

Contrôle flash 2 – Pivot de Gauss et inversibilité

Durée : 3.6×10^6 millisecondes, soit le temps nécessaire à la Terre pour tourner d'environ 15 degrés.

- On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I,$$

la matrice B étant alors appelée **l'inverse** de A et est notée A^{-1} .

- Le **déterminant** d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\det(A) = ad - bc$.

On admet qu'une matrice est **inversible** si son déterminant est non nul.

Exercice 1. (4 pts) Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier brièvement.

1. Si un système linéaire possède strictement plus d'inconnues que d'équations, alors il admet toujours une infinité de solutions.
2. Si la matrice augmentée d'un système contient une ligne de la forme $(0 \ 0 \ 0 \mid 0)$, alors le système possède une infinité de solutions.
3. Si un système possède une variable libre, alors l'ensemble de ses solutions peut s'écrire à l'aide d'un paramètre réel.
4. Si la matrice des coefficients d'un système de 3 équations à 3 inconnues est la matrice identité, alors le système admet une unique solution.

Exercice 2. (8 pts) Résoudre les systèmes suivants à l'aide du pivot de Gauss.

$$(1) \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

Pour chacun des deux systèmes :

- écrire la matrice augmentée,
- appliquer l'algorithme du pivot de Gauss,
- déterminer les variables principales et les variables libres,
- donner l'ensemble des solutions.

Exercice 3. (4 pts) On considère deux vecteurs V, W de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$${}^tWW = 1, \quad {}^tWV = 0, \quad V \neq \mathbf{0}.$$

On définit la matrice $A = I + V {}^tW$, où I est la matrice identité.

1. Interpréter géométriquement les relations ${}^tWW = 1$ et ${}^tWV = 0$.
2. Montrer que $AW = V + W$ et $AV = V$.
3. Vérifier que $(I + V {}^tW)(I - V {}^tW) = I$.
4. En utilisant le rappel donné ci-dessus, en déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 4. (4 pts) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de A .
2. La matrice A est-elle inversible ?
3. On considère la matrice augmentée $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$.
Effectuer le pivot de Gauss sur cette double matrice pour échelonner-réduire la matrice de gauche.
4. Calculer le produit matriciel AB , où B est la matrice obtenue à droite. Que remarque-t-on ?

Exercice 5. (Bonus) Ecrivez à votre encadrant de TD quelque chose que vous n'osiez pas lui dire de vive voix.