# Feuille TD 6: Equations Différentielles

**Exercice 1.** Trouver une solution pour chacun des problèmes différentiels suivants:

**a)** $\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y'(t) = \frac{1+y(t)^2}{2y(t)} \\ y(0) = 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y'(t) = \frac{t^2}{\cos(y(t))} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} y'(t) = \frac{e^{2y(t)}}{1+t^2} \\ y(0) = -\frac{1}{2}\ln\pi \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} y'(t) - \frac{e^{3t}}{y(t)} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} y'(t) + ty(t)^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

**g)** $\begin{cases} y'(t) = t^3 e^{-y(t)} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} y'(t) = \frac{t^2}{y(t)} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} y'(t) = t^2\sqrt{y(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

**j)** $\begin{cases} y'(t) = -2y(t)^2 + y(t) \\ y(0) = 1/3 \end{cases}$ **k)** $\begin{cases} y'(t) = 4ty(t)^2 - 2ty(t) \\ y(0) = 1/3 \end{cases}$

Pour j) et k), on pourra commencer par chercher deux nombres réels $a$ et $b$ tels que pour tout $x$,

$$\frac{1}{x - 2x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1 - 2x}$$

**Exercice 2.** On considère la réaction réversible A$\rightleftharpoons$B (en solution aqueuse). On note $a(t)$ et $b(t)$ les concentrations de A et B au cours du temps (le volume de la solution est supposé constant). A $t = 0$, $a(0) = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, et $b(0) = 0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On suppose que les deux réactions A$\longrightarrow$B et B$\longrightarrow$A sont du premier ordre, c'est à dire que pendant un court intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, la quantité de A transformée en B par unité de volume est proportionnelle à $\Delta t$ et à $a(t)$ (on note $\alpha$ le coefficient de proportionnalité). De même, la quantité de B transformée en A par unité de volume est proportionnelle à $\Delta t$ et à $b(t)$ (on note $\beta$ le coefficient de proportionnalité)

**a)** Calculer $a(t) + b(t)$ pout tout $t \geqslant 0$.

**b)** Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $b'(t) + \beta b(t) = \alpha a(t)$

**c)** Montrer que $b$ est solution de l'équation différentielle $y'(t) + (\alpha + \beta)y(t) = \alpha$.

**d)** Montrer que $b(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1 - e^{-(\alpha+\beta)t})$. En déduire $a(t)$.

**e)** Calculer les limites de $a(t)$ et $b(t)$ quand $t \to \infty$, et tracer l'allure des graphes de $a$ et $b$.

**Exercice 3.** On considère une réaction chimique en solution aqueuse $A \longrightarrow B + C$. La réaction se fait à volume constant. On note $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ les concentrations respectives de A, B et C au temps $t$, et $v(t) = -a'(t) = b'(t) = c'(t)$ la vitesse de la réaction au temps $t$. A $t = 0$, $a(0) = a_0 > 0$. Déterminer l'expression de $a(t)$ pour tout $t \geqslant 0$, ainsi que le temps $\theta_{1/2}$ de demie-réaction (au bout duquel la moitié du réactif est consommé), dans chacun des cas suivants:

**a)** La réaction est d'ordre 0, c'est à dire $v = k$ où $k > 0$ est une constante.

**b)** La réaction est d'ordre 1, c'est à dire $v = ka$ où $k > 0$ est une constante.

**c)** La réaction est d'ordre $p \geqslant 2$, c'est à dire $v = ka^p$ où $k > 0$ est une constante.

**Exercice 4.** On considère la réaction chimique $A + B \longrightarrow C$. On note $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ les concentrations respectives de A, B et C au temps $t$. A $t = 0$, $a(0) = a_0 > 0$, $b(0) = b_0 > 0$ et $c(0) = 0$. On suppose que la réaction est d'ordre partiel 1 par rapport à chacun des réactifs A et B, c'est à dire que sa vitesse est donnée par $v(t) = c'(t) = ka(t)b(t)$, où $k > 0$ est une constante.

**a)** Exprimer $a(t)$ et $b(t)$ en fonction de $a_0$, $b_0$ et $c(t)$. En déduire l'équation différentielle satisfaite par $c(t)$.

**b)** Dans le cas où $b_0 = a_0$, exprimer $c(t)$ en fonction de $t$, $a_0$ et $k$.

**c)** Dans le cas où $b_0 \neq a_0$, montrer que pour tout $t > 0$,

$$\frac{1}{b_0 - a_0} \ln\left(\frac{1 - c(t)/b_0}{1 - c(t)/a_0}\right) = kt.$$

Que se passe t-il quand $t \to +\infty$? (en particulier, quelle est la limite de $c(t)$?)

**Exercice 5.** On étudie par spectrométrie la réaction chimique $Cr^{3+}$+EDTA$\longrightarrow$P, où P est un complexe violet (EDTA: Acide Ethylène Diamine Tétracétique). On travaille avec un excès d'EDTA, dont la concentration est donc considérée comme restant constante au cours de la réaction. De plus, la réaction se fait à volume constant. On note $x(t)$ et $p(t)$ les concentrations respectives en $Cr^{3+}$ et en P. A $t = 0$, $x(0) = x_0 > 0$, et $p(0) = 0$. La réaction est d'ordre partiel 1 par rapport à $Cr^{3+}$, c'est à dire que la vitesse de la réaction est $v(t) = -x'(t) = kx(t)$.

**a)** Calculer $x(t)$ et $p(t)$ en fonction de $t$, $k$ et $x_0$. Quelles sont les limites de $x(t)$ et de $p(t)$ quand $t \to +\infty$?

**b)** A tout temps $t$, l'absorbance $A(t)$ de la solution est donnée par $A(t) = A_x(t) + A_p(t)$, où $A_x(t) = \alpha_x x(t)$, $A_p(t) = \alpha_p p(t)$ et $\alpha_x$ et $\alpha_p$ sont les coefficients d'absorption repectifs de $Cr^{3+}$ et de P. Exprimer $A(0)$, $A(t)$ et $A_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$ en fonction de $\alpha_x$, $\alpha_p$, $x_0$ et $x(t)$.

**c)** Déduire des questions précédentes la formule

$$\ln\left(\frac{A_\infty - A_0}{A_\infty - A(t)}\right) = kt.$$

**Exercice 6.** On étudie une population de lapins sur une île. La population à $t = 0$ est de $P_0$ lapins. On note $P(t)$ la population au temps $t$, où $t$ est exprimé en années. Le taux de natalité (constant) est de $n_0$ pour un par an (c'est à dire que pour un taux de 1%, $n_0 = 1/100 = 0.01$), le taux de mortalité (qui peut éventuellement dépendre du temps) est de $m(t)$ pour un par an.
**a)** Faire le bilan de la population sur un court intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, et en déduire soigneusement que l'équation différentielle satisfaite par $P(t)$ pour $t \geqslant 0$ est

$$P'(t) = n_0 P(t) - m(t)P(t). \tag{E$_1$}$$

**b)** Dans les questions (b) et (c), on suppose que $m(t) = m_0$ est constant. Résoudre l'équation différentielle ($E_1$) dans ce cas: exprimer $P(t)$ en fonction de $n_0$, $m_0$, $P_0$, $t$.
**c)** On suppose de plus $n_0 > m_0$. Que vaut $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)$? Le modèle reste-t-il réaliste pour des temps arbitrairement grands?
**d)** Les ressources sur l'île n'étant pas infinies, la mortalité augmente quand le nombre de lapins devient trop grand. En conséquence, on suppose que $m(t)$ est de la forme $m(t) = m_0 + \alpha P(t)$, où $m_0 > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Quel est le signe de $\alpha$?
**e)** Sous l'hypothèse de la question (d), montrer que ($E_1$) se réécrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} P'(t) = a_0 P(t) - \alpha P(t)^2 \\ P(0) = P_0, \end{array} \right. \tag{E$_2$}$$

où on exprimera $a_0$ en fonction de $n_0$ et $m_0$.
Simplifier l'expression

$$\frac{1}{a_0}\left(\frac{1}{P} + \frac{\alpha}{a_0 - \alpha P}\right).$$

Sous l'hypothèse $a_0 - \alpha P_0 \neq 0$, en déduire que pour tout temps $t \geqslant 0$, la solution de ($E_2$) vérifie

$$\ln \frac{P(t)}{P_0} - \ln \left| \frac{a_0 - \alpha P(t)}{a_0 - \alpha P_0} \right| = a_0 t.$$

Donner l'expression de $P(t)$ en fonction de $a_0, P_0, \alpha$ et $t$. Quelle est la limite de $P(t)$ quand $t \to +\infty$?
**f)** Quelle est la solution de ($E_2$) dans le cas particulier $a_0 - \alpha P_0 = 0$? Discuter la monotonie de $P(t)$ suivant que $P_0 > a_0/\alpha$ ou $P_0 < a_0/\alpha$.

**Exercice 7. Préparation du second semestre.**
**I. Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.**
Soit $a \neq 0$, $f$ et $y_0$ trois nombres réels. Dans le paragraphe qui suit, on va s'intéresser à la résolution du problème suivant, constitué d'une équation différentielle (E) et d'une condition initiale (CI).

$$\left\{ \begin{array}{ll} y'(t) + ay(t) = f, & \text{(E)} \\ y(0) = y_0. & \text{(CI)} \end{array} \right.$$

Dans tout l'exercice, $I$ désigne un intervalle ouvert contenant 0. On dit que $y$ est une solution de (E) sur $I$ si $y$ est une fonction définie et dérivable sur $I$ et si l'égalité (E) est vérifiée pour tout $t \in I$. On dira que c'est une solution du problème (E)-(CI) si en plus l'égalité (CI) est satisfaite.
On va résoudre ce problème de quatre manières différentes.
**0) La question de l'unicité.**
Soit $y_1$ et $y_2$ deux solutions de (E)-(CI) sur $I$. Calculer la dérivée de $e^{at}(y_1(t) - y_2(t))$, et en déduire que pour tout $t \in I$, $y_1(t) = y_2(t)$.
Ainsi, s'il existe une solution au problème (E)-(CI) sur $I$, elle est unique.
**1) Première méthode : séparation de variables.**
**a)** Si $y$ est une solution du problème (E)-(CI) sur $I$, que vaut $y'(0)$?
**b)** Si $y_0 = f/a$, montrer que le problème (E)-(CI) admet une solution constante sur $\mathbb{R}$. La donner.
**c)** Si $y$ est une solution de (E) sur $I$ telle que $y(t) - f/a$ ne s'annule pas sur $I$, montrer par séparation des variables que $y(t)$ est de la forme

$$y(t) = \frac{f}{a} + Ce^{-at},$$

où $C \in \mathbb{R}^*$ est une constante.
**d)** Déduire des questions précédentes l'unique solution du problème (E)-(CI) sur $\mathbb{R}$.
**2) Deuxième méthode : utilisation d'une solution particulière.**
**a)** Montrer que l'équation (E) admet sur $\mathbb{R}$ une solution constante $y_p(t)$, que l'on explicitera.
**b)** Si $y$ est une autre solution de (E) sur $\mathbb{R}$, montrer que $y_h(t) = y(t) - y_p(t)$ est solution de l'équation

$$y_h'(t) + ay_h(t) = 0 \qquad \text{(H)}$$

On dit que (H) est l'équation homogène associée à (E).
**c)** Résoudre (H).
**d)** Déduire des questions précédentes toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, puis, parmi celles-ci, celle qui vérifie (CI).
**3) Troisième méthode : ramener la résolution de (E) à un calcul de primitive.**
**a)** Si $y$ est une solution de (E) sur $I$ et $z(t)$ est défini pour tout $t \in I$ par $z(t) = e^{at}y(t)$, montrer que

$$\forall t \in I, \qquad z'(t) = fe^{at}.$$

**b)** En déduire toutes les solutions de (E).
**c)** En déduire la solution de (E)-(CI).

**4) Quatrième méthode : variation de la constante.**
**a)** Montrer que les solutions de l'équation homogène (H) associée à l'équation (E) sont les fonctions qui s'écrivent sous la forme

$$y_h(t) = Ce^{-at},$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.
**b)** On cherche une solution $y(t)$ de (E) sous la forme $y(t) = z(t)e^{-at}$, où $z(t)$ est une nouvelle fonction inconnue. Si $y$ est solution de (E), de quelle équation différentielle la fonction $z$ est-elle solution ?
Remarque : pour savoir sous quelle forme chercher $y$, on a remplacé la constante $C$ dans l'expression des solutions de (H) trouvée à la question 4)a) par une nouvelle fonction inconnue $z(t)$ qui dépend de $t$. On fait donc "varier la constante", d'où le nom de la méthode.
**c)** En déduire l'unique solution du problème (E)-(CI).

**II. Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non nécessairement constant.**

On s'intéresse maintenant au problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = f(t), & \text{(E)} \\ y(0) = y_0, & \text{(CI)} \end{cases}$$

où cette fois, $a$ et $f$ sont des fonctions continues sur un intervalle $I$ contenant 0. Pour résoudre ce problème, on va essayer d'adapter les différentes méthodes vues dans la première partie de l'exercice pour l'équation à coefficients constants.

**0) La question de l'unicité.**
En s'inspirant de la question I.0), montrer que si (E)-(CI) admet une solution sur $I$, celle-ci est unique. On pourra introduire une primitive de $a$, par exemple $A(t) = \int_0^t a(s)ds$.

**1) Tentative de séparer les variables.**
Considérons le cas particulier $a(t) = 1$ et $f(t) = t$. Essayer de résoudre

$$y'(t) + y(t) = t$$

par la méthode de séparation des variables, et se convaincre que ça ne marche pas. En fait, la méthode de séparation ne marche pas dès que $a(t) \neq 0$ et $f(t)$ n'est pas une fonction constante.

**2) Première méthode : Utilisation d'une solution particulière.**
**a)** Supposons qu'on connaisse une solution particulière de (E) sur $I$, que l'on note $y_p$. Soit $y$ une autre solution de (E) sur $I$. Montrer que $y_h = y - y_p$ vérifie :

$$\forall t \in I, \qquad y_h'(t) + a(t)y_h(t) = 0, \qquad \text{(H)}$$

qu'on appelle équation homogène associée à l'équation (E).
**b)** Soit $A(t)$ une primitive de $a(t)$. Montrer que les solutions de (H) sur $I$ sont les fonctions qui s'écrivent

$$y_h(t) = Ce^{-A(t)},$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.
**c)** Déduire de a) et b) toutes les solutions de (E) sur $I$.
**d)** Application 1 : résoudre le problème

$$\begin{cases} y'(t) + ty(t) = 2t, & \text{(E)} \\ y(0) = 1. & \text{(CI)} \end{cases}$$

On pourra commencer par chercher une solution particulière constante à l'équation.
**e)** Application 2 : résoudre le problème

$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = e^t, & \text{(E)} \\ y(0) = 1. & \text{(CI)} \end{cases}$$

On pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_p(t) = Ke^t$, où $K \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer.

**3) Deuxième méthode : ramener la résolution de (E) à un calcul de primitive.**
L'inconvénient de la méthode précédente est qu'il faut "deviner" une solution particulière de l'équation. Ce n'est pas toujours évident. La méthode suivante permet de trouver les solutions en sans passer par la recherche d'une solution particulière.
**a)** Soit $A(t)$ une primitive de $a$ sur $I$. Si $y$ est solution de (E) sur $I$ et $z(t) = e^{A(t)}y(t)$, montrer que pour tout $t \in I$, $z'(t) = f(t)e^{A(t)}$.
**b)** Si $D$ est une primitive de $f(t)e^{A(t)}$ sur $I$, montrer que toutes les solutions de (E) s'écrivent

$$y(t) = D(t)e^{-A(t)} + Ce^{-A(t)},$$

où $C$ est une constante quelconque.
**c)** Reprendre la résolution des problèmes des questions 2)d) et 2)e) avec la méthode des questions 3)a) et 3)b).

**4) Troisième méthode : variation de la constante.**
**a)** Montrer que les solutions de l'équation homogène (H) associée à l'équation (E) sont les fonctions qui s'écrivent sous la forme

$$y_h(t) = Ce^{-A(t)},$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.
**b)** On cherche une solution $y(t)$ de (E) sous la forme $y(t) = z(t)e^{-A(t)}$, où $z(t)$ est une nouvelle fonction inconnue. Si $y$ est solution de (E), de quelle équation différentielle la fonction $z$ est-elle solution ?
En déduire qu'on peut conclure comme en 3)b).