Matrices (chap. 1)

Def : Une matrice est définie comme un tableau de nombres.
Si le tableau est de taille $n \times p$, on dit que c'est une matrice à n lignes, p colonnes, vivant dans l'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Multiplication : Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors A et B sont AB-compatibles (= on peut faire $A \times B$) si $col(A) = li(B)$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix}2&1&3\\4&5&6\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}2&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix} \quad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}2&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\\ AB = \begin{pmatrix}2&1&3\\4&5&6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}7&3\\14&9\end{pmatrix}\end{array}$$

Espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

Def : $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ $\rightarrow$ leurs éléments sont des vecteurs de taille n.

Produit scalaire : Soit $u, v \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs. Alors le produit scalaire est :

$$\langle u | v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

. ⚠ Produit scalaire renvoie un nombre !

ex : $u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ $\langle u | v \rangle = 1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 2 = 8$

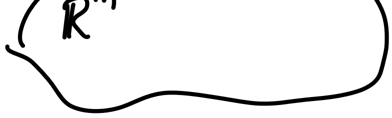
Produit vectoriel : Soit $u, v \in \mathbb{R}^3$, $u = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$. Alors le produit vect. est :

$$u \times v = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_2 v_3 - v_2 u_3\\ -(u_1 v_3 - v_1 u_3)\\ u_1 v_2 - v_1 u_2\end{pmatrix}$$

. ⚠ Produit vectoriel renvoie un vecteur !

Espaces vectoriels

Def : Un ev c'est un ensemble muni d'une opération interne et d'une opération externe. **Ex** : $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$



$$(E, +, \cdot)$$

ensemble d'objets mathématiques

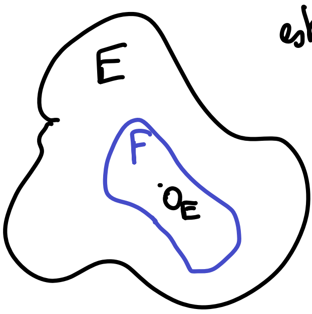
opération entre les éléments de E (opération interne)

opération entre un élément de E et un élément extérieur (opération externe)

<u>Question</u> : comment montrer que quelque chose est un ev ?

↳ on montre que c'est un sous-espace vectoriel d'un ev connu.

<u>Def</u> : Un ensemble $F \subset E$ muni des deux lois de E (i.e. $+_E$, $\cdot_E$) est un sous-espace vectoriel de E si :



(1) $0_E \in F$. (ex : $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $0_{\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ...)

(2) $\forall u, v \in F$, $u +_E v \in F$.

(3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u \in F$, $\lambda \cdot_E u \in F$

<u>Méthode</u> : Par exemple, mq $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$ est un sev de E.

(1) On définit 0_E et on montre qu'il est dans F.

ex : On a $0_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ or $0 + 0 + 3 \times 0 = 0$ donc $0_E \in F$.

(2) On prend deux vecteurs dans F, on les définit, on rappelle leurs propriétés (du fait qu'ils soient dans F) et on dit ce que l'on veut montrer. Ensuite, on part de ce qu'on sait et on montre que la somme est dans F.

ex : Soit $u, v \in F$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. On sait que :

$\begin{cases} u_1 + u_2 + 3u_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + 3v_3 = 0 \end{cases}$. On veut mq $u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \in F$,

c-à-d $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + 3(u_3 + v_3) = 0$.

On sait que $(u_1 + u_2 + 3u_3) + (v_1 + v_2 + 3v_3) = 0$

Ainsi $(u_1+u_2+3u_3)+(v_1+v_2+3v_3) = u_1+u_2+3u_3+v_1+v_2+3v_3$

$= u_1+v_1+u_2+v_2+3u_3+3v_3 = u_1+v_1+u_2+v_2+3(u_3+v_3)$

$=0.$

(3) On prend un vecteur dans F, on le définit, on prend $\lambda \in \mathbb{R}$, on rappelle les propriétés du vecteur dans F et on dit ce que l'on veut montrer. Ensuite, on part de ce qu'on sait et on montre que le produit $\lambda u \in F$.

ex : Soit $u \in F$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On sait que $u_1+u_2+3u_3 = 0$, on veut mq $\lambda u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix} \in F$, c.à.d $\lambda u_1 + \lambda u_2 + 3(\lambda u_3) = 0$.

On a $u_1+u_2+3u_3 = 0 \iff \lambda(u_1+u_2+3u_3) = 0$

$\iff \lambda u_1 + \lambda u_2 + 3\lambda u_3 = 0$

$\iff (\lambda u_1) + (\lambda u_2) + 3(\lambda u_3) = 0$

Système linéaires

Objectif : Résoudre des systèmes d'équations :

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ ex+fy+gz=h \\ ix+jy+kz=l \end{cases}$$

$\Rightarrow$ on peut les écrire sous formes de matrice !

ex : $\begin{cases} x+3y-z=1 \\ \pi x-4z=3 \\ 4x+7y=5 \end{cases} \iff AX=B,\quad B=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ \pi & 0 & -4 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

On veut passer d'un système $\begin{cases} x+3y-z=1 \\ \pi x-4z=3 \\ 4x+7y=5 \end{cases}$

à un système $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=\gamma \end{cases} \iff AX=B$ avec $B=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

et $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$

<u>Pivot de Gauss</u> : On va de la colonne de gauche vers celle de droite. On veut un 1 en premier coefficient, des 0 ailleurs $\rightarrow$ on fait des opérations sur les lignes en fonction.

ex : Résoudre

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&3\\ 1&2&1&1\\ 2&1&1&0 \end{array}\right) = [A\,|\,B] \rightsquigarrow [I_d\,|\,sol]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&3\\ 1&2&1&1\\ 2&1&1&0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-2L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&3\\ 0&1&-1&-2\\ 0&-1&-3&-6 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_2]{L_1\leftarrow L_1-L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&3&5\\ 0&1&-1&-2\\ 0&0&-4&-8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3\times\frac{-1}{4}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&3&5\\ 0&1&-1&-2\\ 0&0&1&2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2\leftarrow L_2+L_3]{L_1\leftarrow L_1-3L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&-1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&2 \end{array}\right)$$

$\iff \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$ ok!

⚠ Des fois, on a + d'inconnues que d'équations ou l'inverse : dans ce cas, le système peut avoir une ∞-té de solutions, et les solutions s'expriment avec les variables qui ne sont pas des pivots.

ex : $\begin{cases} x+y+z-3t=1 \\ 2x+y-z+t=-1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Pivot}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -7 & 3 \end{array}\right)$$

Sous forme de système :

$$\begin{cases} x-2z+4t=-2 \\ y+3z-7t=3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2z-4t-2 \\ y=-3z+7t+3 \\ z=z \\ t=t \end{cases}$$

$$S=\left\{ \begin{pmatrix} 2z-4t-2 \\ -3z+7t+3 \\ z \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; z,t\in\mathbb{R} \right\}$$

Inversibilité et déterminant

Def : A^{-1} est l'inverse de A si $A^{-1}A = AA^{-1} = I_d$.

Def : Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n=1$, 2 ou 3 est le nombre suivant :

* si $n=1$, $A=(a)=a$ $\quad \det A = a$
* si $n=2$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \det A = ad-bc$
* si $n=3$, $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $\quad \det A = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$

$$= aei - afh - dhi + dch + gbf - gce$$

ex : $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -3 - 1 = -4$$

<u>Proposition</u> : A est inversible ssi $\det A \neq 0$. Si c'est le cas, $\det(A^{-1}) = 1/\det A$. On a l'inverse d'une matrice 2×2 qui s'écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

⚠ On veut souvent des inverses de matrice 3×3 !

<u>Méthode</u> : Appliquer le pivot de Gauss à la matrice augmentée

$$[A \mid I_d] \rightsquigarrow [I_d \mid A^{-1}]$$

<u>ex</u> : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ A inversible ?

$$\det A = 0\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \neq 0 \text{ donc } A \text{ inversible !}$$

$$[A \mid I_d] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2]{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 & -2 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 & -2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$= [I_d \mid A^{-1}]$$

Astuce : s'en assurer en faisant $A \times A^{-1}$ ou $A^{-1} \times A$ et espérer retomber sur l'identité

Bases

Définition : Soit $B = (U_1, \ldots, U_n)$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. B est une base de $\mathbb{R}^n$ si $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$u = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_n U_n$$

ex : Base canonique de $\mathbb{R}^3$ $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$u = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def : la colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ des coefficients présents dans la décomposition de u, se note $\mathrm{coord}_B(u)$ (les coordonnées de u dans la base B).

ex : Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^3$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$u = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors $\mathrm{coord}_B(u) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

ex : Soit $u = \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors $u = \pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\mathrm{coord}_B(u) = \begin{pmatrix} \pi \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$. $\rightsquigarrow$ Pour B canonique, $\mathrm{coord}_{B_{can}}(u) = u$

ex : soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et soit $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

$$u = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \mathrm{coord}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def : Soit $B = (U_1, \ldots, U_n)$. La matrice associée à B est la matrice carrée :

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ U_1 & U_2 & U_3 & \ldots & U_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

ex : $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$ $\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi \\ 5 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Exo Déterminer les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifiant

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = A$$

$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b = 0$ $d = 1$

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ac+c & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ac+c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$

on a : $\begin{cases} a^2 = a \\ ac + c = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ ou } a = 0 \\ c + c = c \quad \text{ou} \quad c = c \\ 2c = c \quad\quad c \in \mathbb{R} \\ 2c - c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Ce sont donc les matrices qui s'écrivent

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{R}.$$

Exo : Soit $B = (U_1, U_2, U_3)$ $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1) Montrons que c'est une base :

$$\det \underline{B} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 1(-1) + 0$$

$$= 1 \neq 0 \text{ donc c'est une base!}$$

(2) Calculer $\text{coord}_B(X)$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On veut trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq

$$X = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_3\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ \lambda_2+\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3 = x\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = y\\ \lambda_2+\lambda_3 = z\end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x\\1&1&1&y\\0&1&1&z\end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x\\0&1&0&y-x\\0&1&1&z\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x\\0&1&0&y-x\\0&0&1&z-y+x\end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&y-z\\0&1&0&y-x\\0&0&1&z-y+x\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}\lambda_1 = y-z\\ \lambda_2 = y-x\\ \lambda_3 = z-y+x\end{cases}$$

Vérifions :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = (y-z)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (y-x)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + (z-y+x)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}y-z+z-y+x\\ y-z+y-x+z-y+x\\ y-x+z-y+x\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ ok!}$$

<u>Théorème</u> : Soit $\mathcal{B}$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^n \iff \underline{B} \text{ est inversible} \iff \det \underline{B} \neq 0$$

<u>Proposition</u> : Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(u) = (\underline{B})^{-1} u$$

<u>ex</u> : Mq $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base $\iff \det \underline{B} \neq 0$.

$$\underline{B} = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&-1\end{pmatrix} \qquad \det \underline{B} = 1\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}0&0\\0&-1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Calculons mtn $\mathrm{coord}_B(u)$ avec $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$[\underline{B} \mid I_d] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) = [I_d \mid \underline{B}^{-1}]$$

On vérifie que $\underline{B} \cdot \underline{B}^{-1} = I_d$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\mathrm{coord}_B(u) = (\underline{B})^{-1} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -2a + b \\ 3a - c \end{pmatrix}$$

Vérifions :

$$u = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2a + b) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (3a - c) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b - 2a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c - 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ ok!}$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 60 \\ -\pi \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{coord}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 60 - 2 \\ 3 + \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 58 \\ 3 + \pi \end{pmatrix}.$$

<u>Changement de bases</u>

<u>Définition</u> : Soient $B = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ et $B' = (U_1', U_2', \dots, U_n')$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Alors la matrice de passage de la base B à B', notée $P_{BB'}$, est carrée d'ordre n et est définie comme

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad C_j(P_{BB'}) = \mathrm{coord}_B(U_j')$$

ou $P_{BB'} = \underline{B}^{-1} \underline{B}'$

ex : $\mathcal{B}_{can} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

$$P_{\mathcal{B}_{can}\mathcal{B}} = \underline{B}_{can}^{-1} \underline{B} \qquad I_d^{-1} = I_d$$

$$= I_d = \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_{can}} = \underline{B}^{-1} \underline{B}_{can} = \underline{B}^{-1} I_d = \underline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Théorème : Soient $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ et $\mathcal{B}' = (U_1', U_2', \ldots, U_n')$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Soit $u \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{cases} \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \operatorname{coord}_{\mathcal{B}'}(u) \\ \operatorname{coord}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$$

ex $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ $\quad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

Soit $u \in \mathbb{R}^3$, $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Calculons $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u)$ donc calculons $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ et $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}'}(u)$.

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \underline{B}^{-1} \underline{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Inverse d'une matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/x & 0 & 0 \\ 0 & 1/y & 0 \\ 0 & 0 & 1/z \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$u = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 = a \\ \lambda_2 = b \\ 3\lambda_3 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a/2 \\ \lambda_2 = b \\ \lambda_3 = c/3 \end{cases}$$

$$\mathrm{coord}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} a/2 \\ b \\ c/3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{on a tout pour calculer } \mathrm{coord}_B(u)\,!$$

$$\mathrm{coord}_B(u) = P_{BB'}\,\mathrm{coord}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a/2 \\ b \\ c/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ c/2 \end{pmatrix}$$

Vérifions :

$$u = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{c}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{ok!}$$

Applications linéaires

Définition : Une application $\begin{array}{rl}\phi : \mathbb{R}^p & \to \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto \phi(X)\end{array}$ est linéaire ssi $\forall X, X' \in \mathbb{R}^p$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(1)\quad \phi(X + X') = \phi(X) + \phi(X')$$

$$(2)\quad \phi(\lambda X) = \lambda \phi(X)$$

ex : Mq $\begin{array}{rl}\phi : \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} x-z \\ y-z \end{pmatrix}\end{array}$ est linéaire.

Soit $X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(1)\quad \phi(X_1 + X_2) = \phi\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x'-(z+z') \\ y+y'-(z+z') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ y-z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'-z' \\ y'-z' \end{pmatrix}$$

$$= \phi(X_1) + \phi(X_2)$$

$$(2)\quad \phi(\lambda X_1) = \phi\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x - \lambda z \\ \lambda y - \lambda z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x-z \\ y-z \end{pmatrix} = \lambda \phi(X_1).$$

Théorème : Une application $\phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est linéaire ssi $\exists A$ une matrice de taille $n \times p$ $\left(A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right)$ tq, $\forall X \in \mathbb{R}^p$:

$$\phi(X) = AX.$$

La matrice A est appelée matrice associée à ϕ et est notée $A = M_0(\phi)$.

$\underline{ex}$: $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 - 1x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \\ 0x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ainsi $M_0(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Méthode pour calculer $M_0(\phi)$</u> :

* écrire $\phi(X)$ en colonne
* ranger les x_1 les uns en dessous des autres, idem pour $x_2, x_3, \dots$
* lire de haut en bas et de gauche à droite les coeffs de la matrice $\to M_0(\phi)$.

$\underline{ex}$: • $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x \\ x - y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 0y \\ 1x - 1y \\ 0x + 0y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_0(\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

• $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - 6c \\ a - b + 7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a + 1b - 6c + 0d \\ 1a - 1b + 0c + 7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

• $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ n'est pas linéaire donc pas de $M_0(\gamma)$!

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$$

$\to$ exo

<u>Théorème</u> : Soient $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ $(\phi_1 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $\phi_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n)$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a : (1) $M_0(\phi_1 + \phi_2) = M_0(\phi_1) + M_0(\phi_2)$

(2) $M_0(\lambda \phi_1) = \lambda M_0(\phi_1)$

De plus, soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ et $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n)$ alors

(3) $M_0(\psi \circ \phi) = M_0(\psi) M_0(\phi)$

$\psi \circ \phi : \mathbb{R}^p \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^q \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$

$\cancel{\phi \circ \psi} : \mathbb{R}^q \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n \cancel{\to} \mathbb{R}^p \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^q$

ex : $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad$ $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto 2y_1 - y_2 + y_3$$

$\phi \circ \psi$? Non mais $\psi \circ \phi$ ok

$$M_0(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_0(\psi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $M_0(\psi \circ \phi) = M_0(\psi) M_0(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}$

$= M_0(\psi \circ \phi)$

Donc $\psi \circ \phi : \mathcal{D}_\phi \to \operatorname{Im} \psi$

$\psi \circ \phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto M_0(\psi \circ \phi) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1 + 3x_2$$

Exercice Soit $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, $u = (1,1)$, $v = (2,-1)$ et $w = (1,4)$.

(1) Mq $B = (u,v)$ base de $\mathbb{R}^2$, $\det \underline{B} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$.

(2) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ existe t'il une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tq $f(u) = (2,1)$ $f(v) = (1,-1)$ et $f(w) = (5,a)$?

On exprime W dans B, donc on calcule $\text{coord}_B(w)$:

$$W = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 4 + 3\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = 4 + \lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 = 3 \end{cases}$$

donc $\text{coord}_B(W) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $W = 3u - v$.

Pour que $f(W)$ soit linéaire on doit avoir $f(w) = f(3u) - f(v)$

donc $(5, a) = f(3u) - f(v) = 3f(u) - f(v)$

$$= 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

donc pour que f soit linéaire, il faut que $(5,a) = (5,4)$ donc $a = 4$.

<u>Exercice</u> : Soit N une matrice carrée vérifiant $N^3 = 0$.

(1) Mq $\det N = 0$: Si $N^3 = 0$, $\det(N^3) = 0$

or $\det(A^k) = (\det A)^k$ donc $\det(N^3) = (\det N)^3 = 0 \Rightarrow \det N = 0$

$\Rightarrow$ N n'est pas inversible.

(2) Soit $A = I - N$ et $B = I + N + N^2$.

Mq $AB = I$: $AB = (I-N)(I+N+N^2)$

$$= (I-N)I + (I-N)N + (I-N)N^2$$
$$= I^2 - NI + IN - N^2 + IN^2 - N^3$$
$$= I - N + N - N^2 + N^2 - 0$$
$$= I$$

Déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de N :

on veut mq $\det A \neq 0$, on sait que $AB = I$,

$\det(AB) = \det I = 1$ or $\det(AB) = \det A \det B$

$\Leftrightarrow \det A \det B = 1$ donc $\det A \neq 0$ et $\det B \neq 0$

donc A, B inversibles.

Exprimons A^{-1} : $AA^{-1} = I$ et $AB = I = AA^{-1}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}B = \underbrace{A^{-1}A}A^{-1}$$
$$\Leftrightarrow I\,B = I_d A^{-1}$$
$$\Leftrightarrow B = A^{-1}$$
$$\Leftrightarrow I + N + N^2 = A^{-1}!$$

<u>Exercice</u> : Soit $V, W \in \mathbb{R}^3$ tq ${}^tWW = 1$ ${}^tWV = \vec{0}$ $V \neq \vec{0}$.

On pose $A = I + V\,{}^tW$.

*Montrons que $AV = V$: $AV = (I + V\,{}^tW)V = IV + V\underbrace{{}^tWV}_{\vec{0}} = IV = V$

* Montrons que $AW = V + W$: $AW = (I + V^t W) W$

$$= IW + V^t \underbrace{WW}_{1} = W + V$$

* Montrons que $(I + V^t W)(I - V^t W) = I$:

$(I + V^t W)(I - V^t W) = A(I - V^t W) = A - AV^t W$ bof...

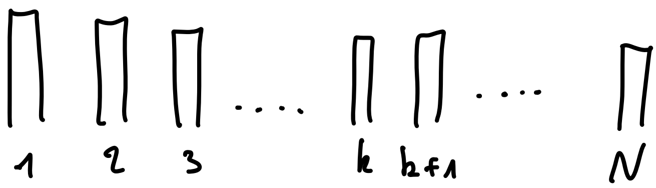
$$I^2 - (V^t W)^2 = I - V^t \underbrace{WV^t}_{\vec{0}} W = I.$$

* Montrons que $A^k = (I + k V^t W)$ pour tout $k \geq 0$ par récurrence.

Rappel : Démo par récurrence : on veut démontrer une propriété qui dépend d'un entier, quelque soit l'entier. Deux étapes :

(1) Initialisation : on montre la propriété pour $k=0$ (ou 1, ça dépend)

(2) Hérédité : on suppose la propriété au rang k vraie, et on montre la propriété au rang $k+1$



Dans notre cas : $\mathcal{P}(k)$: $A^k = (I + k V^t W)$

Initialisation : Mq $\mathcal{P}(k=0)$ est vraie.

On a $A^0 = I_d$ (définition) et $A^0 = (I + 0 V^t W) = I$. ok!

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(k)$ vraie, càd $A^k = (I + k V^t W)$.

Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a $A^{k+1} = A^k . A = (I + k V^t W) \cdot A = (I + k V^t W)(I + V^t W)$

$$= I^2 + V^t W + k V^t W + k V^t \underbrace{WV^t}_{= \vec{0}} W$$

$$= I + (k+1) V^t W$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$: $A^{k+1} = I + (k+1) V^t W$ vraie.

* Montrons que $tr(V^tW)=0$: on sait que $tr(AB)=tr(BA)$, donc $tr(V^tW) = tr(\underbrace{{}^tWV}_{=\vec{0}}) = 0$.

* Déduire que $tr(A^k)=3$: On sait que $A^k = I + kV^tW$,

donc $tr(A^k) = tr(I + kV^tW)$ or $tr(A+B) = tr(A)+tr(B)$

$= tr(I) + tr(kV^tW)$ or $tr(kA) = k\,tr(A)$

$= tr(I) + k\,tr(V^tW)$ or $tr(V^tW)=0$

$= tr(I) = 3$

Diagonalisation

__But__ : trouver une base dans laquelle une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme une matrice diagonale.

__Définition__ : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

* λ est une valeur propre de A, si $\exists X \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX = \lambda X$.
* le vecteur X est alors appelé le vecteur propre associé à λ.

__Polynôme caractéristique__ : * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(s) = \det(A - sI)$$

__ex__ : $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad A - sI = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-s & 3 \\ 0 & 5-s \end{pmatrix}$

$\det(A - sI) = \begin{vmatrix} 5-s & 3 \\ 0 & 5-s \end{vmatrix} = (5-s)^2 - 0 = (5-s)^2 = \chi_A(s)$
$= 25 - 10s + s^2$

* L'ensemble des solutions de $\chi_A(s) = 0$ s'appelle le spectre de A, noté $Sp(A)$ et contient les valeurs propres de A.

__ex1__ : $\det(A - sI) = (5-s)^2 = 0 \iff s = 5$ donc 5 est vp de A, et $Sp(A) = \{5\}$.

ex2 : $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A - sI = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4-s & 0 & 1 \\ 0 & 2-s & 3 \\ 0 & -1 & -s \end{pmatrix}$$

$$\det(A-sI) = \begin{vmatrix} 4-s & 0 & 1 \\ 0 & 2-s & 0 \\ 0 & -1 & -s \end{vmatrix} = (4-s)\begin{vmatrix} 2-s & 0 \\ -1 & -s \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -s \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2-s & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (4-s)\left[(2-s)(-s) - (-1)\cdot 0\right]$$

$$= -s(4-s)(2-s)$$

On veut $\chi_A(s) = -s(4-s)(2-s) = 0 \iff s=4$ ou $s=2$ ou $s=0$

Donc $Sp(A) = \{0, 2, 4\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$

<u>Définition</u> : la multiplicité d'une v.p. c'est le nombre de fois qu'elle résoud $\chi_A(s) = 0$.

<u>ex1</u> : $\chi_A(s) = (5-s)^2 = (5-s)(5-s) \quad m(5) = 2$

<u>ex2</u> : $\chi_A(s) = -s^8(4-s)^3(2-s)^2 \quad m(0) = 8,\ m(4) = 3,\ m(2) = 2$

→ Maintenant on veut trouver les X associés tq :

$AX_1 = \lambda_1 X_1$, $AX_2 = \lambda_2 X_2$ et $AX_3 = \lambda_3 X_3$

⚠ Si λ est une v.p telle que $m(\lambda) = k$, il faut trouver k vecteurs propre associé à λ !

<u>Trouver les vecteurs propres</u>

(1) On définit des sous-espaces caractéristique $A - \lambda I$:

<u>ex</u> : $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A(s) = -s(4-s)(2-s)$, $Sp(A) = \{0, 2, 4\}$

On définit autant d'espaces caractéristiques que de v.p. :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ et } m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow \text{on cherche 1 vecteur propre} \\ \lambda_2 = 2 \text{ et } m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow \text{on cherche 1 vecteur propre} \\ \lambda_3 = 4 \text{ et } m(\lambda_3) = 1 \rightsquigarrow \text{on cherche 1 vecteur propre} \end{cases}$$

1er espace : $A - \lambda_1 I = A - 0I = A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \end{array}$

but : trouver une manière d'annuler les colonnes entre elle

⇝ trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $aC_1 + bC_2 + cC_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

avec $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}$ car

$$1C_1 + 0C_2 + 4C_3 = \begin{pmatrix} 4 + 0.0 - 4.1 \\ 0 + 0.2 - 4.0 \\ 0 + 0.(-1) - 4.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⚠ On en a une ∞-té :

$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ marche aussi par ex

2ème espace : $A - \lambda_2 I = A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

but : trouver une manière d'annuler les colonnes entre elle

c-à-d : $a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + c = 0 \\ -b - 2c = 0 \end{cases}$$ ouf !

On a

$$\underbrace{1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}} + \underbrace{(-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 0 + (-2) \\ 0 + 0 + 0 \\ 0 + (-4) + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}$ convient !

3ème espace : $A-\lambda_3 I = A-4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

<u>Rq</u> : on peut prendre $X_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

<u>Ccl</u> : On a $\lambda_1 = 0 \quad X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2 \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_3 = 4 \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $AX_1 = \lambda_1 X_1$; $AX_2 = \lambda_2 X_2$; $AX_3 = \lambda_3 X_3$

Vérifions :

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 X_1 = 0\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ok!}$$

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 X_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{ok!}$$

$$AX_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 X_3 = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ok!}$$

<u>Théorème</u> Si A admet des v.p. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ($\Leftrightarrow Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$) et des vecteurs propres associés $X_1, X_2, \dots, X_n$, en posant

$$U = \left(X_1 \middle| X_2 \middle| \cdots \middle| X_n\right) \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors $\quad D = U^{-1}AU \iff A = UDU^{-1}$

<u>ex</u> : Dans l'exemple précédent, on a $Sp(A) = \{0, 2, 4\}$,

vecteurs propres : $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors on définit la matrice ("de passage") U telle que :

$$U = \left(X_1 \middle| X_2 \middle| X_3 \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

et D la matrice diagonale associée à A telle que :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors $A = UDU^{-1}$ ou $D = U^{-1}AU$.

<u>Etapes pour diagonaliser</u>

(1) Calculer $\chi_A(s) = \det(A - sI)$

(2) Résoudre $\chi_A(s) = 0 \Rightarrow$ on obtient $Sp(A)$ (les valeurs propres)

(3) On définit les sous-espaces caractéristiques (les $A - \lambda_i I$) et on cherche les X_i vecteurs propres associés à λ_i

(4) On construit P et P^{-1}.

<u>Exemple</u> : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A - sI = \begin{pmatrix} -1-s & 0 & 0 \\ 0 & -1-s & 0 \\ 1 & -1 & 1-s \end{pmatrix}$

$$\chi_A(s) = \begin{vmatrix} -1-s & 0 & 0 \\ 0 & -1-s & 0 \\ 1 & -1 & 1-s \end{vmatrix} = (-1-s) \begin{vmatrix} -1-s & 0 \\ -1 & 1-s \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1-s \end{vmatrix}$$

$$+ 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1-s & 0 \end{vmatrix} = (-1-s)\left[(-1-s)(1-s) + 0\right]$$

$$= (-1-s)(-1-s)(1-s)$$

$$= (-1-s)^2(1-s)$$

$\chi_A(s) = 0 \iff (-1-s)^2(1-s) = 0$

$\iff (-1-s)^2 = 0$ ou $(1-s) = 0$

$\iff s = -1$ ou $s = 1$

$$\begin{cases} Sp(A) = \{-1, 1\} = \{\lambda_1, \lambda_2\} \\ m(-1) = 2 \\ m(1) = 1 \end{cases}$$

1er espace caract. : $A - \lambda_1 I = A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

⚠ Deux vecteurs propres!

$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ok!

$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ok!

2ème espace caract : $A - \lambda_2 I = A - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow 0\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a trouvé des couples $(\lambda_1, X_1), (\lambda_2, X_2), (\lambda_3, X_3)$ tq

$$\begin{cases} AX_1 = \lambda_1 X_1 \\ AX_2 = \lambda_2 X_2 \\ AX_3 = \lambda_3 X_3 \end{cases}$$

$U = \begin{pmatrix} | & | & | \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Inversons U :

$$[U \mid Id] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$= [Id \mid U^{-1}]$$

$UDU^{-1} \stackrel{?}{=} A$

$$UDU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A$$