TD1 – Matrices et systèmes linéaires – Corrigé

Veuillez contacter S. Cardonna en cas de fautes/coquilles ou remarques.

Exercice 1.

1. On a $A \in \mathscr{M}_{4,2}(\mathbb{R})$ et $A(i,j) = i + j$ pour $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 2$. Donc

$$A = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \\ 3+1 & 3+2 \\ 4+1 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

La colonne $\boldsymbol{C}_2(A)$ (deuxième colonne) est

$$\boldsymbol{C}_2(A) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

et la ligne $\boldsymbol{L}_3(A)$ (troisième ligne) est

$$\boldsymbol{L}_3(A) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Une matrice carrée $A = (A(i,j))$ est diagonale si et seulement si

$$\forall (i,j),\ i \neq j \implies A(i,j) = 0,$$

c'est-à-dire que tous les coefficients hors-diagonale sont nuls.
La matrice $D = \mathrm{Diag}(2, -8, 5, 0)$ est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Exemple de matrice triangulaire supérieure d'ordre 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple de matrice triangulaire inférieure d'ordre 3 ayant pour diagonale $(2, 0, 5)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Une matrice est symétrique si ${}^tA = A$.
Exemple de matrice symétrique d'ordre 2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Une matrice est antisymétrique si ${}^tA = -A$ (en particulier, sa diagonale est nulle).
Exemple de matrice antisymétrique d'ordre 3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. La transposée de la matrice A est :

$$^tA = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

On considère
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix}.$$

— Produit AC : on a $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, donc AC est défini et $AC \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
$$AC = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

— Produit LA : on a $L \in \mathscr{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, donc LA est défini et $LA \in \mathscr{M}_{1,2}(\mathbb{R})$.
$$LA = \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra + sc & rb + sd \end{pmatrix}.$$

— Produit LC : on a $L \in \mathscr{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, donc LC est défini et $LC \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ (un scalaire).
$$LC = \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = rx + sy.$$

— Produit CL : on a $C \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,2}(\mathbb{R})$, donc CL est défini et $CL \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
$$CL = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xr & xs \\ yr & ys \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

Dans chaque cas, on précise si $2A - B$, AB et BA sont définies, puis on calcule quand c'est possible.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   — $2A - B$ n'est pas définie (tailles 2×2 et 2×1).
   — AB est définie (tailles 2×2 et 2×1) :
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
   — BA n'est pas définie (tailles 2×1 et 2×2).
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}$.
   — $2A - B$ n'est pas définie (tailles 1×3 et 3×1).
   — AB est définie (tailles 1×3 et 3×1) :
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = (1 + 3i) + (-i)(2i) + 0 = 3 + 3i.$$
   — BA est définie (tailles 3×1 et 1×3) :
$$BA = \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3i & 3 - i & 2 + 6i \\ 2i & 2 & 4i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

— $2A - B$ n'est pas définie (tailles 1×2 et 2×2).
— AB est définie (tailles 1×2 et 2×2) :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

— BA n'est pas définie (tailles 2×2 et 1×2).

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   — $2A - B$ n'est pas définie (tailles 2×3 et 3×2).
   — AB est définie (tailles 2×3 et 3×2) :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

   — BA est définie (tailles 3×2 et 2×3) :

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 12 \\ 5 & 0 & 13 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   — $2A - B$ est définie :

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

   — AB est définie :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   — BA est définie :

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   — $2A - B$ est définie :

$$2A - B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

   — AB et BA sont définies et, comme $A = 3I_3$, on a $AB = BA = 3B$:

$$AB = BA = 3 \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 3 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
   - Si $\lambda = 0$ ou $A = 0$, alors $\lambda A = 0$ (évident).
   - Réciproquement, supposons $\lambda A = 0$. Si $\lambda \neq 0$, on peut multiplier par $\frac{1}{\lambda}$ et on obtient
   $$A = \frac{1}{\lambda}(\lambda A) = 0.$$
   Donc $\lambda A = 0 \Longrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } A = 0)$.

   Ainsi
   $$\lambda A = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } A = 0.$$
2. Exemple de deux matrices non nulles, AB-compatibles, telles que $AB = 0$:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Alors $A \neq 0$, $B \neq 0$ et
   $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Moralité : le produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle (existence de *diviseurs de zéro* pour le produit matriciel).

Exercice 5.

On note, pour $1 \leq j \leq n$, $E_j \in \mathbb{R}^n$ le j-ième vecteur de la base canonique :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que ${}^tE_i$ est la ligne qui sélectionne la i-ième coordonnée.

1. Montrons que, pour toute matrice carrée A d'ordre n,
   $$A(i,j) = {}^tE_i\, A\, E_j.$$

   Cas $n = 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors
   $$AE_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \qquad AE_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$
   et
   $${}^tE_1AE_1 = a = A(1,1), \quad {}^tE_1AE_2 = b = A(1,2), \quad {}^tE_2AE_1 = c = A(2,1), \quad {}^tE_2AE_2 = d = A(2,2).$$

   Cas général. Le vecteur AE_j est exactement la j-ième colonne de A, donc sa i-ième coordonnée vaut $A(i,j)$. Or multiplier à gauche par ${}^tE_i$ extrait précisément la i-ième coordonnée. Ainsi
   $${}^tE_i(AE_j) = A(i,j),$$
   c'est-à-dire $A(i,j) = {}^tE_iAE_j$.

2. Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Montrons que
$$DE_j = \lambda_j E_j.$$
En effet, E_j a toutes ses coordonnées nulles sauf la j-ième qui vaut 1. Multiplier par D multiplie la j-ième coordonnée par λ_j et laisse les autres à 0, d'où
$$DE_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_j E_j.$$
3. Soit D diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. On suppose que A commute avec D, c'est-à-dire
$$AD = DA.$$
Fixons $i, j \in \{1, \dots, n\}$. En multipliant à gauche par ${}^tE_i$ et à droite par E_j, on obtient
$${}^tE_i(AD)E_j = {}^tE_i(DA)E_j.$$
Or, par (2), $DE_j = \lambda_j E_j$, donc
$${}^tE_i(AD)E_j = {}^tE_i A(DE_j) = {}^tE_i A(\lambda_j E_j) = \lambda_j\, {}^tE_i A E_j.$$
De même,
$${}^tE_i(DA)E_j = ({}^tE_i D)AE_j.$$
Comme D est diagonale, ${}^tE_i D = \lambda_i\, {}^tE_i$, donc
$${}^tE_i(DA)E_j = \lambda_i\, {}^tE_i A E_j.$$
On a donc
$$\lambda_j\, {}^tE_i A E_j = \lambda_i\, {}^tE_i A E_j,$$
c'est-à-dire
$$(\lambda_j - \lambda_i)\, {}^tE_i A E_j = 0.$$
Si $i \neq j$, alors $\lambda_i \neq \lambda_j$ (hypothèse), donc $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ et par l'exercice 4 on en déduit
$${}^tE_i A E_j = 0.$$
Par (1), ${}^tE_i A E_j = A(i, j)$, donc pour tout $i \neq j$,
$$A(i, j) = 0.$$
Ainsi A est diagonale.
4. Moralité : si D est diagonale à valeurs diagonales deux à deux distinctes, alors les matrices qui commutent avec D sont exactement les matrices diagonales.

Exercice 6.

On considère
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
où a et b sont deux nombres fixés.

1. On calcule :
$$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^1 = A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Puis
$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
et
$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & a^2b+b(a+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & b(a^2+a+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. On conjecture, pour tout entier $k \geq 0$,
$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & b\,(1+a+\cdots+a^{k-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Initialisation. Pour $k=0$, on a $A^0 = I_2$, et la somme vide vaut 0, donc la formule est vraie.

   Hérédité. Supposons la formule vraie à l'ordre k. Alors
$$A^{k+1} = A^kA = \begin{pmatrix} a^k & b\,(1+a+\cdots+a^{k-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & a^kb+b\,(1+a+\cdots+a^{k-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
donc
$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & b\,(1+a+\cdots+a^{k}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
ce qui est exactement la formule au rang $k+1$.

   La formule est donc vraie pour tout $k \geq 0$.

   En particulier, si $a \neq 1$,
$$1+a+\cdots+a^{k-1} = \frac{a^k-1}{a-1},$$
et si $a=1$, alors $1+a+\cdots+a^{k-1} = k$.
3. Application. Soit (u_k) définie par $u_0 = 1$ et
$$u_{k+1} = au_k + b.$$
On pose
$$X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Alors
$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_k+b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ 1 \end{pmatrix} = AX_k.$$
Par récurrence, $X_k = A^kX_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc
$$X_k = \begin{pmatrix} a^k & b(1+a+\cdots+a^{k-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^k+b(1+a+\cdots+a^{k-1}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Ainsi
$$u_k = a^k + b(1+a+\cdots+a^{k-1}).$$
Donc, en distinguant les cas :
   — si $a \neq 1$,
$$u_k = a^k + b\,\frac{a^k-1}{a-1};$$
   — si $a = 1$,
$$u_k = 1 + kb.$$

Exercice 7.

1. On se convainc sur un exemple. Par exemple, prenons $n = 2$ et $p = 3$. On note (α_{ik}) avec $i \in \{1,2\}$ et $k \in \{1,2,3\}$. Alors
$$\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}\right) = (\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}) + (\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}) = \alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}.$$
De même,
$$\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2}\alpha_{ik}\right) = (\alpha_{11}+\alpha_{21}) + (\alpha_{12}+\alpha_{22}) + (\alpha_{13}+\alpha_{23}) = \alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}.$$
On obtient bien la même somme : changer l'ordre des sommes ne change pas le résultat.
2. Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On veut montrer que
$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$
Notons $A = (a_{ik})$ avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq p$, et $B = (b_{kj})$ avec $1 \leq k \leq p$, $1 \leq j \leq n$. Alors $AB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et
$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$
En particulier,
$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ki}\right).$$
En changeant l'ordre des sommes (question 1),
$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right).$$
Or $BA \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et
$$(BA)_{kk} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}.$$
Donc
$$\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^{p}(BA)_{kk} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right).$$
Ainsi $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

   On en déduit : pour toute colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$$\mathrm{Tr}(X\,{}^tX) = \mathrm{Tr}({}^tX\,X).$$
Or ${}^tX\,X$ est une matrice 1×1, donc un réel, et vaut
$${}^tX\,X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$
Ainsi
$$\mathrm{Tr}(X\,{}^tX) = \mathrm{Tr}({}^tX\,X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$
Donc
$$\mathrm{Tr}(X\,{}^tX) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff x_1 = \cdots = x_n = 0 \iff X = 0.$$

Exercice 8.

Soit $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une colonne et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ une ligne. On pose

$$A = CL \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \alpha = LC \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}.$$

1. Calcul de $\mathrm{Tr}(A)$. Par la question 2 de l'exercice 7 (avec $A = C$ et $B = L$), on a

$$\mathrm{Tr}(CL) = \mathrm{Tr}(LC).$$

Donc

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(CL) = \mathrm{Tr}(LC) = \mathrm{Tr}(\alpha) = \alpha,$$

car la trace d'une matrice 1×1 est son unique coefficient.

2. Montrons que, pour tout $k \geq 1$,

$$A^k = \alpha^{k-1} A.$$

On remarque d'abord que

$$A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = C\,\alpha\,L = \alpha(CL) = \alpha A.$$

Par récurrence, supposons $A^k = \alpha^{k-1}A$ pour un certain $k \geq 1$. Alors

$$A^{k+1} = A^k A = \alpha^{k-1} AA = \alpha^{k-1} A^2 = \alpha^{k-1}(\alpha A) = \alpha^k A.$$

Donc la propriété est vraie pour tout $k \geq 1$.

3. Calcul de $\mathrm{Tr}(A^k)$. Pour $k \geq 1$,

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(\alpha^{k-1}A) = \alpha^{k-1}\mathrm{Tr}(A) = \alpha^{k-1}\alpha = \alpha^k.$$

4. On suppose $A \neq 0$.
   - A est idempotente si $A^2 = A$. Or $A^2 = \alpha A$, donc

   $$A^2 = A \iff \alpha A = A \iff (\alpha - 1)A = 0.$$

   Comme $A \neq 0$, on obtient $\alpha - 1 = 0$, donc $\alpha = 1$.
   - A est nilpotente s'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$. Or $A^k = \alpha^{k-1}A$, donc

   $$A^k = 0 \iff \alpha^{k-1}A = 0.$$

   Comme $A \neq 0$, cela impose $\alpha^{k-1} = 0$, donc $\alpha = 0$.

   Ainsi, avec l'hypothèse $A \neq 0$:

$$A \text{ idempotente} \iff \alpha = 1, \qquad A \text{ nilpotente} \iff \alpha = 0.$$