Contrôle flash 1 – Matrices

Durée : 20 minutes (oui, c'est court).

Exercice 1 – Compatibilité et opérations (2 points)
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Préciser les dimensions de A et de B, et l'espace de matrices correspondant.
2. Dire si les produits AB et BA sont définis, et les calculer lorsqu'ils sont définis.

Exercice 2 – Transposée et somme de matrices (2 points)
On considère les matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la transposée ${}^tC$.
2. Calculer la matrice $C + D$.

Exercice 3 – Trace d'une matrice (4 points)

1. Donner la définition de la trace d'une matrice. Peut-on la calculer pour une matrice non carrée ?
2. Calculer la trace de la matrice nulle 0_n de taille n.
3. Calculer la trace de la matrice identité I_n de taille n.
4. Calculer la trace de la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 – Nature de matrices (2 points)
Pour chacune des matrices suivantes, préciser si elle est : diagonale, triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, symétrique, antisymétrique.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 – Bonus obligatoire
Au choix :

- Dessiner de manière **flatteuse** votre encadrant de TD ;
- Faire un compliment **sincère** à votre encadrant de TD ;
- Résoudre le système de **Navier–Stokes** incompressible sur $\mathbb{R}^3$, avec des données initiales régulières et à décroissance rapide à l'infini :

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \nu \Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{u}(x, 0) = \boldsymbol{u}_0(x). \end{cases}$$

  On attendra notamment une preuve rigoureuse d'existence et d'unicité globale des solutions lisses, ainsi que de leur décroissance rapide à l'infini pour tout temps $t > 0$.