Corrigé

Exercice 1

1. A a 2 lignes et 3 colonnes, donc A est une matrice 2×3, et
$$A \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{Z}) \subset \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$$
De même, B a 3 lignes et 2 colonnes, donc B est une matrice 3×2, et
$$B \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{Z}) \subset \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$
2. Le produit AB est défini car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B (3). Le produit AB est donc une matrice de taille 2×2.
De même, le produit BA est défini car le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A (2). Le produit BA est donc une matrice de taille 3×3.
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$
$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1. La transposée consiste à échanger lignes et colonnes. Donc
$${}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
2. On additionne terme à terme :
$$C + D = \begin{pmatrix} 1+0 & -2+1 & 0+2 \\ 3+(-1) & 4+3 & 1+0 \\ -1+4 & 0+(-2) & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

1. Si M est une matrice carrée de taille n, sa trace est la somme de ses coefficients diagonaux :
$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M(i,i).$$
On ne peut pas définir la trace pour une matrice non carrée, car elle n'a pas une diagonale principale de longueur n bien définie.
2. La matrice nulle 0_n a tous ses coefficients diagonaux nuls, donc $\mathrm{tr}(0_n) = 0$.
3. La matrice identité I_n a des 1 sur la diagonale, donc $\mathrm{tr}(I_n) = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}} = n$.
4. Pour
$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
la diagonale vaut $(2, 3, -1)$, donc
$$\mathrm{tr}(E) = 2 + 3 + (-1) = 4.$$

Exercice 4

- Pour M_1, on a uniquement des termes sur la diagonale : M_1 est **diagonale**. Donc elle est aussi **triangulaire supérieure** et **triangulaire inférieure**. Enfin, comme ${}^tM_1 = M_1$, elle est **symétrique**.
- Pour M_2, tous les coefficients sous la diagonale sont nuls, donc M_2 est **triangulaire supérieure**. Elle n'est pas diagonale (il y a des termes hors diagonale) et elle n'est pas triangulaire inférieure. Elle n'est pas symétrique car par exemple $(M_2)_{12} = 2$ alors que $(M_2)_{21} = 0$. Elle n'est pas antisymétrique non plus (les coefficients diagonaux ne sont pas tous nuls, par exemple $(M_2)_{22} = 3$).
- Pour M_3, on vérifie que les termes sont symétriques par rapport à la diagonale : $(M_3)_{12} = (M_3)_{21} = 2$, $(M_3)_{13} = (M_3)_{31} = 3$, $(M_3)_{23} = (M_3)_{32} = -1$. Donc M_3 est **symétrique**. Elle n'est ni diagonale, ni triangulaire supérieure, ni triangulaire inférieure.
- Pour M_4, les coefficients diagonaux sont nuls, et on a $(M_4)_{21} = -2 = -(M_4)_{12}$, $(M_4)_{31} = 1 = -(M_4)_{13}$, $(M_4)_{32} = -3 = -(M_4)_{23}$. Donc ${}^tM_4 = -M_4$, et M_4 est **antisymétrique**.