx$, $\int x\ln(x)^2dx$, $\int x^2\ln(x)^3dx$ (on pourra utiliser l'intégration par parties)
c) $\int \frac{1}{x+2}dx$, $\int \frac{x+1}{x+3}dx$, $\int \frac{x-1}{x+2}dx$, $\int \frac{x+a}{x+b}dx$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
d) $\int \frac{1}{x^2+1}dx$, $\int \frac{x}{x^2+1}dx$, $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$, $\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$.
e) $\int \mathrm{Arctan}(x)dx$, $\int x\mathrm{Arctan}(x)dx$, $\int x^2\mathrm{Arctan}(x)dx$.
f) $\int \sin(x)^2dx$, $\int \cos(x)^2dx$.
g) $\int \sin(x)^3dx$ (on pourra utiliser $\sin(x)^2 = 1 - \cos(x)^2$).
h) $\int \tan(x)^2dx$, $\int \tan(x)^3dx$ (on pourra utiliser $\tan' = \tan^2 + 1$)
i) $\int x\sin(x)dx$, $\int x^2\sin(x)dx$, $\int x^3\sin(4x)dx$, $\int x^2\sin(x)^3dx$ (on pourra utiliser l'intégration par parties)
j) $\int e^x\sin(x)dx$, $\int e^x\cos(x)dx$, $\int e^{3x}\sin(2x)dx$, $\int e^{nx}\sin(mx)dx$, où m et n sont des entiers (on pourra utiliser deux fois l'intégration par parties)
k) $\int \sqrt{1-x^2}dx$ (on pourra faire le changement de variable $x = \sin(y)$)
l) $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx$, $\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)}dx$ (on pourra écrire $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$, puis $\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$ sous la forme $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$)
m) $\int \frac{x^3}{x^2+3x+2}dx$, $\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}dx$.
n) $\int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$, $\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)^2-2\cos(x)-2}dx$.
o) $\int e^{e^x+x}dx$.
p) $\int \sin(x)^5dx$, $\int \cos(x)^5dx$, $\int \sin(x)\cos(x)^{200}dx$, $\int \sin(x)^3\cos(x)^{200}dx$, $\int \sin(x)^{13}dx$.
q) $\int \tan(x)dx$, $\int \tan(x)^4dx$, $\int \tan(x)^5dx$, $\int \tan(x)^6dx$.