Corrigé de la feuille TD 6: Equations Différentielles

Exercice 1.

a) $\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 & \text{(E)} \\ y(0) = 1 & \text{(CI)} \end{cases}$

L'équation différentielle (E) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = y^2.$$

On sépare les variables et on intègre :

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dt.$$

Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que y et t sont liées par la relation

$$-\frac{1}{y} = t + C.$$

D'après (CI), pour $t = 0$, on a $y = 1$. Donc $-\frac{1}{1} = 0 + C$, c'est à dire $C = -1$. Donc $-\frac{1}{y} = t - 1$, et donc $y = \frac{1}{1-t}$. La solution du problème (E)-(CI) est donc la fonction définie pour $t < 1$ par

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{1-t}.}$$

b) $\begin{cases} y'(t) = \frac{1+y(t)^2}{2y(t)} & \text{(E)} \\ y(0) = 5 & \text{(CI)} \end{cases}$

L'équation différentielle (E) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1+y^2}{2y}.$$

On sépare les variables et on intègre :

$$\int \frac{2ydy}{1+y^2} = \int dt.$$

Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que y et t sont liées par la relation

$$\ln(1+y^2) = t + C.$$

D'après (CI), pour $t = 0$, on a $y = 5$. Donc $\ln(1+5^2) = 0+C$, c'est à dire $C = \ln(26)$. Donc $\ln(1+y^2) = t+\ln(26)$, donc $1 + y^2 = \exp(t + \ln(26)) = 26e^t$. Donc $y = +\sqrt{26e^t - 1}$ ou $y = -\sqrt{26e^t - 1}$. Parmi ces deux possibilités, seule la première vérifie la condition initiale $y(0) = 5$. La solution du problème (E)-(CI) est donc la fonction définie pour $t > -\ln(26)$ par

$$\boxed{y(t) = \sqrt{26e^t - 1}.}$$

c) $\begin{cases} y'(t) = \frac{t^2}{\cos(y(t))} & \text{(E)} \\ y(0) = 0 & \text{(CI)} \end{cases}$

L'équation différentielle (E) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{\cos y}.$$

On sépare les variables et on intègre :

$$\int \cos y dy = \int t^2 dt.$$

Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que y et t sont liées par la relation

$$\sin y = \frac{t^3}{3} + C.$$

D'après (CI), pour $t = 0$, on a $y = 0$. Donc $\sin(0) = \frac{0^3}{3} + C$, c'est à dire $C = 0$. Donc $\sin y = \frac{t^3}{3}$, et donc $y = \arcsin(t^3/3)$. La solution du problème (E)-(CI) est donc la fonction définie pour $t \in]-3^{1/3}, 3^{1/3}[$ (car si $t \in \mathbb{R}$, $|t^3/3| < 1$ si et seulement si $|t| < 3^{1/3}$) par

$$\boxed{y(t) = \arcsin\left(\frac{t^3}{3}\right).}$$

d) $\left\{\begin{array}{ll} y'(t) = \frac{e^{2y(t)}}{1+t^2} & \text{(E)} \\ y(0) = -\frac{1}{2}\ln\pi & \text{(CI)} \end{array}\right.$

L'équation différentielle (E) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^{2y}}{1+t^2}.$$

On sépare les variables et on intègre :

$$\int e^{-2y}dy = \int \frac{dt}{1+t^2}.$$

Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que y et t sont liées par la relation

$$-\frac{1}{2}e^{-2y} = \arctan t + C.$$

D'après (CI), pour $t = 0$, on a $y = -\frac{1}{2}\ln\pi$. Donc $-\frac{1}{2}\pi = \arctan 0 + C$, c'est à dire $C = -\frac{\pi}{2}$. Donc $e^{-2y} = \pi - 2\arctan t$, et donc $y = -\frac{1}{2}\ln(\pi - 2\arctan t)$. La solution du problème (E)-(CI) est donc la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{2}\ln(\pi - 2\arctan t).}$$

e) $\left\{\begin{array}{ll} y'(t) - \frac{e^{3t}}{y(t)} = 0 & \text{(E)} \\ y(0) = 1 & \text{(CI)} \end{array}\right.$

L'équation différentielle (E) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^{3t}}{y}.$$

On sépare les variables et on intègre :

$$\int ydy = \int e^{3t}dt.$$

Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que y et t sont liées par la relation

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}e^{3t} + C.$$

D'après (CI), pour $t = 0$, on a $y = 1$. Donc $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + C$, c'est à dire $C = 1/6$. Donc $y^2 = \frac{2}{3}e^{3t} + \frac{1}{3}$, et donc $y = +\sqrt{\frac{2e^{3t}+1}{3}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{2e^{3t}+1}{3}}$. En réutilisant la condition initiale $y(0) = 1$, il résulte que la solution du problème (E)-(CI) est la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\boxed{y(t) = \sqrt{\frac{2e^{3t}+1}{3}}.}$$

f) $\left\{\begin{array}{ll} y'(t) + ty(t)^2 = 0 & \text{(E)} \\ y(0) = 1 & \text{(CI)} \end{array}\right.$

L'équation différentielle (E) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = -ty^2.$$

On sépare les variables et on intègre :

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int tdt.$$

Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que y et t sont liées par la relation

$$-\frac{1}{y} = -\frac{t^2}{2} + C.$$

D'après (CI), pour $t = 0$, on a $y = 1$. Donc $-\frac{1}{1} = -\frac{0^2}{2} + C$, c'est à dire $C = -1$. Donc $-\frac{1}{y} = -\frac{t^2}{2} - 1$, et donc $y = \frac{2}{2+t^2}$. La solution du problème (E)-(CI) est donc la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{2+t^2}.}$$

g) $\left\{\begin{array}{ll} y'(t) = t^3e^{-y(t)} & \text{(E)} \\ y(1) = 0 & \text{(CI)} \end{array}\right.$

L'équation différentielle (E) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = t^3e^{-y}.$$

On sépare les variables et on intègre :

$$\int e^y dy = \int t^3 dt.$$

Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que y et t sont liées par la relation

$$e^y = \frac{t^4}{4} + C.$$

D'après (CI), pour $t = 1$, on a $y = 0$. Donc $1 = e^0 = \frac{1^4}{4} + C$, c'est à dire $C = 3/4$. Donc $e^y = \frac{t^4}{4} + \frac{3}{4}$, et donc $y = \ln\left(\frac{t^4+3}{4}\right)$. La solution du problème (E)-(CI) est donc la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\boxed{y(t) = \ln\left(\frac{t^4+3}{4}\right).}$$

h) $\begin{cases} y'(t) = \frac{t^2}{y(t)} & \text{(E)} \\ y(1) = 1 & \text{(CI)} \end{cases}$

L'équation différentielle (E) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y}.$$

On sépare les variables et on intègre :

$$\int y dy = \int t^2 dt.$$

Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que y et t sont liées par la relation

$$\frac{y^2}{2} = \frac{t^3}{3} + C.$$

D'après (CI), pour $t = 1$, on a $y = 1$. Donc $\frac{1^2}{2} = \frac{1^3}{3} + C$, c'est à dire $C = 1/6$. Donc $\frac{y^2}{2} = \frac{t^3}{3} + \frac{1}{6}$, et donc $y = \pm\sqrt{\frac{2t^3}{3} + \frac{1}{3}}$. En réutilisant la condition initiale $y(1) = 1$, on d'eduit que c'est le signe $+$ qu'il faut garder. La solution du problème (E)-(CI) est donc la fonction définie pour $t > -1/2^{1/3}$ (condition qui assure que $\frac{2t^3+1}{3} > 0$) par

$$\boxed{y(t) = \sqrt{\frac{2t^3+1}{3}}.}$$

i) $\begin{cases} y'(t) = t^2\sqrt{y(t)} & \text{(E)} \\ y(0) = 1 & \text{(CI)} \end{cases}$

L'équation différentielle (E) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = t^2\sqrt{y}.$$

On sépare les variables et on intègre :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int t^2 dt.$$

Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que y et t sont liées par la relation

$$2\sqrt{y} = \frac{t^3}{3} + C.$$

D'après (CI), pour $t = 0$, on a $y = 1$. Donc $2\sqrt{1} = \frac{0^3}{3} + C$, c'est à dire $C = 2$. Donc $2\sqrt{y} = \frac{t^3}{3} + 2$, et donc la solution du problème (E)-(CI) est donc la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\boxed{y(t) = \left(\frac{t^3}{6} + 1\right)^2.}$$

j) $\begin{cases} y'(t) = -2y(t)^2 + y(t) & \text{(E)} \\ y(0) = 1/3 & \text{(CI)} \end{cases}$

L'équation différentielle (E) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = -2y^2 + y.$$

On sépare les variables et on intègre :

$$\int \frac{dy}{2y^2 - y} = -\int dt = -t + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante indéterminée. Pour calculer la primitive apparaissant dans le membre de gauche, on commence par chercher deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{0, -\tfrac{1}{2}\}, \qquad \frac{1}{2y^2-y} = \frac{a}{y} + \frac{b}{2y-1}. \tag{*}$$

Comme

$$\frac{a}{y} + \frac{b}{2y-1} = \frac{(2a+b)y-a}{y(2y-1)},$$

la propriété (*) est vraie si on choisit a et b tels que $2a+b=0$ et $-a=1$, c'est à dire $a=-1$ et $b=2$. Donc

$$\int \frac{dy}{2y^2-y} = \int \left(-\frac{1}{y} + \frac{2}{2y-1}\right) dy = -\ln|y| + \ln|2y-1| = \ln\frac{|2y-1|}{|y|} = \ln\left|2-\frac{1}{y}\right|.$$

Donc y et t sont liées par la relation

$$\ln\left|2-\frac{1}{y}\right| = -t + C.$$

D'après (CI), pour $t=0$, on a $y=1/3$. Donc $\ln\left|2-\frac{1}{1/3}\right| = 0+C$, c'est à dire $C=0$. Donc $\ln\left|2-\frac{1}{y}\right| = -t$, d'où $\left|2-\frac{1}{y}\right| = e^{-t}$, et donc $2-\frac{1}{y} = e^{-t}$ ou $2-\frac{1}{y} = -e^{-t}$. Etant donnée la condition initiale (CI), c'est le signe - qu'il faut garder dans le second membre : $2-\frac{1}{y} = -e^{-t}$, et donc la solution du problème (E)-(CI) est la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2+e^{-t}}.}$$

k) $\begin{cases} y'(t) = 4ty(t)^2 - 2ty(t) & \text{(E)} \\ y(0) = 1/3 & \text{(CI)} \end{cases}$

L'équation différentielle (E) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = 4ty^2 - 2ty, \qquad \text{soit} \qquad \frac{dy}{dt} = 2t(2y^2-y).$$

On sépare les variables et on intègre :

$$\int \frac{dy}{2y^2-y} = \int 2tdt.$$

La primitive du membre de gauche a déjà été calculée à la question j). En réutilisant ce résultat, il existe donc une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que y et t sont liées par la relation

$$\ln\left|2-\frac{1}{y}\right| = t^2 + C.$$

D'après (CI), pour $t=0$, on a $y=1/3$. Donc $\ln\left|2-\frac{1}{1/3}\right| = 0+C$, c'est à dire $C=0$. Donc $\ln\left|2-\frac{1}{y}\right| = t^2$, d'où $\left|2-\frac{1}{y}\right| = e^{t^2}$, et donc $2-\frac{1}{y} = e^{t^2}$ ou $2-\frac{1}{y} = -e^{t^2}$. Etant donnée la condition initiale (CI), c'est le signe - qu'il faut garder dans le second membre : $2-\frac{1}{y} = -e^{t^2}$, et donc la solution du problème (E)-(CI) est la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2+e^{t^2}}.}$$

Exercice 2.

a) Le nombre de moles de A au temps t est $a(t)V$, où V est le volume (constant) de la solution. De même, le nombre de moles de B au temps t est $b(t)V$. Etant donnés les coefficients stœchiométriques dans a réaction A$\rightleftharpoons$B, un B est créé quand un A disparait et vice-versa. Donc la quantité $a(t)V + b(t)V$ reste constante au cours de la réaction. Comme V est constant, $a(t)+b(t)$ reste aussi constant. Et donc, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\boxed{a(t)+b(t) = a(0)+b(0) = 1+0 = 1.}$$

b) Fixons $t \geqslant 0$ et faisons un bilan de la quantité de B pendant un court intervalle de temps $[t, t+\Delta t]$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{Nombre de moles de} \\ \text{B au temps } t+\Delta t\end{pmatrix}}_{=b(t+\Delta t)V} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{Nombre de moles} \\ \text{de B au temps } t\end{pmatrix}}_{=b(t)V} + \underbrace{\begin{pmatrix}\text{Nombre de moles de} \\ \text{A transformées en} \\ \text{B entre } t \text{ et } t+\Delta t\end{pmatrix}}_{\approx \alpha a(t)\Delta t V} - \underbrace{\begin{pmatrix}\text{Nombre de moles de} \\ \text{B transformées en} \\ \text{A entre } t \text{ et } t+\Delta t\end{pmatrix}}_{\approx \beta b(t)\Delta t V}$$

On a donc, en simplifiant par V,

$$b(t+\Delta t) \approx b(t) + \alpha a(t)\Delta t - \beta b(t)\Delta t.$$

En passant le premier terme du membre de droite à gauche et en divisant le tout par Δt, on obtient

$$\frac{b(t+\Delta t)-b(t)}{\Delta t} \approx \alpha a(t) - \beta b(t).$$

Cette égalité approximative est d'autant plus précise que Δt est petit. En passant à la limite $\Delta t \to 0$, puisque le membre de droite ne dépend pas de Δt et que

$$b'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{b(t+\Delta t)-b(t)}{\Delta t},$$

on obtient l'égalité demandée :

$$\boxed{b'(t) = \alpha a(t) - \beta b(t).}$$

c) D'après a), pour tout $t \geqslant 0$, on a $a(t) = 1 - b(t)$. En remplaçant $a(t)$ par $1 - b(t)$ dans l'égalité trouvée en b), on obtient $b'(t) + \beta b(t) = \alpha(1 - b(t))$, et donc

$$\boxed{b'(t) + (\alpha+\beta) b(t) = \alpha.}$$

d) L'équation différentielle de la question c) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = \alpha - (\alpha+\beta)y.$$

Pour résoudre cette équation, on sépare les variables et on intègre :

$$\int \frac{dy}{\alpha - (\alpha+\beta)y} = \int dt.$$

Si y est solution de cette équation, il existe donc une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que y et t sont liées par la relation

$$-\frac{1}{\alpha+\beta} \ln |\alpha - (\alpha+\beta)y| = t + C.$$

C'est en particulier le cas pour la fonction b. Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour $t \geqslant 0$

$$\ln |\alpha - (\alpha+\beta)b(t)| = -(\alpha+\beta)(t+C),$$

d'où

$$\alpha - (\alpha+\beta)b(t) = \pm e^{-(\alpha+\beta)C} e^{-(\alpha+\beta)t}.$$

De plus, b vérifie la condition initiale $b(0) = 0$, qui implique

$$\pm e^{-(\alpha+\beta)C} = \alpha.$$

Donc

$$\boxed{b(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1 - e^{-(\alpha+\beta)t}\right).}$$

D'après a), on a aussi

$$a(t) = 1 - b(t) = 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1 - e^{-(\alpha+\beta)t}\right),$$

soit

$$\boxed{a(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)t}.}$$

e) Puisque $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ (sous-entendu dans l'énoncé), on a $e^{-(\alpha+\beta)t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \qquad \lim_{t\to+\infty} b(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Exercice 3.
a) Si la réaction est d'ordre 0, pour $t \geqslant 0$ et tant qu'il reste du réactif, a est solution de l'équation différentielle

$$a'(t) = -v(t) = -k.$$

Donc il existe une constante $H \in \mathbb{R}$ telle que

$$a(t) = -kt + H.$$

Compte tenu de la condition initiale $a(0) = a_0$, on a $H = a_0$, et donc

$$a(t) = -kt + a_0.$$

Cette expression de $a(t)$ reste valable jusqu'au temps $T = a_0/k$, au bout duquel la totalité du réactif est épuisée, et au delà duquel la concentration en A reste nulle. Donc pour tout $t \geqslant 0$, $a(t)$ est donné par

$$\boxed{a(t) = \begin{cases} -kt + a_0 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{a_0}{k}, \\ 0 & \text{si } t > \frac{a_0}{k}. \end{cases}}$$

Le temps de demi-réaction $\theta_{1/2}$ est obtenu en résolvant l'équation $a(\theta_{1/2}) = \frac{a_0}{2}$, c'est à dire

$$-k\theta_{1/2} + a_0 = \frac{a_0}{2},$$

qui donne

$$\boxed{\theta_{1/2} = \frac{a_0}{2k}.}$$

On remarquera que pour une réaction d'ordre 0, le temps de demi-réaction est une fonction croissante de a_0.

b) Si la réaction est d'ordre 1, pour $t \geqslant 0$ et tant qu'il reste du réactif, a est solution de l'équation différentielle

$$a'(t) = -v(t) = -ka(t),$$

qui se réécrit

$$\frac{da}{dt} = -ka.$$

On résout cette équation en séparant les variables et en intégrant :

$$\ln a = \int \frac{da}{a} = -k \int dt = -kt + H,$$

où $H \in \mathbb{R}$ est une constante, dont l'utilisation de la condition initiale $a(0) = a_0$ donne la valeur : $H = \ln a_0$. Donc, en prenant l'exponentielle, $a(t) = e^{-kt+\ln a_0}$ et, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\boxed{a(t) = a_0 e^{-kt}.}$$

On notera que le réactif n'est jamais totalement épuisé (du moins, d'un point de vue strictement mathématique). Le temps de demi-réaction $\theta_{1/2}$ est obtenu en résolvant l'équation $a(\theta_{1/2}) = \frac{a_0}{2}$, c'est à dire

$$a_0 e^{-k\theta_{1/2}} = \frac{a_0}{2},$$

qui donne $e^{-k\theta_{1/2}} = \frac{1}{2}$, donc

$$\boxed{\theta_{1/2} = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 2}{k}.}$$

On remarquera que pour une réaction d'ordre 1, le temps de demi-réaction ne dépend pas de a_0.

c) Si la réaction est d'ordre $p \geqslant 2$, pour $t \geqslant 0$ et tant qu'il reste du réactif, a est solution de l'équation différentielle

$$a'(t) = -v(t) = -ka(t)^p,$$

qui se réécrit

$$\frac{da}{dt} = -ka^p.$$

On résout cette équation en séparant les variables et en intégrant :

$$\int -\frac{da}{a^p} = k \int dt = kt + H,$$

où $H \in \mathbb{R}$ est une constante. La primitive du membre de gauche peut se calculer de la manière suivante :

$$\int -\frac{da}{a^p} = \int -a^{-p} da = -\frac{1}{1-p} a^{1-p} = \frac{1}{p-1}\frac{1}{a^{p-1}}.$$

Donc a et t sont liées par la relation

$$\frac{1}{p-1}\frac{1}{a^{p-1}} = kt + H. \qquad (*)$$

En utilisant la condition initiale $a(0) = a_0$, on détermine $H = \frac{1}{p-1}\frac{1}{a_0^{p-1}}$. Puis, en multipliant (*) membre à membre par $1/H = (p-1)a_0^{p-1}$, on obtient

$$\left(\frac{a_0}{a}\right)^{p-1} = (p-1)a_0^{p-1}kt + 1,$$

et donc, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\boxed{a(t) = a_0 \left((p-1)a_0^{p-1}kt + 1\right)^{-1/(p-1)}.}$$

On notera que le réactif n'est jamais totalement épuisé. La décroissance de la concentration en A (en $t^{-1/(p-1)}$) est plus lente que dans le cas d'une réaction d'ordre 1, où cette décroissance était exponentielle en temps (et la décroissance est d'autant plus lente que p est grand).
Le temps de demi-réaction $\theta_{1/2}$ est obtenu en résolvant l'équation $a(\theta_{1/2}) = \frac{a_0}{2}$, c'est à dire

$$a_0 \left((p-1)a_0^{p-1}k\theta_{1/2} + 1\right)^{-1/(p-1)} = \frac{a_0}{2},$$

qui donne $(p-1)a_0^{p-1}k\theta_{1/2} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-(p-1)} = 2^{p-1}$, donc

$$\boxed{\theta_{1/2} = \frac{2^{p-1} - 1}{(p-1)a_0^{p-1}k}.}$$

On remarquera que pour une réaction d'ordre $p \geqslant 2$, le temps de demi-réaction est une fonction décroissante de a_0.

Exercice 4.
a) Les nombres de moles de A, B et C au temps t sont respectivement $a(t)V$, $b(t)V$ et $c(t)V$, où V est le volume (constant) de la solution. Etant donnés les coefficients stoechiométriques de la réaction $A + B \longrightarrow C$, quand une quantité de A disparait, une quantité équivalente de C est créée, et une quantité équivalente de B disparait également. Donc les quantités $a(t)V + c(t)V$ et $b(t)V + c(t)V$ sont constantes au cours de la réaction. Etant données les conditions initiales $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$ et $c(0) = 0$ et le fait que V est constant, on a donc, pour tout $t \geqslant 0$,

$$a(t) + c(t) = a_0, \qquad b(t) + c(t) = b_0,$$

et donc

$$\boxed{a(t) = a_0 - c(t), \qquad b(t) = b_0 - c(t).}$$

Donc la fonction c vérifie, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\boxed{c'(t) = ka(t)b(t) = k(a_0 - c(t))(b_0 - c(t)).}$$

b) Si $b_0 = a_0$, l'équation différentielle satisfaite par c se réécrit

$$\frac{dc}{dt} = k(a_0 - c)^2.$$

On résout cette équation par séparation des variables : formellement,

$$\frac{dc}{(a_0 - c)^2} = kdt.$$

En intégrant, on obtient :

$$\frac{1}{a_0 - c} = \int \frac{dc}{(a_0 - c)^2} = \int kdt = kt + H,$$

où $H \in \mathbb{R}$ est une constante. La condition initiale $c(0) = 0$ donne alors la valeur de H : $\frac{1}{a_0 - 0} = k \cdot 0 + H$, donc $H = 0$, et donc

$$a_0 - c = \frac{1}{kt + \frac{1}{a_0}},$$

d'où, pour tout $t \geqslant 0$,

$$c(t) = a_0 - \frac{1}{kt + \frac{1}{a_0}} = a_0 - \frac{a_0}{a_0kt + 1} = a_0\left(1 - \frac{1}{a_0kt+1}\right),$$

et donc

$$\boxed{c(t) = \frac{a_0^2kt}{a_0kt+1}.}$$

On notera que $c(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} a_0$, ce qui n'est pas surprenant, puisqu'au bout d'un temps infini, les deux réactifs A et B, en proportion stœchiométriques au début de la réaction, ont intégralement été transformés en C.

c) Si $a_0 \neq b_0$, l'équation différentielle satisfaite par c s'écrit

$$\frac{dc}{dt} = k(a_0 - c)(b_0 - c).$$

On sépare les variables et on intègre :

$$\int \frac{dc}{(a_0-c)(b_0-c)} = \int kdt = kt + H,$$

où $H \in \mathbb{R}$ est une constante. Pour calculer la primitive du membre de droite, on commence par chercher deux nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $c \neq a_0$ et $c \neq b_0$,

$$\frac{1}{(a_0-c)(b_0-c)} = \frac{\alpha}{a_0-c} + \frac{\beta}{b_0-c}. \qquad (*)$$

En mettant les fractions du membre de droite au même dénominateur, on obtient

$$\frac{\alpha}{a_0-c} + \frac{\beta}{b_0-c} = \frac{-(\alpha+\beta)c + \alpha b_0 + \beta a_0}{(a_0-c)(b_0-c)}.$$

L'égalité (*) est donc satisfaite si on choisit α et β tels que $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha b_0 + \beta a_0 = 1$, c'est à dire

$$\alpha = \frac{1}{b_0-a_0}, \qquad \beta = -\frac{1}{b_0-a_0}.$$

Donc[1]

$$\int \frac{dc}{(a_0-c)(b_0-c)} = \int \left(\frac{1}{b_0-a_0}\frac{1}{a_0-c} - \frac{1}{b_0-a_0}\frac{1}{b_0-c}\right)dc = \frac{1}{b_0-a_0}\left(-\ln(a_0-c) + \ln(b_0-c)\right)$$
$$= \frac{1}{b_0-a_0}\ln\left(\frac{b_0-c}{a_0-c}\right).$$

On en déduit que les variables c et t sont liées par la relation

$$\frac{1}{b_0-a_0}\ln\left(\frac{b_0-c}{a_0-c}\right) = kt + H.$$

La condition initiale $c(0) = 0$ donne la valeur de H :

$$H = \frac{1}{b_0-a_0}\ln\left(\frac{b_0}{a_0}\right),$$

et donc pour tout $t \geqslant 0$ on a

$$\frac{1}{b_0-a_0}\ln\left(\frac{b_0-c(t)}{a_0-c(t)}\right) - \frac{1}{b_0-a_0}\ln\left(\frac{b_0}{a_0}\right) = kt,$$

qui donne

$$\boxed{\frac{1}{b_0-a_0}\ln\left(\frac{1-c(t)/b_0}{1-c(t)/a_0}\right) = kt.}$$

Supposons par exemple $b_0 > a_0$. Comme pour tout t, $c'(t) = ka(t)b(t) \geqslant 0$, on sait que c est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. L'égalité précédente entraine que si $t \to +\infty$, $\frac{1-c(t)/b_0}{1-c(t)/a_0} \to +\infty$. Or, comme on l'a déjà remarqué, pour tout t, on a $0 \leqslant c(t) \leqslant a_0 < b_0$. Donc pour tout t, on a $0 < 1 - a_0/b_0 \leqslant 1 - c(t)/b_0 \leqslant 1$. Donc,

[1] On notera que dans le calcul qui suit, on écrit directement $\int \frac{1}{a_0-c}dc = -\ln(a_0-c)$, et pas $-\ln|a_0-c|$. C'est parce que vu le contexte chimique, il est évident que pour tout t, on aura $c(t) \leqslant a_0$, et donc $a_0 - c(t) \geqslant 0$. Et de même, on sait à l'avance que $b_0 - c(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$.

si $\frac{1-c(t)/b_0}{1-c(t)/a_0} \to +\infty$, c'est que $1 - c(t)/a_0 \to 0^+$, c'est à dire $c(t) \to a_0$. Ce qui n'est pas surprenant : au bout d'un temps infini, le réactif en défaut (A) est épuisé, et , compte tenu des coefficients stœchiométriques et de la condition initiale $c(0) = 0$, la quantité finale de C est égale à la quantité initiale de A.
De même, si c'est A qui est en excès, c'est à dire si $a_0 > b_0$, on aura $c(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} b_0$. Au total, dans tous les cas,

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} c(t) = \min(a_0, b_0).}$$

Exercice 5.
a) L'équation différentielle satisfaite par x se réécrit

$$\frac{dx}{dt} = -kx.$$

Pour résoudre cette équation, on sépare les variables et on intègre :

$$\ln x = \int \frac{dx}{x} = -k \int dt = -kt + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. A $t = 0$, on a $x = x_0$, donc $C = \ln x_0$. Et donc, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\boxed{x(t) = e^{-kt+\ln x_0} = x_0 e^{-kt}.}$$

Si on note V le volume (constant) de la solution, le nombre de moles de P au temps t est $p(t)V$. Vu les coefficients stœchiométriques de la réaction et comme $p(0) = 0$, la quantité de P qui s'est formée au temps t est égale à la quantité de Cr^{3+} consommée au même instant, donc $p(t)V = x_0V - x(t)V$. En divisant par V, on obtient

$$\boxed{p(t) = x_0 - x(t) = x_0(1 - e^{-kt}).}$$

Quand $t \to +\infty$, on obtient

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} p(t) = x_0.}$$

b) Pour tout $t \geqslant 0$,

$$\boxed{A(t) = \alpha_x x_0 e^{-kt} + \alpha_p x_0(1 - e^{-kt}) = \alpha_p x_0 + x_0 e^{-kt}(\alpha_x - \alpha_p).}$$

A $t = 0$, on obtient

$$\boxed{A(0) = \alpha_x x_0,}$$

et à la limite $t \to +\infty$, on a

$$\boxed{A_\infty = \alpha_p x_0.}$$

c) D'après les résultats de b), on a

$$A(t) = A_\infty + e^{-kt}(A(0) - A_\infty),$$

et donc

$$\ln \frac{A(t) - A_\infty}{A(0) - A_\infty} = -kt,$$

d'où la formule demandée

$$\ln \frac{A_\infty - A(0)}{A_\infty - A(t)} = kt.$$

Exercice 6.
a) Fixons $t \geqslant 0$ et faisons un bilan de la population de lapins pendant un court intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{Nombre de lapins}\\ \text{au temps } t+\Delta t\end{pmatrix}}_{= P(t+\Delta t)} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{Nombre de lapins}\\ \text{au temps } t\end{pmatrix}}_{= P(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix}\text{Nombre de lapins}\\ \text{nés entre } t \text{ et } t+\Delta t\end{pmatrix}}_{\approx n_0 P(t)\Delta t} - \underbrace{\begin{pmatrix}\text{Nombre de lapins}\\ \text{morts entre } t \text{ et}\\ t+\Delta t\end{pmatrix}}_{\approx m(t)P(t)\Delta t}$$

En passant le premier terme du membre de droite à gauche et en divisant le tout par Δt, on obtient

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx n_0 P(t) - m(t)P(t).$$

Cette égalité approximative est d'autant plus précise que Δt est petit. En passant à la limite $\Delta t \to 0$, puisque le membre de droite ne dépend pas de Δt et que

$$P'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t},$$

on obtient l'égalité demandée :

$$\boxed{P'(t) = n_0P(t) - m(t)P(t).}$$

b) Si $m(t) = m_0$, l'équation diférentielle satisfaite par P se réécrit

$$\frac{dP}{dt} = (n_0 - m_0)P.$$

On résout cette équation en séparant les variables et en intégrant :

$$\ln P = \int \frac{dP}{P} = (n_0 - m_0) \int dt = (n_0 - m_0)t + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante qu'on détermine en utilisant la condition initiale $P(0) = P_0$, qui donne $C = \ln P_0$. Et donc, pour $t \geqslant 0$,

$$\boxed{P(t) = e^{(n_0-m_0)t+\ln P_0} = P_0e^{(n_0-m_0)t}.}$$

c) Si $n_0 > m_0$, on a donc

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = +\infty.$$

Les ressources sur l'île étant limitées, ce n'est pas réaliste : la population finira par devenir trop importante, entrainant une surmortalité, donc un taux de mortalité qui ne sera plus constant.
d) Si le taux de mortalité est donné par $m(t) = m_0 + \alpha P(t)$, comme il doit augmenter quand $P(t)$ augmente, on doit avoir $\alpha > 0$.
e) Si $m(t) = m_0 + \alpha P(t)$, l'équation différentielle satisfaite par P s'écrit

$$P'(t) = n_0P(t) - (m_0 + \alpha P(t))P(t),$$

soit

$$\boxed{P'(t) = a_0P(t) - \alpha P(t)^2,}$$

avec $\boxed{a_0 = n_0 - m_0.}$ En mettant les fractions au même dénominateur, on obtient[2]

$$\frac{1}{a_0}\left(\frac{1}{P} + \frac{\alpha}{a_0 - \alpha P}\right) = \frac{1}{a_0}\left(\frac{a_0 - \alpha P + \alpha P}{P(a_0 - \alpha P)}\right) = \frac{1}{P(a_0 - \alpha P)} = \frac{1}{a_0P - \alpha P^2}.$$

Si $a_0 - \alpha P_0 \neq 0$, on résout l'équation différentielle satisfaite par P en séparant les variables et en intégrant entre le temps 0 et un temps $t > 0$ (le calcul est valable tant que $a_0P - \alpha P^2 \neq 0$) :

$$\int_0^t \frac{dP}{a_0P - \alpha P^2} = \int_0^t ds = t.$$

Compte tenu du calcul précédent, l'intégrale du membre de gauche peut être calculée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{dP}{a_0P - \alpha P^2} &= \int_0^t \frac{1}{a_0}\left(\frac{1}{P} + \frac{\alpha}{a_0 - \alpha P}\right) dP = \frac{1}{a_0}\left[\ln P - \ln|a_0 - \alpha P|\right]_{P=P_0}^{P=P(t)} \\ &= \frac{1}{a_0}\left((\ln P(t) - \ln|a_0 - \alpha P(t)|) - (\ln P_0 - \ln|a_0 - \alpha P_0|)\right) \\ &= \frac{1}{a_0}\left(\ln\frac{P(t)}{P_0} - \ln\left|\frac{a_0 - \alpha P(t)}{a_0 - \alpha P_0}\right|\right)\end{aligned}$$

On a donc

$$\ln\frac{P(t)}{P_0} - \ln\left|\frac{a_0 - \alpha P(t)}{a_0 - \alpha P_0}\right| = a_0t,$$

donc

$$\ln\left|\frac{P_0(a_0 - \alpha P(t))}{P(t)(a_0 - \alpha P_0)}\right| = -a_0t,$$

et donc

$$\ln\left|\frac{P_0}{a_0 - \alpha P_0}\left(\frac{a_0}{P(t)} - \alpha\right)\right| = -a_0t,$$

$$\frac{a_0}{P(t)} - \alpha = \pm\frac{a_0 - \alpha P_0}{P_0}e^{-a_0t}.$$

[2] Si cette indication n'était pas donnée dans l'énoncé, on aurait pu chercher des constantes λ et ν telles que

$$\frac{1}{a_0P - \alpha P^2} = \frac{\lambda}{P} + \frac{\nu}{a_0 - \alpha P},$$

ce qui aurait donné $\lambda = \frac{1}{a_0}$ et $\nu = \frac{\alpha}{a_0}$.

La condition initiale $P(0)=P_0$ entraine que c'est le signe $+$ qui doit être conservé, et

$$P(t)=a_0\frac{1}{\alpha+\frac{a_0-\alpha P_0}{P_0}e^{-a_0t}}=\frac{a_0P_0}{\alpha P_0(1-e^{-a_0t})+a_0e^{-a_0t}}.$$

En particulier,

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}P(t)=\frac{a_0}{\alpha}.}$$

Quand t tend vers l'infini, la population tend vers une population d'équilibre $P_\infty=a_0/\alpha$.
f) Si $P_0=a_0/\alpha$, la population reste constante égale à cette population d'équilibre : la fonction P telle que pour tout $t\geqslant 0$, $P(t)=P_0$ est solution de (E_2).
Si $P_0>a_0/\alpha$, la solution $P(t)$ de (E_2) trouvée à la question précédente décroit sur $\mathbb{R}$ (et tend vers a_0/α quand $t\to+\infty$).
Si $P_0<a_0/\alpha$, la solution $P(t)$ de (E_2) trouvée à la question précédente croit sur $\mathbb{R}$ (et tend aussi vers a_0/α quand $t\to+\infty$).
Noter que la population d'équilibre $P_\infty=a_0/\alpha$ est d'autant plus grande que α est petit, et tend vers l'infini quand α tend vers 0^+, ce qui est cohérent avec ce qu'on a observé dans les questions b) et c) (cas $\alpha=0$).

Exercice 7.
I. 0) Pour tout $t\in I$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{at}(y_1(t)-y_2(t))\right)&=ae^{at}(y_1(t)-y_2(t))+e^{at}(y_1'(t)-y_2'(t))=e^{at}\left((y_1'(t)+ay_1(t))-(y_2'(t)+ay_2(t))\right)\\&=e^{at}(f-f)=0,\end{aligned}$$

car y_1 et y_2 sont solutions de (E) sur l'intervalle I. Donc il existe une constante K telle que pour tout $t\in I$, $e^{at}(y_1(t)-y_2(t))=K$. Comme y_1 et y_2 vérifient toutes les deux (CI), à $t=0$, on a $e^0(y_0-y_0)=K$, et donc $K=0$. Donc pour tout $t\in I$, $e^{at}(y_1(t)-y_2(t))=0$, et donc $\boxed{y_1(t)=y_2(t).}$
I. 1)a) Si y est solution de (E)-(CI), on a

$$\boxed{y'(0)=f-ay(0)=f-ay_0.}$$

b) Si $y_p(t)$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $t\in\mathbb{R}$ $y_p'(t)=0$, et donc $y_p'(t)+ay_p(t)=ay_p(t)$. Si de plus y_p est solution de (E), on doit donc avoir, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $ay_p(t)=f$, et donc $\boxed{y_p(t)=f/a}$. Réciproquement, cela définit bien une solution de (E). En effet, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $y_p'(t)+ay_p(t)=0+af/a=f$. Si de plus $y_0=f/a$, la fonction y_p ainsi définie vérifie aussi (CI), puisque $y_p(0)=f/a=y_0$.
c) L'équation (E) se réécrit $\frac{dy}{dt}+ay=f$. Formellement, en séparant les variables sur un intervalle sur lequel $f-ay$ ne s'annule pas, on obtient $\frac{dy}{ay-f}=-dt$. Ensuite, on intègre :

$$\frac{1}{a}\ln|ay-f|=\int\frac{dy}{ay-f}=\int -dt=-t+K,$$

où $K\in\mathbb{R}$ est une constante. Donc $|ay-f|=\exp(a(-t+K))=e^{aK}e^{-at}$, et donc

$$ay-f=\pm e^{aK}e^{-at},$$

qui se réécrit

$$y=\frac{f}{a}+Ce^{-at},\qquad (*)$$

où $C=\pm e^{aK}/a$ est une constante non nulle. On notera qu'en remplaçant C par 0 dans l'égalité (*), on retrouve la solution constante de (E) trouvée à la question b).
d) Si la fonction y donnée à la question c) vérifie (CI), on a

$$y_0=y(0)=\frac{f}{a}+C,$$

et donc $C=y_0-\frac{f}{a}$. Réciproquement, on vérifie que

$$\boxed{y(t)=\frac{f}{a}+\left(y_0-\frac{f}{a}\right)e^{-at}}$$

définit bien une solution de (E)-(CI). En effet, en prenant y comme dans la formule ci-dessus, on a bien, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$y'(t)+ay(t)=\left(y_0-\frac{f}{a}\right)\cdot(-a)e^{-at}+a\left(\frac{f}{a}+\left(y_0-\frac{f}{a}\right)e^{-at}\right)=f,\qquad\text{et}\qquad y(0)=\frac{f}{a}+\left(y_0-\frac{f}{a}\right)=y_0.$$

D'après la question 0), on sait qu'il s'agit de la seule solution du problème.

2)a) On a vu à la question 1)b) que

$$\boxed{y_p(t) = \frac{f}{a}}$$

est solution de (E). Noter qu'a priori, sauf hypothèse supplémentaire sur y_0, cette fonction y_p ne vérifie pas (CI).

b) Comme y et y_p sont toutes les deux solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, la fonction y_h définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $y_h(t) = y(t) - y_p(t)$ vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y_h'(t) + ay_h(t) = \left(y'(t) - y_p'(t)\right) + a\left(y(t) - y_p(t)\right) = \left(y'(t) + ay(t)\right) - \left(y_p'(t)) + ay_p(t)\right) = f - f = 0.$$

c) L'équation (H) se réécrit $\frac{dy_h}{dt} + ay_h = 0$. On résout cette équation en séparant les variables et en intégrant : si $y_h \neq 0$,

$$\ln|y_h| = \int \frac{dy_h}{y_h} = \int -adt = -at + K,$$

où $K \in \mathbb{R}$ est une constante. Donc

$$y_h = \pm e^{-at+K} = Ce^{-at},$$

où on a posé $C = \pm e^K$. Réciproquement, on vérifie que pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\boxed{y_h(t) = Ce^{-at}}$$

est bien solution de (H). C'est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème (H) qui vérifie la condition initiale $y_h(0) = C$ (l'unicité de la solution à ce problème se déduit de la question 0) en remplaçant f par 0 et y_0 par C). On en déduit également que toutes les solutions de (H) sont de ce type.

d) D'après b) et c), si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $y(t) - y_p(t) = Ce^{-at}$. Donc, étant donnée l'expression de y_p trouvée à la question a), toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ s'écrit, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{y(t) = \frac{f}{a} + Ce^{-at}}$$

pour un certain $C \in \mathbb{R}$. Si de plus y vérifie (CI), à $t = 0$, on a $y_0 = y(0) = \frac{f}{a} + C$, donc $C = y_0 - f/a$, et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{y(t) = \frac{f}{a} + \left(y_0 - \frac{f}{a}\right)e^{-at}.}$$

3)a) Avec les notations introduites dans la question, pour tout $t \in I$, on a, grâce à la formule de dérivation d'un produit :

$$z'(t) = ae^{at}y(t) + e^{at}y'(t) = e^{at}\left(y'(t) + ay(t)\right) = e^{at}f.$$

b) En reprenant les notations de la question a), si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et si z est défini, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $z(t) = e^{at}y(t)$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$z(t) = \int fe^{at}dt = \frac{f}{a}e^{at} + C$$

et donc

$$\boxed{y(t) = e^{-at}z(t) = e^{-at}\left(\frac{f}{a}e^{at} + C\right) = \frac{f}{a} + Ce^{-at}.}$$

c) On détermine la valeur de C en utilisant la condition initiale (CI) comme on l'a fait à la question 2)d). On obtient $C = y_0 - f/a$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{y(t) = \frac{f}{a} + \left(y_0 - \frac{f}{a}\right)e^{-at}.}$$

4)a) Voir 2)c).

b) Si $y(t) = z(t)e^{-at}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, la fonction z vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{z'(t)e^{-at} + z(t)\cdot\left(-ae^{-at}\right)}_{y'(t)} + a\,\underbrace{z(t)e^{-at}}_{y(t)} = f,$$

et donc, après simplification :

$$z'(t)e^{-at} = f,$$

c'est à dire

$$\boxed{z'(t) = fe^{at}.}$$

c) On déduit de la question précédente comme en 3)b) et 3)c) que

$$\boxed{y(t) = \frac{f}{a} + \left(y_0 - \frac{f}{a}\right) e^{-at}.}$$

II.0) Soit y_1 et y_2 deux solutions de (E)-(CI) sur I, et $A(t) = \int_0^t a(s)ds$. Calculons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}(y_1(t) - y_2(t))\right) &= A'(t)e^{A(t)}(y_1(t) - y_2(t)) + e^{A(t)}(y_1'(t) - y_2'(t)) \\ &= e^{A(t)}\left((y_1'(t) + a(t)y_1(t)) - (y_2'(t) + a(t)y_2(t))\right) = e^{A(t)}(f(t) - f(t)) = 0.\end{aligned}$$

Donc $e^{A(t)}(y_1(t) - y_2(t))$ est constant sur l'intervalle I. Pour obtenir la valeur de cette constante, on l'évalue à $t = 0$: elle vaut $e^0(y_0 - y_0) = 0$. Donc pour tout $t \in I$, $e^{A(t)}(y_1(t) - y_2(t)) = 0$, c'est à dire $y_1(t) = y_2(t)$. Les fonctions y_1 et y_2 sont donc les mêmes, et donc si (E)-(CI) a une solution sur I, celle-ci est unique.

2)a) Si y et y_p sont deux solutions de (E) sur I, la fonction y_h définie pour $t \in I$ par $y_h(t) = y(t) - y_p(t)$ vérifie, pour tout $t \in I$,

$$y_h'(t)+a(t)y_h(t) = \left(y'(t) - y_p'(t)\right)+a(t)\left(y(t) - y_p(t)\right) = \left(y'(t) + a(t)y(t)\right)-\left(y_p'(t)) + a(t)y_p(t)\right) = f(t)-f(t) = 0.$$

b) L'équation (H) se réécrit $\frac{dy_h}{dt} + a(t)y_h = 0$. On résout cette équation en séparant les variables et en intégrant : si $y_h \neq 0$,

$$\ln|y_h| = \int \frac{dy_h}{y_h} = \int -a(t)dt = -A(t) + K,$$

où $K \in \mathbb{R}$ est une constante. Donc

$$y_h = \pm e^{-A(t)+K} = Ce^{-A(t)},$$

où on a posé $C = \pm e^K$. Réciproquement, on vérifie que pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction définie pour $t \in I$ par

$$\boxed{y_h(t) = Ce^{-A(t)}}$$

est bien solution de (H). C'est l'unique solution sur I du problème (H) qui vérifie la condition initiale $y_h(0) = Ce^{-A(0)}$ (l'unicité de la solution à ce problème se déduit de la question 0) en remplaçant $f(t)$ par 0 et y_0 par $Ce^{-A(0)}$). On en déduit également que toutes les solutions de (H) sont de ce type.

c) D'après a) et b), si y est une solution de (E) sur I, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$, on a $y(t) - y_p(t) = Ce^{-A(t)}$. Donc toute solution de (E) sur I est de la forme

$$\boxed{y(t) = y_p(t) + Ce^{-A(t)}}$$

pour un certain $C \in \mathbb{R}$.

d) On remarque que $\boxed{y_p(t) = 2}$ est solution de l'équation. En effet, pour tout $t \in I$, on a

$$y_p'(t) + ty_p(t) = 0 + t \cdot 2 = 2t.$$

On calcule ensuite une primitive de $a(t) = t$:

$$A(t) = \int_0^t sds = \frac{t^2}{2}.$$

D'après b), les solutions de

$$y_h'(t) + ty_h(t) = 0$$

sont les fonctions du type

$$y_h(t) = Ce^{-t^2/2},$$

et d'après c), les solutions de (E) sont les fonctions du type

$$y(t) = 2 + Ce^{-t^2/2},$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante que l'on détermine en utilisant (CI) : à $t = 0$, on a $1 = y(0) = 2 + C$, donc $C = -1$, et donc, pour tout $t \in R$,

$$\boxed{y(t) = 2 - e^{-t^2/2}.}$$

e) On cherche une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ sous la forme $y_p(t) = Ke^t$, où $K \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $y_p'(t) + 2y_p(t) = Ke^t + 2Ke^t = 3Ke^t$. Donc y_p est solution de (E) si et seulement si on choisit $K = 1/3$:

$$\boxed{y_p(t) = \frac{1}{3}e^t.}$$

On calcule ensuite une primitive de $a(t) = 2$:

$$A(t) = \int_0^t 2ds = 2t.$$

D'après b), les solutions de

$$y_h'(t) + 2y_h(t) = 0$$

sont les fonctions du type

$$y_h(t) = Ce^{-2t},$$

et d'après c), les solutions de (E) sont les fonctions du type

$$y(t) = \frac{1}{3}e^t + Ce^{-2t},$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante que l'on détermine en utilisant (CI) : à $t = 0$, on a $1 = y(0) = 1/3 + C$, donc $C = 2/3$, et donc, pour tout $t \in R$,

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t}.}$$

3)a) Avec les notations introduites dans la question, pour tout $t \in I$, on a, grâce à la formule de dérivation d'un produit et comme $A'(t) = a(t)$:

$$z'(t) = A'(t)e^{A(t)}y(t) + e^{A(t)}y'(t) = e^{A(t)}\left(y'(t) + a(t)y(t)\right) = e^{A(t)}f(t).$$

b) En reprenant les notations de la question a), si y est une solution de (E) sur I et si z est défini, pour tout $t \in I$, par $z(t) = e^{A(t)}y(t)$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$,

$$z(t) = \int f(t)e^{A(t)}dt = D(t) + C$$

et donc

$$\boxed{y(t) = e^{-A(t)}z(t) = e^{-A(t)}\left(D(t) + C\right) = D(t)e^{-A(t)} + Ce^{-A(t)}.}$$

c) Pour le problème de la question 2)d), on a $a(t) = t$, $A(t) = \int_0^t sds = t^2/2$, $f(t) = 2t$, donc on peut choisir

$$D(t) = \int 2te^{t^2/2}dt = 2e^{t^2/2}.$$

D'après b), les solutions de l'équation différentielle de 2)d) sont donc de la forme

$$y(t) = e^{-t^2/2}(2e^{t^2/2} + C) = 2 + Ce^{-t^2/2},$$

pour un $C \in R$. On détermine ensuite la valeur de C comme dans la question 2)d).

Pour le problème de la question 2)e), on a $a(t) = 2$, $A(t) = \int_0^t 2ds = 2t$, $f(t) = e^t$, donc on peut choisir

$$D(t) = \int e^t e^{2t}dt = \int e^{3t}dt = \frac{1}{3}e^{3t}.$$

D'après b), les solutions de l'équation différentielle de 2)e) sont donc de la forme

$$y(t) = e^{-2t}(\frac{1}{3}e^{3t} + C) = \frac{1}{3}e^t + Ce^{-2t},$$

pour un $C \in R$. On détermine ensuite la valeur de C comme dans la question 2)e).

4)a) Voir 2)b).

b) Si $y(t) = z(t)e^{-A(t)}$ est solution de (E) sur I, la fonction z vérifie, pour tout $t \in I$:

$$\underbrace{z'(t)e^{-A(t)} + z(t)\cdot\left(-a(t)e^{-A(t)}\right)}_{y'(t)} + a(t)\underbrace{z(t)e^{-A(t)}}_{y(t)} = f(t),$$

et donc, après simplification :

$$z'(t)e^{-A(t)} = f(t),$$

c'est à dire

$$\boxed{z'(t) = f(t)e^{A(t)},}$$

soit la même équation qu'en 3)a). On peut donc conclure comme en 3)b).