

Correction

Exercice 1

1. **Faux.** Avoir plus d'inconnues que d'équations ne garantit pas l'existence de solutions. Par exemple $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ est incompatible.
 2. **Faux.** Une ligne $(0 \ 0 \ 0 \mid 0)$ correspond à l'équation $0 = 0$, donc une équation redondante. Cela ne suffit pas pour conclure qu'il y a une infinité de solutions.
 3. **Vrai.** Une variable libre peut prendre n'importe quelle valeur réelle, donc le système possède une infinité de solutions.
 4. **Vrai.** Si la matrice des coefficients est I_3 , alors le système est $x = a$, $y = b$, $z = c$ et la solution est unique.
-

Exercice 2

- (1) La matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Après élimination de Gauss on obtient $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$. La dernière ligne correspond à $0 = 2$, le système est donc **incompatible** : il n'admet aucune solution.
- (2) La matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$. Après pivot de Gauss on obtient $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. On obtient $y + z = 1$ et $x = 1$: la variable z est libre. L'espace des solutions est $\mathcal{S} = \{(1, 1 - z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.
-

Exercice 3

1. La relation ${}^tWW = 1$ signifie que $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$ si $W = (w_1, w_2, w_3)$. Cela signifie que la longueur du vecteur W est égale à 1. Le vecteur W est donc un vecteur unitaire. De même ${}^tWV = w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3$. La relation ${}^tWV = 0$ signifie que les vecteurs V et W sont perpendiculaires (orthogonaux).
 2. $AW = (I + V{}^tW)W = W + V({}^tWW) = W + V$ et $AV = (I + V{}^tW)V = V + V({}^tWV) = V$.
 3. $(I + V{}^tW)(I - V{}^tW) = I - (V{}^tW)^2$. Or $(V{}^tW)^2 = V({}^tWV){}^tW$ et ${}^tWV = 0$, donc $(V{}^tW)^2 = 0$. Ainsi $(I + V{}^tW)(I - V{}^tW) = I$.
 4. L'inverse de A est donc $A^{-1} = I - V{}^tW$.
-

Exercice 4

1. $\det(A) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5$.
2. $\det(A) \neq 0$, donc A est inversible.
3. Après pivot de Gauss sur $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$ on obtient

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right).$$

$$\text{Donc } B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

4. On vérifie que $AB = I$. La matrice B est donc l'inverse de A .
-